V. I. FEODOSIEV

Resistencia de materiales

EDITORIAL MIR
MOSCU

RESISTENCIA DE MATERIALES

В. И. ФЕОДОСЬЕВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. I. FEODOSIEV

RESISTENCIA DE MATERIALES



EDITORIAL MIR
MOSCU

Traducido del ruso por
Pedro Gutiérrez Mora
Candidato a doctor en ciencias técnicas

Primera edición 1972
Primera reimpresión 1980
Segunda reimpresión 1985
Tercera reimpresión 1988

На испанском языке

Impreso en la URSS

ISBN 5-03-001183-8

INDICE

Introducción

INTRODUCCION

§ 1. Problemas y métodos de la resistencia de materiales

Todos los sólidos, en una u otra medida, tienen las propiedades de resistencia y rigidez, o sea que, dentro de ciertos límites son capaces, sin romperse y sin sufrir grandes variaciones en sus dimensiones geométricas, de resistir cargas.

La resistencia de materiales es la ciencia que trata de la resistencia y de la rigidez de los elementos de las estructuras. Por los métodos de la resistencia de los materiales se realizan los cálculos prácticos y se determinan las dimensiones necesarias, *seguras*, de las piezas de máquinas y de distintos tipos de estructuras.

Las bases fundamentales de la resistencia de materiales se apoyan sobre los teoremas de la mecánica general, sobre todo de la estática, sin conocimiento de los cuales el estudio de la resistencia de materiales sería imposible.

La diferencia entre la resistencia de materiales y la mecánica teórica consiste en que para la primera lo esencial son las propiedades de los cuerpos *deformables*, mientras que las leyes del movimiento del sólido interpretado como un cuerpo rígido no solamente pasan a un segundo plano, sino que en muchos casos simplemente carecen de importancia. Al mismo tiempo, teniendo en cuenta que las dos tienen mucho en común, se puede considerar a la primera como una rama de la segunda, llamada mecánica de los sólidos deformables.

La mecánica de los sólidos deformables abarca también a otras asignaturas como la teoría matemática de la elasticidad, que estudia de hecho los mismos problemas que la resistencia de materiales. La diferencia esencial entre la resistencia de materiales y la teoría matemática de la elasticidad consiste en la manera de enfocar el problema.

La teoría matemática de la elasticidad estudia el comportamiento de los sólidos deformables basándose sobre planteamientos más exactos. Por eso, al resolver los problemas resulta necesario, en muchos casos, recurrir a un aparato matemático más complicado y realizar con frecuencia cálculos voluminosos. Debido a esto, las

posibilidades del empleo práctico de los métodos de la teoría de la elasticidad son muy limitadas, a pesar de que ellos analizan los fenómenos de una manera más completa.

La resistencia de materiales tiene como fin la elaboración de métodos simples de cálculo, aceptables desde el punto de vista práctico, de los elementos *típicos*, más frecuentes, de las estructuras. Para ello se emplean diversos procedimientos aproximados. La necesidad de obtener resultados concretos y numéricos al resolver los problemas prácticos, nos obliga en algunos casos, a recurrir en la resistencia de los materiales, a hipótesis (suposiciones) simplificadas que deben ser justificadas comparando después los resultados del cálculo con los de los ensayos. Al elaborar los métodos de cálculo aproximados de la resistencia de materiales se emplean también los resultados del análisis exacto realizado por los métodos de la teoría matemática de la elasticidad.

Los fines de la resistencia de materiales , en virtud de su carácter aplicado, son más amplios que los de la teoría matemática de la elasticidad.

El problema esencial de la resistencia de materiales consiste no solamente en determinar las particularidades interiores de los sólidos, sino, también, en darles una interpretación correcta al juzgar sobre la capacidad de trabajo y utilización práctica de la estructura que se analiza. En la teoría matemática de la elasticidad este último problema no se plantea.

Entre las ciencias que estudian los problemas relacionados con los sólidos deformables, surgieron y se desarrollan en los últimos decenios nuevas ramas de la mecánica, que ocupan un lugar intermedio entre la resistencia de materiales y la teoría de la elasticidad, como, por ejemplo, la teoría aplicada de la elasticidad. Aparecen también asignaturas afines como la teoría de la plasticidad, teoría del escurrimiento plástico y otras. Sobre la base de las leyes fundamentales de la resistencia de materiales han sido creadas nuevas ramas de la ciencia sobre la resistencia de orientación práctica, como la mecánica de las construcciones estructurales y de los aviones, la teoría de la resistencia de las estructuras soldadas y muchas otras. Los métodos de la resistencia de materiales no permanecen inalterables sino que varían al surgir problemas y exigencias nuevos de la práctica. Al realizar los cálculos, los métodos de la resistencia de materiales se deben emplear de manera creadora y tener en cuenta que el éxito del cálculo práctico radica no tanto en el empleo de un aparato matemático complicado como en la capacidad de penetrar en el fenómeno, de encontrar las hipótesis más apropiadas y de llevar el cálculo a resultados numéricos definitivos.

§ 2. Sistema real y esquema de cálculo

En la resistencia de materiales como en cualquier rama de las ciencias naturales, el estudio de la resistencia del objeto o sistema real comienza por escoger el esquema de cálculo. Al comenzar el cálculo de la estructura se debe, ante todo, separar lo importante de lo que carece de importancia, es decir, se debe esquematizar la estructura, prescindiendo de todos aquellos factores que no influyen seriamente sobre el comportamiento del sistema como tal. Este tipo de simplificación del problema, al esquematizarlo, es en todos los casos absolutamente necesario, puesto que la solución del problema que considere todas las propiedades de la estructura es imposible debido a que, prácticamente, son inagotables.

Si, por ejemplo, se trata del cálculo de la resistencia del cable de un ascensor, se debe considerar, ante todo, el peso de la cabina, su aceleración y, en el caso de que se eleve a gran altura, el peso del cable. Al mismo tiempo se debe prescindir de los factores de poca importancia como la resistencia aerodinámica que ofrece el ascensor, la presión barométrica a distintas alturas, la variación de la tempertura con la altura y otros factores semejantes e innumerables.

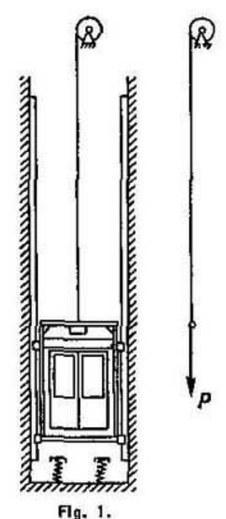


Fig. 1.

El cuerpo real, libre de todo lo que carece de importancia, se denomina *esquema de cálculo.* Un mismo cuerpo o sistema puede tener esquemas de cálculo distintos, según la exactitud que se exija del cálculo y según el aspecto del fenómeno que interese en el caso concreto que se analiza. Así, por ejemplo, si en el caso anterior lo que interesa es solamente la resistencia del cable, la cabina y carga pueden considerarse como un sólido indeformable y sustituirse por una fuerza aplicada al extremo del cable (fig. 1). Si se tratase de estudiar la resistencia de la cabina, esta última no podría considerarse ya como un sólido absolutamente rígido. Sus particularidades constructivas deben ser estudiadas separadamente y de acuerdo con este estudio escoger adecuadamente el esquema de cálculo correspondiente.

Si para un sistema se pueden proponer varios esquemas de cálculo, a cada esquema, por su parte, pueden corresponderle muchos objetos reales. Esto último es de gran importancia, pues, al estudiar cierto esquema de cálculo se puede obtener la solución de toda una serie de problemas reales del esquema dado común. En particular,

el esquema del cable de la figura 1, solicitado por una fuerza en su extremo, es muy frecuente en numerosos casos prácticos de cálculo por rotura.

La elección del esquema de cálculo en la resistencia de materiales comienza por esquematizar las propiedades de los materiales. Se considera generalmente que todos los materiales son *continuos y homogéneos* independientemente de las propiedades internas.

Un material se considera homogéneo, cuando cualquier parte de él tiene las mismas propiedades independientemente de su volumen. Claro está que en realidad el material, debido a su composición molecular, no puede ser, según esta definición, homogéneo. Los metales de estructura policristalina, es decir, compuesto por infinidad de cristales orientados caóticamente tampoco son, en el sentido riguroso de la palabra, homogéneos. Pero estas particularidades son de poca importancia, puesto que se trata del estudio de estructuras cuyas dimensiones son muy superiores, no sólo a las de los átomos, sino también a las de los cristales.

Del concepto de homogeneidad se deriva el de continuidad de la materia que ocupa plenamente el volumen atribuido al sólido. Siendo así, se puede aplicar a los sólidos el cálculo infinitesimal.

Al cuerpo continuo se le atribuye, en el esquema de cálculo, las propiedades del material real. Así, por ejemplo, bajo la acción de las fuerzas exteriores el cuerpo real cambia sus dimensiones geométricas. Al descargarlo, las dimensiones geométricas originales se restablecen completa o parcialmente. La propiedad del cuerpo de restablecer sus dimensiones originales se denomina *elasticidad*. Al resolver la mayoría de los problemas en la resistencia de materiales se considera al cuerpo absolutamente elástico. En realidad, en el cuerpo real, en cierta medida, se manifiestan ciertas desviaciones de la elasticidad absoluta. Cuando se trata de cargas grandes, estas desviaciones son tan considerables, que resulta necesario, en el esquema de análisis, atribuir al sólido otras propiedades correspondientes al nuevo tipo de deformaciones del cuerpo real.

Generalmente al cuerpo continuo se le considera *isótropo*, es decir, se admite que las propiedades de cualquier parte de éste no dependen de la orientación original angular.

Cada cristal es de por sí anisótropo. Pero si el cuerpo contiene gran cantidad de cristales orientados caóticamente, se le puede considerar isótropo. Por eso se considera que los metales, en la medida que se estudian en la resistencia de materiales , son isótropos. Existen también materiales anisótropos, como la madera que tiene distintas propiedades según la orientación de las fibras, el papel cuyas cintas tienen propiedades y resistencias distintas en el sentido longitudinal y transversal. Existe también la anisotropía relacionada con las particularidades constructivas del sólido, como por ejemplo, en el caso del enchapado y del tejido. Sin embargo, en la

resistencia de materiales se estudian principalmente los materiales isótropos.

Al escoger el esquema de cálculo se introducen ciertas simplificaciones en la propia geometría del objeto. La simplificación esencial en la resistencia de materiales consiste en la reducción de la forma geométrica del sólido a una barra o a una bóveda.

Se llama *barra* a todo cuerpo que tiene una dimensión (su longitud) mucho mayor que las otras dos. Geométricamente la barra se obtiene moviendo una figura plana a lo largo de una curva (fig. 2). Esta curva se denomina *eje de la barra*, mientras que la figura plana que tiene su centro de gravedad sobre el eje y es perpendicular a este, se denomina *sección transversal*. La barra puede tener sección constante o variable. La sección puede también girar alrededor del eje, obteniendo así la barra *retorcida*. El taladro es un ejemplo de este tipo de barras. Según sea la forma del eje, la barra puede ser recta, curva o alabeada en el espacio. El cálculo del resorte helicoidal parte del esquema de cálculo de la barra alabeada.

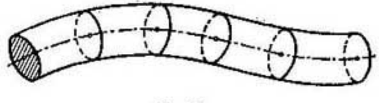


Fig. 2.

Hay muchas estructuras que pueden ser consideradas compuestas por elementos del tipo de las barras.

El segundo tipo de esquema geométrico que se emplea en la resistencia de materiales es la *bóveda*. Se entiende por bóveda todo cuerpo que tiene una dimensión (espesor) muy pequeña en comparación con las otras dos. A este esquema se reducen elementos estructurales como las paredes de los recipientes, las cúpulas de los edificios y otros. Con más detalle este tipo de esquema será estudiado en el capítulo X.

Al esquematizar los objetos reales, en la resistencia de materiales se simplifican también los sistemas de fuerzas aplicados a los elementos de las estructuras. Así aparece el concepto de fuerza *concentrada*. Por ejemplo, al calcular la barra de la figura 3, *a* se puede considerar al peso P como una fuerza concentrada en un punto (fig. 3, *c*). Tal simplificación resulta natural ya que las dimensiones del área de aplicación de la fuerza (fig. 3, *b*) son pequeñas en comparación con las dimensiones generales de la barra. Está claro que en las estructuras reales es imposible transmitir un esfuerzo por un punto y, por lo tanto, la fuerza concentrada no es más que un concepto que se admite en el esquema de cálculo.

La sustitución de cargas distribuidas por su resultante concentrada es admisible solamente cuando se analiza el trabajo de toda la barra, es decir, de volúmenes muy superiores al de la zona de contacto. Si en este ejemplo se tratase de calcular el ojal que sustenta

la carga sería inadmisible introducir el concepto de fuerza concentrada.

Los ejemplos citados no agotan los métodos posibles para escoger el esquema de cálculo. En lo adelante se hablará de otros conceptos relacionados con la esquematización del objeto real. Lo importante es que el lector, al estudiar la resistencia de materiales, no se olvide del esquema de cálculo elegido que constituye el primer paso de introducción al cálculo. Es necesario dejar bien claro que el cálculo

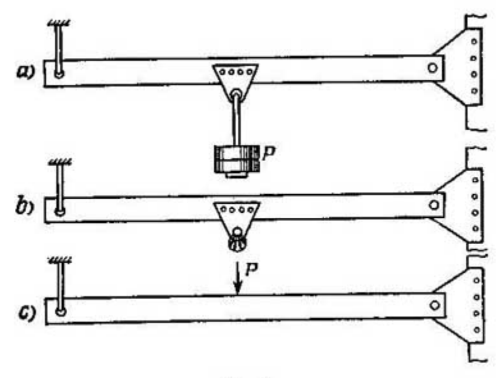


Fig. 3.

consiste no solamente en el empleo de fórmulas. Antes de encauzar el cálculo por la vía de las operaciones matemáticas resulta, con frecuencia, necesario un estudio profundo para separar en el sistema, de manera correcta, lo importante de lo secundario.

§ 3. Fuerzas exteriores e interiores

Las fuerzas miden la acción de los cuerpos entre sí. Si la estructura se considera aislada de los cuerpos que la rodean, la acción de estos últimos sobre la estructura se sustituye por fuerzas que llamaremos *exteriores*.

Las fuerzas exteriores se dividen en fuerzas de volumen y de superficie. Las primeras están distribuidas en el volumen del sólido y aplicadas a cada partícula del cuerpo. Son fuerzas de volumen el peso propio o, por ejemplo, las fuerzas magnéticas. Las fuerzas de superficie están aplicadas a ciertas áreas de la superficie y caracterizan la acción mutua directa de contacto entre el cuerpo que se analiza y los que lo rodean.

Entre las fuerzas exteriores se encuentran no solamente las fuerzas dadas que, a menudo, se interpretan como la causa principal de la posible rotura, sino también las reacciones de las ligaduras que completan el sistema convirtiéndolo en un sistema equilibrado. Por ejemplo, en el caso de la grúa de la figura 4, *a* pueden considerarse como fuerzas exteriores el peso P de la carga que se levanta y el peso propio de la estructura. Determinando las reacciones de los apoyos R_1 y R_2 establecemos el sistema equilibrado de fuerzas indicado en la figura 4, *b* y denominado comúnmente *carga*.

Las fuerzas exteriores, su magnitud y el tipo de distribución dependen, ante todo, de los límites del objeto en estudio y de los que le rodean. Si por ejemplo, en el caso de la grúa en cuestión incluimos en el esquema de cálculo el cable, la plataforma de carga y los carriles con las traviesas, entonces el sistema de fuerzas exteriores será otro (fig. 4, *c*). En el primer caso las reacciones de apoyos se determinaron con ecuaciones de la estática, en el segundo, su determinación requiere otro método, ya que el número de incógnitas R'_1, R'_2, . . ., R'_n es superior al de las ecuaciones de equilibrio. Estos sistemas se llaman sistemas ***hiperestáticos***. Más adelante analizaremos esta cuestión con más detalle.

Como vemos, la interacción del cuerpo en cuestión con los que lo rodean y que se encuentran *fuera* de los límites convencionales fijados del mismo se caracterizan por las fuerzas calificadas como fuerzas exteriores.

La interacción entre las partes del cuerpo que se estudia, *dentro* de los límites fijados, se caracteriza por las *fuerzas interiores*. En el caso de la grúa, las fuerzas R_1 y R_2 de interacción entre las ruedas y los railes (fig. 4, *b*) son exteriores. Al ampliar los límites del sistema (fig. 4, *c*) estas fuerzas pasaron a ser interiores.

Las fuerzas interiores surgen, no sólo entre los distintos elementos de la estructura que actúan mutuamente entre sí, sino también entre todas las partículas contiguas del cuerpo sometido a la acción de una carga.

Supongamos un cuerpo en forma de barra (fig. 5, *a*), solicitado por una carga, es decir, por un sistema de fuerzas exteriores P_1, P_2, . . ., P_n que se encuentra en equilibrio. Las fuerzas interiores que surgen en la barra se manifiestan solamente si se secciona mentalmente la barra en dos partes, por ejemplo, mediante la sección A. Este método de manifestación de las fuerzas interiores se denomina en la resistencia de materiales *método de las secciones*. Puesto que se eliminan las ligaduras entre las partes, surge la necesidad de sustituir la acción de la parte derecha sobre la izquierda y viceversa por un sistema de fuerzas que actúa sobre la sección, es decir, surge la necesidad de introducir el sistema de fuerzas interiores (P_A) (fig. 5,*b*).

Así pues, las fuerzas interiores determinan la interacción entre las partículas del sólido que se encuentran a los dos lados de la sec-

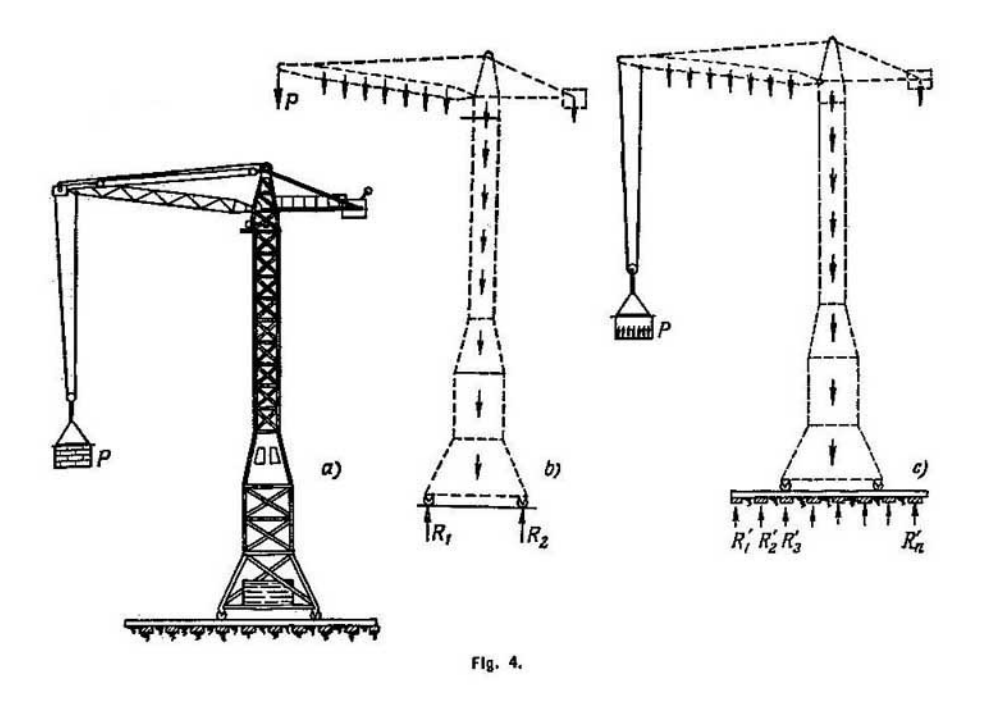


Fig. 4.

ción trazada mentalmente. Está claro, que las fuerzas interiores dependen del lugar de la sección.

Según el principio de acción y reacción estas fuerzas interiores siempre son recíprocas. La parte derecha de la barra actúa sobre la izquierda de la misma manera que la izquierda sobre la derecha y el sistema de fuerzas que aparece en el plano A' es de signo contrario al sistema que actúa sobre el plano A'' (fig. 5, *b*).

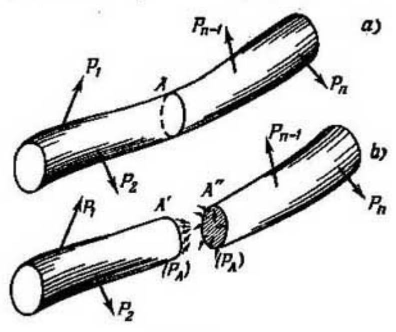


Fig. 5.

Claro está que las fuerzas interiores están distribuidas de una manera compleja en el plano de la sección, pero, en todos los casos, tienen que ser tales que se cumplan las condiciones de equilibrio de las dos partes de la barra por separado. Simbólicamente esta condición puede ser escrita así,

$$(P_n)_{iz} + (P_A) = 0,$$

o también

$$-(P_A) + (P_n)_d = 0,$$

donde $(P'_n)_{iz}$ y $(P_n)_d$ son la suma de las fuerzas exteriores o la suma de los momentos para la parte de la barra situada a la derecha o a la izquierda de la sección. Lo mismo se entiende por (P_A), pero referido a las fuerzas interiores de la sección.

La primera ecuación escrita de manera simbólica equivale a las seis ecuaciones de equilibrio de la parte izquierda de la barra y la segunda, a las seis correspondientes a la parte derecha.

Puesto que el conjunto de fuerzas exteriores satisface las condiciones de equilibrio,

$$(P_n)_{iz} + (P_n)_d = 0,$$

las ecuaciones planteadas anteriormente se convierten en identidadas. Esto quiere decir, que la resultante de las fuerzas interiores (P_A)

en la sección A se puede obtener de la ecuación de equilibrio tanto de la parte derecha como de la parte izquierda del cuerpo seccionado.

Las fuerzas interiores deben distribuirse en la sección de tal manera que las superficies deformadas de la sección A, al juntar las dos partes, coincidan. Esta condición en la resistencia de materiales y en la teoría de la elasticidad se denomina condición de *continuidad de las deformaciones*. Se puede demostrar que existe, y es único, el sistema de fuerzas interiores que satisface las condiciones de equilibrio, así como las de continuidad, aunque puedan existir ciertas exclusiones de esta regla en algunos casos.

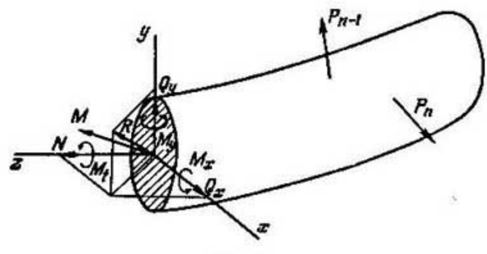


Fig. 6.

Volviendo a las condiciones de equilibrio, es evidente que ellas sólo permiten determinar las resultantes y no la ley de distribución de las fuerzas interiores siempre y cuando sean conocidas todas las fuerzas exteriores.

Traslademos, según los principios de la estática, el sistema de fuerzas interiores al centro de gravedad de la sección. Obtendremos entonces el vector principal $\overline{R}$ y el momento principal $\overline{M}$ (fig. 6). Escojamos el sistema de coordenadas x, y, z, orientando el eje z según la normal a la sección y situando x e y en el plano de la sección. Al proyectar el vector principal y el momento principal sobre los ejes x, y, z obtendremos seis componentes: tres fuerzas y tres momentos. Estas componentes se denominan *factores de fuerza interiores en la sección de la barra*.

La componente de las fuerzas interiores orientada según la normal a la sección (N) se denomina *fuerza normal* o *longitudinal* de la sección. Las fuerzas Q_x y Q_y se denominan *fuerzas cortantes*. El momento respecto al eje normal (M_t) se denomina *momento torsor* y los momentos M_x y M_y, *momentos flectores* respecto a los ejes x e y. Conociendo las fuerzas exteriores, se pueden determinar los seis factores de fuerza interiores por medio de las seis ecuaciones de equilibrio de una de las partes de la barra.

De la misma manera se clasifican los tipos de solicitaciones de la barra. Si en las secciones de cierto tramo de la barra surge solamente la fuerza normal N mientras que el resto de las fuerzas interiores es igual a cero, entonces en este tramo, se produce *tracción* o *compresión* según sea la dirección de la fuerza N. Si en la sección transversal surge solamente el momento M_t, la barra en este tramo trabaja exclusivamente a *torsión*. Y por último, cuando las fuerzas exteriores están aplicadas de manera tal que en las secciones transversales aparece solamente un momento flector M_x (o M_y) tiene

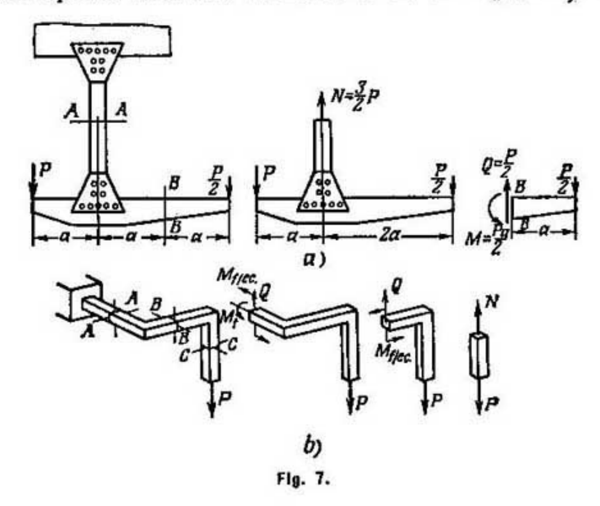


Fig. 7.

lugar lo que se llama *flexión pura* en el plano yz (o xz). Generalmente, en la sección transversal, el momento flector (por ejemplo, M_x) va acompañado de una fuerza cortante Q_y. Este caso se denomina *flexión transversal* (en el plano yz). Son posibles los casos de solicitación cuando la barra trabaja a torsión y flexión o tracción simultáneas.

Para determinar si una barra trabaja a torsión, tracción o flexión es necesario aplicar el método de las secciones. Así, por ejemplo, al seccionar la barra de la figura 7, *a* por AA, de las condiciones de equilibrio de la parte separada determinamos que en esta sección aparece solamente una fuerza normal $N=\frac{3}{2}P$. Por lo tanto aquí tiene lugar tracción. En la sección BB de la misma barra aparece una fuerza cortante $Q=\frac{P}{2}$ y un momento flector $M=\frac{Pa}{2}$. Así

pues, llegamos a la conclusión de que el tramo horizontal de la barra trabaja a flexión. Para las secciones AA, BB y CC de la barra de la figura 7, *b* obtenemos respectivamente flexión transversal con torsión, flexión transversal y tracción.

§ 4. Tensiones

Para caracterizar la ley de distribución de las fuerzas interiores en la sección, es necesario introducir el concepto de medida de su intensidad. Esta medida se llama *tensión.*

Veamos la sección A de cierto cuerpo (fig. 8). En el entorno del punto K escogemos el área elemental ΔF dentro de la cual fue determinada la fuerza interior ΔR. Se entiende por tensión media en el

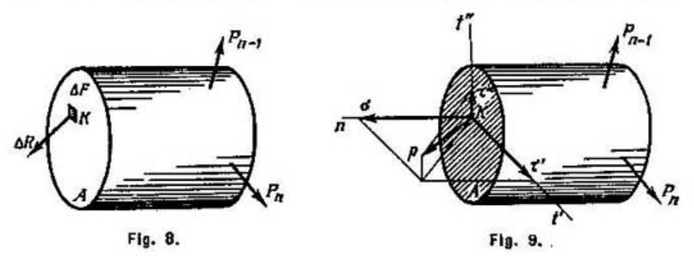


Fig. 8. Fig. 9.

área ΔF la fracción.

$$\frac{\Delta R}{\Delta F} = p_m.$$

Reducimos ΔF hacia el punto K. Puesto que el material es continuo, es posible el paso al límite cuando $\Delta F \to 0$. Como límite obtenemos

$$\lim_{\Delta F \to 0} = \frac{\Delta R}{\Delta F} = p.$$

La magnitud vectorial p se llama *tensión completa* en el punto K de la sección A. La tensión se mide en unidades de fuerza por unidad de área. En la técnica, las tensiones se miden generalmente en kilogramos por centímetro cuadrado o por milímetro cuadrado *).

La tensión completa p se puede descomponer en tres componentes, según la normal al plano de la sección y según los dos ejes situados en el plano de la sección (fig. 9). La proyección del vector de la tensión completa sobre la normal se anota por σ y se denomina *tensión normal.*

*) Ahora se recomienda como preferible el sistema de unidades SI, en el cual la tensión se mide en newtones por metro cuadrado. Así, por ejemplo, la tensión $\sigma = 40$ kgf/mm² en este sistema será 392 400 000 N/m².

Las componentes situadas en el plano de la sección se denominan *tensiones tangenciales* y se anotan por τ. Según sea la orientación y notación de los ejes, σ y τ van acompañados de un sistema de subíndices que serán detallados en adelante.

Si trazamos por el punto K del sólido otra sección, la tensión p no coincidirá ya con la anterior. El conjunto de tensiones en distintos planos que pasan por el punto, forma el *estado tensional* del punto.

El estado tensional, como veremos más adelante, se determina por seis magnitudes numéricas y constituye en la resistencia de materiales uno de los conceptos más importantes. Será estudiado detalladamente en el capítulo VII. Al principio del curso se analizan los casos particulares más simples y frecuentes del estado tensional.

§ 5. Desplazamientos y deformaciones

Todos los materiales no son absolutamente rígidos, sino que bajo la acción de las fuerzas exteriores, dentro de ciertos límites, cambian su forma (se deforman). Esto influye notablemente sobre las leyes de distribución de las fuerzas interiores en el sólido tensionado, aunque las deformaciones son generalmente insignificantes y sólo se pueden apreciar en la mayoría de los casos empleando instrumentos muy sensibles.

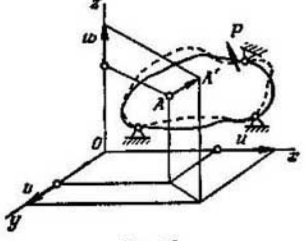


Fig. 10.

Los diferentes puntos del sólido cambian su posición en el espacio bajo la acción de las fuerzas exteriores. El vector con origen en el punto del cuerpo sin deformar y su extremo en el mismo punto del cuerpo deformado, se denomina vector del *desplazamiento completo del punto*. Sus proyecciones sobre los ejes se denominan *desplazamientos en dirección de los ejes*. Se anotan por u, v y w según los ejes x, y y z (fig. 10). Además de los desplazamientos lineales se puede introducir también el concepto de *desplazamiento angular*. Si analizamos el segmento de la recta que une dos puntos cercanos, antes y después de la deformación del sólido, se advertirá fácilmente que la recta gira en el espacio cierto ángulo. Este ángulo de giro también se caracteriza por un vector que puede ser descompuesto según los ejes x, y y z.

Si un sistema de cuerpos cuenta con ligaduras en cantidad suficiente para eliminar su desplazamiento en el espacio como un sólido rígido se dice que el sistema es *cinemáticamente invariable*. Este tipo de sistemas es el que generalmente se estudia en la resisten-

cia de materiales. En caso contrario, de los desplazamientos de todos los puntos se deben restar aquellos desplazamientos que corresponden al movimiento del sólido interpretado como un cuerpo rígido y mantener la componente propia del sólido deformable. En este caso, en la inmensa mayoría de sistemas, los desplazamientos u, v y w de cualquier punto serán pequeños en comparación con las dimensiones geométricas generales del sólido.

Teniendo esto en cuenta, en la resistencia de materiales, al analizar las fuerzas interiores, se introducen simplificaciones de carácter fundamental. Una de ellas es el *principio de las dimensiones iniciales*, según el cual, al plantear las ecuaciones de la estática (ecuaciones de equilibrio) el sólido se considera indeformable, es decir, que sus dimensiones geométricas son iguales a las que tenía antes de aplicar las cargas exteriores.

Así, por ejemplo, si se aplica una fuerza P al punto A del sistema representado en la figura 11, *a*, el cable AB se alarga, mientras

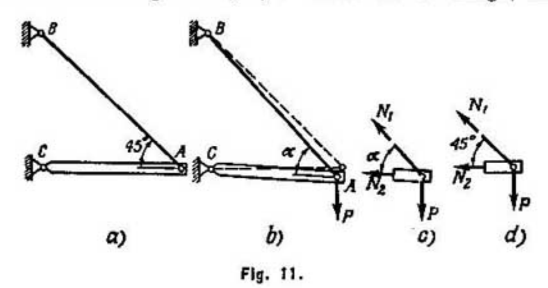


Fig. 11.

que la barra AC se acorta y todo el sistema en general, se deforma (fig. 11, *b*). Para la determinación de las fuerzas interiores en el cable y en la barra mediante el método de las secciones, se plantean las ecuaciones de equilibrio del nudo A deformado (fig. 11, *c*). Surge entonces cierta dificultad puesto que las nuevas dimensiones geométricas del sistema permanecerán desconocidas hasta que no se determinen las fuerzas interiores que, a su vez, dependen de las dimensiones geométricas. Cuando los desplazamientos son pequeños esto no tiene importancia, puesto que el sistema deformado se diferencia poco del original. En este caso, de acuerdo con el principio de las dimensiones iniciales, se plantean las ecuaciones de equilibrio para el nudo sin deformar (fig. 11, *d*) y entonces

$$N_1 = P\sqrt{2}; \quad N_2 = -P.$$

Claro está que este principio no es aplicable al caso de deformaciones grandes. Al mismo tiempo, como excepción de la regla general,

el principio de las dimensiones iniciales puede no ser aplicable aún, tratándose de deformaciones pequeñas, si ello implica un cambio considerable de la forma original. Por ejemplo, en el caso de dos barras colineales articuladas, las condiciones de equilibrio del nudo A (fig. 12) deberán ser planteadas, teniendo en cuenta el ángulo de inclinación α debido al alargamiento de las barras.

Este tipo de sitemas son mecanismos instantáneos, lo que demuestra que en cierto momento el sistema resulta cinemáticamente variable, es decir, los elementos admiten desplazamientos no acompañados de deformaciones. En este caso la variabilidad cinemática

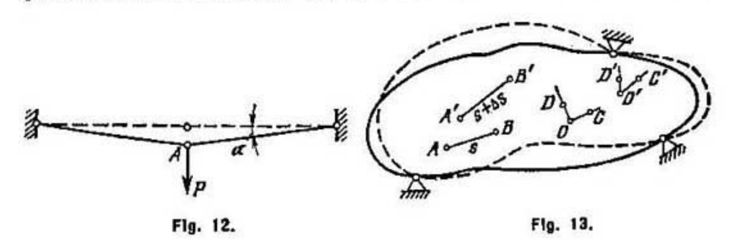


Fig. 12. Fig. 13.

tiene lugar en las proximidades de la posición original cuando las tres articulaciones se encuentran sobre una misma recta. El mecanismo común se diferencia del instantáneo por ser cinemáticamente variable independientemente de la disposición mutua de sus elementos.

Para expresar cuantitativamente la intensidad de los cambios de forma y dimensiones, consideremos los puntos A y B del sólido sin deformar, situados uno del otro a una distancia s (fig. 13). Supongamos que como resultado de la variación de la forma del sólido esta distancia aumentó en Δs. La razón entre el incremento de la longitud del segmento Δs y su longitud original se denomina alargamiento medio en el segmento s,

$$\frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_m.$$

Disminuimos el tramo s, acercando el punto B al punto A. Como límite obtendremos,

$$\lim_{s \to 0} \frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{AB}.$$

La magnitud ε_{AB} se denomina *deformación lineal* (o simplemente *deformación*) en el punto A y en la dirección AB. En este mismo punto, pero en otra dirección, la deformación será, en el caso general, diferente. Si se trata de las deformaciones en la dirección de los ejes de coordenadas x, y y z, se introducen los subíndices correspondientes en las notaciones de ε, obteniendo ε_x, ε_y y ε_z.

Es necesario subrayar que el término «deformación» tiene un doble sentido. Generalmente se llama deformación a cualquier cambio de forma sin una valoración cuantitativa. En la resistencia de materiales y en la teoría de la elasticidad la deformación tiene la definición rigurosa dada anteriormente, y se refleja como la magnitud cuantitativa que caracteriza la variación de las dimensiones geométricas en la vecindad del punto. La deformación se mide en unidades adimensionales, o en por cientos de Δs con relación a s. Puesto que la forma del sólido varía muy poco, las deformaciones son pequeñas. En los cuerpos elásticos estas deformaciones son del orden de las milésimas.

Se puede introducir también el concepto de *deformación angular*. Consideremos en el sólido sin deformar un ángulo recto formado por las rectas OD y OC (fig. 13). Después de aplicar la carga exterior, este ángulo variará y será igual a $C'O'D'$. Disminuímos los segmentos OC y OD, aproximando los puntos C y D al punto O y manteniendo el ángulo COD recto. Entonces, en el límite, la diferencia de los ángulos COD y $C'O'D'$ será,

$$\lim_{\substack{OC \to 0 \\ OD \to 0}} (\widehat{COD} - \widehat{C'O'D'}) = \gamma_{COD}.$$

La magnitud γ_{COD} se denomina *deformación angular* o *ángulo de distorsión* en el punto O del plano COD. Las deformaciones angulares que aparecen en los planos del sistema de coordenadas se denotarán por γ_{yz}, γ_{zx} y γ_{xy}.

El conjunto de las deformaciones lineales y angulares en distintas direcciones y planos, correspondientes a un mismo punto, forma el *estado deformacional* del punto. El estado deformacional, al igual que el estado tensional, está determinado por seis magnitudes numéricas. Con más detalle esta cuestión se estudiará en el capítulo VII.

§ 6. Ley de Hooke y principio de superposición de las fuerzas

Numerosas observaciones del comportamiento de los sólidos demuestran que, en la inmensa mayoría de los casos, los *desplazamientos, dentro de ciertos límites, son proporcionales a las cargas que actúan.*

Esta ley fue expuesta por primera vez en el año 1676 por Hooke al afirmar: «según es la fuerza así será la deformación». Esta ley se llama *ley de Hooke.*

Si analizamos el desplazamiento de un punto arbitrario A (fig. 10) en cierta dirección, por ejemplo, en la dirección del eje x, obtendremos,

$$u_A = \delta_x P, \tag{0.1}$$

siendo P la fuerza que origina el desplazamiento u_A y δ_x, el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento.

Es obvio que este coeficiente depende tanto de las propiedades físicas del material como de la posición relativa del punto A y el punto de aplicación de la fuerza, y en general, de las particularidades geométricas del sistema.

La expresión (0.1) representa pues la ley de Hooke *para el sistema.*

La interpretación moderna de la ley de Hooke establece la dependencia lineal entre la tensión y la deformación, y no la dependencia entre la fuerza y el desplazamiento. Estas dependencias lineales son propias del estado del material *en un punto.*

Los coeficientes de proporcionalidad son, en este caso, constantes físicas del material y no tienen relación con las propiedades geométricas del sistema como tal. Es decir, la ley expresa las propiedades del propio material. Basándose en esta interpretación de la ley de Hooke, se pueden obtener relaciones del tipo (0.1) entre los desplazamientos y las fuerzas para distintos sistemas concretos. Las constantes físicas del material se introducirán en capítulos posteriores, al analizar casos definidos de estados tensionales y deformacionales. La interpretación general de la ley de Hooke se formulará en el capítulo VII. Por ahora, para establecer las propiedades principales de los cuerpos tensionados, nos limitaremos al estudio de la relación (0.1) que es típica para la inmensa mayoría de los sistemas.

Es necesario advertir, que la dependencia lineal admitida entre los desplazamientos y las fuerzas se mantiene tanto al aumentar la carga como durante su disminución y supone, de por sí, que el sistema es elástico. Esto mismo lo confirman los ensayos que demuestran que en el caso de relación lineal, el sólido recobra completamente sus dimensiones originales y su forma una vez retirada la carga exterior.

Los sistemas en los que se cumple la condición de proporcionalidad entre los desplazamientos y las cargas exteriores admiten el principio de *superposición* o de *independencia de acción de las fuerzas.* De acuerdo con este principio, los desplazamientos y las fuerzas interiores que surgen en el cuerpo elástico se consideran independientes del orden de aplicación de las fuerzas exteriores. Es decir, si en un sistema están aplicadas varias fuerzas, se pueden determinar las fuerzas interiores, las tensiones, los desplazamientos y las deformaciones de cada fuerza por separado y sumar después los resultados correspondientes a cada fuerza, obteniendo así el resultado de la acción de todas las fuerzas.

Supongamos que a cierto sistema se le aplica la fuerza P_1. El desplazamiento que esta fuerza origina en el punto A y en dirección, por ejemplo, del eje x, será según la expresión (0.1)

$$u_{A_1} = \delta_{x_1} P_1. \qquad (0.2)$$

Supongamos ahora que se retira la fuerza P_1 y en su lugar, pero en otro punto del sólido elástico, se aplica la fuerza P_2. El desplazamiento obtenido, originado por esta fuerza en el punto A, será,

$$u_{A_2} + \delta_{x_2} P_2. \tag{0.3}$$

Los coeficientes de proporcionalidad δ_{x_1} y δ_{x_2} serán, claro está, diferentes, puesto que las fuerzas P_1 y P_2 están aplicadas en distintos puntos del sólido.

Veamos ahora la acción simultánea de estas dos fuerzas P_1 y P_2. Apliquemos al cuerpo elástico primero la fuerza P_1 y después, sin retirar la primera, la fuerza P_2. Entonces, el desplazamiento del punto A será:

$$u_A = \delta_{x_1} P_1 + \delta'_{x_2} P_2. \tag{0.4}$$

El coeficiente δ_{x_1} será el mismo que en la fórmula (0.2), ya que la fuerza P_1 se aplicó al sistema sin carga. El coeficiente δ'_{x_2} se diferencia del de la fórmula (0.3), puesto que la fuerza P_2 se aplicó, no al sistema libre, sino al sistema solicitado por la fuerza P_1.

Si admitimos que los coeficientes δ'_{x_2} y δ_{x_2} son diferentes, deberemos admitir también que δ'_{x_2} depende de la fuerza P_1, lo que contradice a la suposición fundamental sobre la dependencia lineal de los desplazamientos de las cargas exteriores. Es decir, que δ'_{x_2} no depende de las fuerzas. La expresión (0.4) para $P_1=0$ deberá coincidir con (0.3), es decir, que $\delta'_{x_2}=\delta_{x_2}$ y, por lo tanto,

$$u_A = \delta_{x_1} P_1 + \delta_{x_2} P_2. \tag{0.5}$$

Es decir, el desplazamiento se determina como la suma de los desplazamientos de las fuerzas P_1 y P_2. Si variamos el orden de aplicación de las fuerzas, se podrá, con los mismos razonamientos, llegar a la expresión (0.5). Por lo tanto, el resultado de la acción de las fuerzas no depende del orden de aplicación de ellas, lo que con facilidad se generaliza para el caso de cualquier número de fuerzas.

Así pues, el principio de superposición de las fuerzas se basa sobre la dependencia lineal entre los desplazamientos y las fuerzas y sobre la suposición, relacionada con la anterior, sobre la reversibilidad de los procesos de carga y descarga. Los sistemas para los cuales no es válido el principio del parágrafo anterior sobre las dimensiones originales, revelan dependencias no lineales entre las fuerzas y los desplazamientos y para estos sistemas es inaplicable el principio de superposición de las fuerzas (véase por ejemplo el sistema de la figura 12). Al mismo tiempo, no todos los sistemas para los que es válido el principio de las dimensiones originales, se someten al principio de superposición de las fuerzas. Si para desplazamientos pequeños, las propiedades del material son tales, que los desplazamientos no dependen linealmente de las fuerzas, entonces el sistema

sometiéndose al primer principio, no se somete al segundo. El principio de superposición de las fuerzas es básico para la solución de la mayoría de los problemas de la resistencia de materiales.

§ 7. Principios generales para el cálculo de los elementos de las estructuras

El cálculo de una estructura tiene por objeto contestar el interrogante de si se cumplen o no las condiciones de seguridad que se le exigen a la misma. Para ello, es necesario comenzar por formular los principios que sirven de base para apreciar las condiciones de suficiente seguridad. Sin esto, el análisis de una estructura concreta no tiene objeto en sí. Si, por ejemplo, en una estructura se determinan las tensiones, es necesario saber previamente para qué se hallan y qué hacer con las tensiones determinadas. De la misma manera, si se determina la configuración del sólido deformado, es necesario saber aprovechar estos datos para juzgar sobre la seguridad de la estructura. Todas estas preguntas encuentran su respuesta al escoger el *método* general *de cálculo*.

El método más difundido de cálculo de la resistencia de las piezas de las máquinas y de los elementos estructurales es *el basado en las tensiones*. Este método se basa en el criterio, según el cual la seguridad de una estructura está determinada por la tensión o, mejor dicho, por el estado tensional del punto. El cálculo, según este método se realiza de la siguiente manera.

Basándose en el análisis de la estructura, se determina el punto del sólido donde aparecen las tensiones máximas. La magnitud obtenida de la tensión se compara con la tensión límite para el material dado que, a su vez, se obtiene de los resultados de los ensayos realizados con anterioridad. Comparando las tensiones obtenidas por el cálculo con las tensiones límites se juzga sobre la resistencia de la estructura.

Este es el método que se emplea en la mayoría de los casos prácticos. Pero no se debe pensar que este método es el único posible. En toda una serie de casos otros métodos resultan más efectivos. Puede ocurrir incluso que el cálculo por tensiones resulte inadmisible, como ocurre, por ejemplo, al comprobar ciertas estructuras sometidas a grandes diferencias de temperatura (como la cáscara de un motor cohete de combustible líquido y otros).

En toda una serie de casos el concepto principal del método expuesto, según el cual las tensiones en un punto determinado se consideran como factor determinante al juzgar sobre la seguridad de toda la estructura, no siempre resulta correcto.

Veamos en calidad de ejemplo simple, para ilustrar lo dicho, una barra con ranura (fig. 14, *a*). Se puede demostrar que al traccionar dicha barra las tensiones en los puntos A situados en el vértice

de la ranura serán sensiblemente mayores que en el caso de una barra lisa traccionada por las mismas fuerzas (14, *b*). Partiendo del método de las tensiones, se deduce que la barra con ranura es menos resistente, es decir resiste menos carga que la barra lisa. Sin embargo, esto no siempre es así. Para algunos materiales como el acero de mucho carbono, el vidrio, la piedra y otros materiales semejantes, la barra con ranura resulta, en efecto, menos resistente que la barra lisa. Pero en el caso, cuando las barras son de acero de poco carbono, cobre, bronce o aluminio, la barra con ranura, inesperadamente, resiste una carga no menor sino mayor que la lisa. Así pues, las tensiones en un punto no siempre caracterizan cabalmente las condiciones de rotura de la estructura.

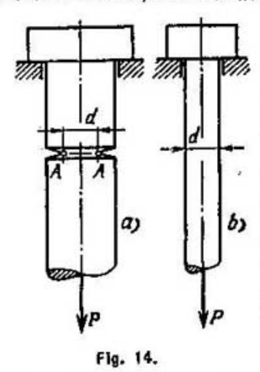


Fig. 14.

De acuerdo con lo expuesto, en algunos casos se emplea el *método de cálculo por cargas de rotura*. En este método el cálculo determina no las tensiones, sino la carga límite que puede resistir la estructura sin romperse o sin variar sensiblemente su forma. La carga límite (de rotura) se compara con la de trabajo y se llega después a las conclusiones pertinentes sobre el grado de resistencia de la estructura en las condiciones de trabajo. Este método tiene un defecto y es que la determinación de la carga de rotura es factible solamente en las estructuras más simples.

Los métodos de cálculo se escogen teniendo en cuenta las condiciones de trabajo de las estructuras y las exigencias que se plantean. Si se trata de conseguir las deformaciones mínimas de la estructura, por ejemplo, al diseñar el refractor de un foco o el sistema de espejos para un dispositivo astronómico, el cálculo se realiza por los *desplazamientos admisibles* o, como se dice, se hace el *cálculo de la rigidez*. Esto no excluye, claro está, que para este mismo sistema sea comprobada también la resistencia por las tensiones.

Aparte de estos métodos de cálculo, existen otros métodos que están relacionados con otros fenómenos de distinta naturaleza, como, por ejemplo, la estabilidad, el efecto de las cargas repetidas, solicitaciones dinámicas y otros.

El curso de resistencia de materiales no pretende dar normas fijas sobre cómo y cuándo se debe emplear cada uno de los métodos expuestos de cálculo de estructuras concretas.

La resistencia de materiales da solamente los métodos prácticamente aceptables para la solución de problemas relacionados con la determinación de las tensiones, deformaciones, desplazamientos, cargas de rotura, etc., en los elementos típicos de las estructuras. El

problema sobre el grado de seguridad de la estructura, en las condiciones dadas, se estudia principalmente en cursos tales como el curso de piezas de máquinas, curso de resistencia de aviones, curso de resistencia de barcos y otros.

Sin embargo, al estudiar la resistencia de materiales no debemos olvidarnos que la determinación de las tensiones y desplazamientos no es, de por sí, la meta, sino que después de la determinación de estas magnitudes, nos encontramos con la necesidad de emplear los resultados obtenidos, al juzgar sobre la seguridad de la estructura.

Capítulo I

TRACCION Y COMPRESION

§ 8. Fuerzas interiores y tensiones que se desarrollan en las secciones transversales de una barra en la tracción y compresión

Como se indicó en el § 3, se entiende por tracción el caso de solicitación cuando en las secciones transversales de las barras aparecen solamente fuerzas normales, mientras que el resto de las fuerzas interiores (fuerza cortante, momento torsor y momento flector) es igual a cero.

Lo más usual es el caso de tracción de una barra por fuerzas aplicadas a sus extremos. La transmisión de los esfuerzos a la barra puede ser realizada de distintas formas, como se indica en la figura 15.

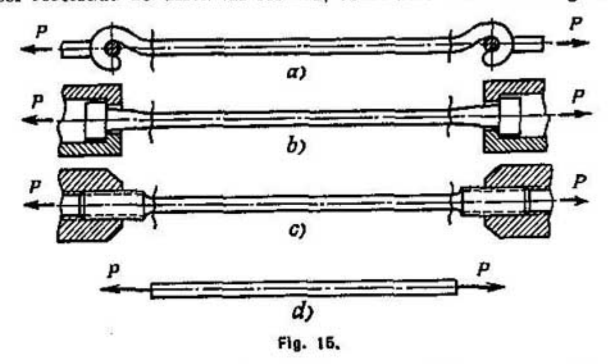


Fig. 15.

En todos los casos, sin embargo, el sistema de fuerzas exteriores se reduce a una fuerza P dirigida a lo largo del eje de la barra. Por eso, independientemente de las condiciones de sujeción de la barra traccionada, el esquema de cálculo es único, el indicado en la figura 15, *d*.

Si empleamos el método de las secciones, es evidente que en todas las secciones transversales de la barra aparecerán las mismas fuerzas normales N, iguales a P (fig. 16).

$$N = P.$$

La compresión se diferencia de la tracción, desde el punto de vista formal, por el signo de la fuerza N. En el caso de tracción la fuerza normal N va dirigida desde la sección hacia afuera, en el de compresión, hacia la sección. Así pues, al analizar las fuerzas interiores se mantiene el mismo método para la tracción y compresión.

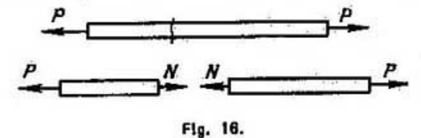


Fig. 16.

Al mismo tiempo, entre estos dos tipos de solicitación pueden apreciarse diferencias cualitativas, como, por ejemplo, al investigar los procesos de rotura de los materiales o al investigar el comportamiento de barras largas y esbeltas, cuando la compresión va acompañada generalmente de flexión.

Consideremos las tensiones que aparecen en la sección transversal de una barra traccionada. La fuerza normal N es la resultante de las fuerzas interiores en la sección (fig. 17). Es natural suponer que

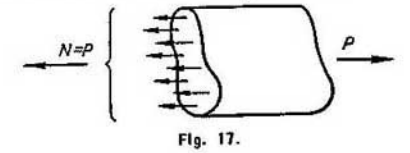


Fig. 17.

en el caso de una barra homogénea, las fuerzas interiores se distribuyen uniformemente en la sección transversal. Entonces las tensiones normales serán idénticas en todos los puntos de dicha sección.

$$\sigma = \frac{N}{F}. \tag{1.1}$$

siendo F el área de la sección transversal.

Está claro, que la suposición anterior sobre la distribución uniforme de las tensiones internas en la sección transversal, es válida siempre y cuando no se analizan las particularidades de apoyo en los extremos de la barra dada. Aquí se obra de acuerdo con el *principio de Saint Venant*, conocido científico francés del siglo pasado. El principio de Saint Venant es un principio general, pero en el caso concreto de barras se le puede formular como sigue: el modo concreto de aplicación de las fuerzas exteriores a la barra traccionada, como regla general *), influye solamente a distancias no superiores

*) Excluyendo las barras de paredes delgadas (véase cap. XI).

a las dimensiones características de la sección transversal. Esto quiere decir que al analizar una barra traccionada es suficiente tener en consideración solamente la resultante de las fuerzas exteriores P, sin interesarse por el modo concreto de aplicación de las fuerzas. Para ello es necesario prescindir de la parte de la barra situada en

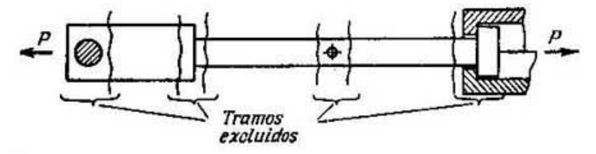


Fig. 18.

el lugar de aplicación de las fuerzas exteriores, lo que se indica en la figura 15. Ignorando las partes de la barra situadas en los extremos se obtiene el esquema de cálculo (fig. 15, *d*) único, independientemente del modo de aplicar las fuerzas exteriores.

Este razonamiento es aplicable también a los tramos especiales de la barra, donde varían bruscamente las formas geométricas de la barra. Por ejemplo, en el caso de la barra escalonada de la figura 18, se debe excluir la zona donde el diámetro varía súbitamente y las zonas vecinas al agujero. En todos los tramos restantes las tensiones en las secciones transversales se distribuyen uniformemente y se obtienen por la fórmula (1.1).

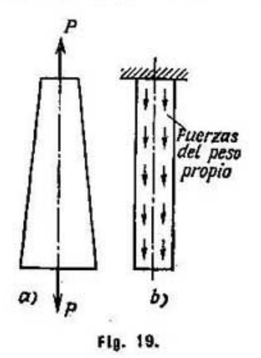


Fig. 19.

En el caso de una barra homogénea traccionada solicitada en sus extremos, las tensiones permanecen constantes tanto dentro de la sección transversal como a lo largo de la barra, es decir son constantes en todos los puntos del volumen que ocupa el sólido. Este estado tensional se denomina estado tensional *homogéneo*. En este caso todos los puntos del cuerpo se encuentran en las mismas condiciones.

El concepto de estado tensional homogéneo está relacionado con el de la continuidad del medio que ocupa el sólido. Está claro, que la distribución de las fuerzas interiores en las condiciones reales no puede ser uniforme, debido a que los cristales del metal no son homogéneos y a la composición molecular de la materia. Por eso, cuando se habla de la distribución uniforme de las fuerzas interiores en la sección, se sobreentiende la distribución en áreas muy superio-

res a las dimensiones de las secciones de los cristales, es decir, sin contar con los detalles microscópicos. Esta reserva se refiere no solamente a la tracción y compresión sino, también, a todos los casos de solicitación que serán analizados más adelante.

En el caso de tracción no siempre surge un estado tensional homogéneo. Así, por ejemplo, en el caso de la barra de sección trasversal variable (fig. 19, *a*) las tensiones varían a lo largo de la barra, resultando que el estado tensional no es homogéneo. Lo mismo ocurre cuando la barra está solicitada por su peso propio (fig. 19, *b*).

§ 9. Alargamiento de la barra y ley de Hooke

Las dimensiones de la barra traccionada varían según sea la magnitud de las fuerzas aplicadas. Si antes de aplicar la carga su longitud era l, después de aplicarla, será ya $l+\Delta l$ (fig. 20). La magnitud Δl se denomina alargamiento absoluto de la barra.

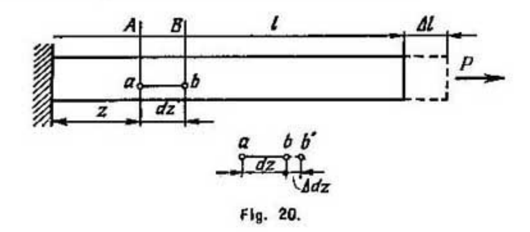


Fig. 20.

Consideraremos que el alargamiento absoluto y la deformación son consecuencias solamente de las tensiones que surgen en la barra. En realidad existen otros factores que también influyen sobre la magnitud de la deformación. Así por ejemplo, la deformación depende de la temperatura y del tiempo de duración de la carga. La magnitud de las deformaciones no elásticas depende de la «historia» de la solicitación, es decir, de la manera en que tuvieron de crecer y disminuir las fuerzas exteriores. Por ahora, no trataremos estas cuestiones.

Puesto que en la barra solicitada (fig. 20), el estado tensional es homogéneo y todos los tramos se encuentran en las mismas condiciones, la deformación ε a lo largo del eje de la barra será la misma, e igual al valor medio en la longitud l,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (1.2)$$

Esta magnitud se denomina deformación unitaria de la barra.

En el caso de que el estado tensional no fuese homogéneo, la deformación en la sección A (fig. 20) se determinaría estableciendo

el límite para el tramo pequeño dz y entonces,

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \tag{1.3}$$

Observemos, que en virtud de la distribución uniforme de las tensiones en la sección, los alargamientos de todos los tramos elementales de longitud ab (fig. 20) del segmento dz son iguales. Por lo tanto, si los extremos de los tramos se encontraban antes de la solicitación en un mismo plano, formarán después de ella, también un plano, pero desplazado a lo largo del eje de la barra. Esto puede ser admitido como base para la interpretación del mecanismo de la tracción y compresión y constituye la *hipótesis de las secciones planas* (hipótetsis de Bernoulli). Si consideramos esta hipótesis como base, entonces la distribución homogénea de las tensiones en la sección transversal se podrá deducir de ella. Cuando se trata de alargamientos pequeños, para la inmensa mayoría de los materiales es válida la ley de Hooke que establece la relación de proporcionalidad directa entre las tensiones y las deformaciones,

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{1.4}$$

E es el coeficiente de proporcionalidad denominado *módulo de elasticidad de primer género*. El módulo de elasticidad es una constante física del material que se obtiene experimentalmente y se mide en las mismas unidades que σ, es decir, en kgf/cm². El módulo de elasticidad para los materiales de mayor uso es el siguiente: (en kgf/cm²):

Acero	$E = (2,0 \div 2,1) \cdot 10^6$
Cobre	$E = 1,2 \cdot 10^6$
Latón	$E = (1,0 + 1,2) \cdot 10^6$
Aluminio y sus aleaciones con magnesio	$E = (0,7 + 0,8) \cdot 10^6$
Madera (a lo largo de las fibras)	$E = (0,08 + 0,12) \cdot 10^6$

La ley de Hooke es aproximada. En el caso de algunos materiales, como por ejemplo el acero, se cumple con gran exactitud dentro de amplios límites de variación de las tensiones. En otros casos, se observan apreciables desviaciones de la ley de Hooke. Por ejemplo, en el caso del hierro fundido y de otros materiales de construcción incluso para tensiones pequeñas, la ley de Hooke sólo puede ser admitida de manera aproximada. En los casos cuando la ley de Hooke no es válida, las deformaciones vienen dadas por medio de una función no lineal de la tensión

$$\varepsilon = f(\sigma)$$

de tal manera, que esta función corresponda a la curva que se obtiene del ensayo del material

Volviendo a la expresión (1.4) y sustituyendo en ella σ por $\frac{N}{F}$ y ε por $\frac{\Delta dz}{dz}$, obtendremos,

$$\Delta dz = \frac{N dz}{EF}.$$

El alargamiento absoluto de la barra en el tramo de longitud l será,

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EF}. \tag{1.5}$$

Cuando la barra está cargada solamente en sus extremos, la fuerza normal $N=P$ no depende de z. Si, al mismo tiempo, la barra es de sección constante F, entonces de la expresión (1.5) obtendremos,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \tag{1.6}$$

Al resolver muchos problemas prácticos surge la necesidad de considerar, no solamente los alargamientos debidos a las tensiones σ, sino también los relacionados con el cambio de temperatura. En este caso se emplea el principio de superposición, obteniendo ε como la suma de la deformación debida a la carga y la originada exclusivamente por el cambio de la temperatura,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t,$$

siendo α el coeficiente de dilatación lineal del material.

En el caso de una barra homogénea, solicitada en sus extremos y calentada uniformemente, obtendremos,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + l\alpha t. \tag{1.7}$$

Así pues, las deformaciones correspondientes a la carga y a la temperatura se consideran independientes. Esto se basa sobre el hecho establecido experimentalmente de que el módulo de elasticidad E varía muy poco cuando se trata de un calentamiento moderado, al igual que α, que prácticamente, no depende de la tensión σ. En el caso del acero esto ocurre hasta temperaturas del orden de 300 a 400° C. Para mayores temperaturas es necesario contar con la dependencia de E de t.

Veamos algunos ejemplos de determinación de las tensiones y desplazamientos en los casos más simples de tracción y compresión.

Ejemplo 1.1. Determinar la ley de distribución de las fuerzas normales, tensiones y desplazamientos a lo largo de la barra escalonada, solicitada en su extremo por la fuerza P (fig. 21, *a*), así como también las magnitudes numéricas de la máxima tensión y del desplazamiento máximo, $P=5$ tf, $F=2$ cm^2 y $l=1$ m. El material de la barra es acero para el cual $E=2\cdot 10^6$ kgf/cm^2. Puesto que la fuerza P es considerable, el peso propio de la barra no tiene importancia.

De las condiciones de equilibrio de cualquiera de las partes separadas de la barra, se deduce que la fuerza normal N en cada sección de la barra es igual a la fuerza exterior P. Construyamos el diagrama de la variación de la fuerza N a lo largo del eje de la barra. Los diagramas de manera muy clara expresan las leyes de variación de las distintas magnitudes que se examinan. En este caso, el diagrama de la fuerza normal está representado en la fig. 21, *b* por un rectángulo,

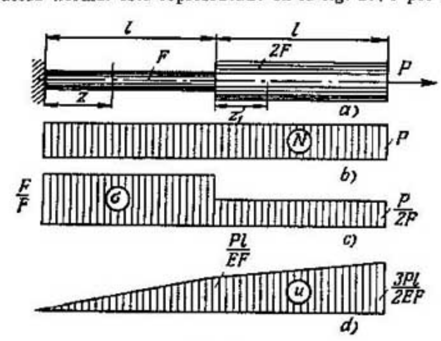


Fig. 21.

ya que $N=P=$constante. En la figura, el diagrama de N está rayado por líneas orientadas en la misma dirección en que se colocan los valores de N, es decir, verticalmente.

Para obtener el diagrama de las tensiones σ, es necesario dividir las ordenadas del diagrama de N por el área F (fig. 21, *c*). El valor máximo de σ es,

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}=\frac{5\,000}{2}=2\,500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Determinemos ahora el desplazamiento u (en cm) de cada sección de la barra, en la dirección de la fuerza P. El desplazamiento de la sección z coincide con el alargamiento del tramo de longitud z y, por lo tanto, de acuerdo con la fórmula (1.6),

$$u=\frac{Pz}{EF}.$$

Es decir, en el tramo donde z varía de cero a l, el desplazamiento u es proporcional a z (fig. 21,*d*). En el segundo tramo de la barra el desplazamiento es

$$u=\frac{Pl}{EF}+\frac{Pz_1}{2EF}.$$

La dependencia entre u y z, también será lineal. El desplazamiento máximo ocurre en la sección del extremo de la barra,

$$u_{max}=\frac{3Pl}{2EF}=\frac{3\cdot 5\,000\cdot 100}{2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2}=0,187 \text{ cm}.$$

Ejemplo 1.2. Construir el diagrama de las fuerzas normales, tensiones y desplazamientos en el caso de una barra cilíndrica colgada libremente y solicitada por las fuerzas de su peso propio (fig. 22). La longitud de la barra es l, el área de la sección transversal, F y el peso específico del material, γ.

La fuerza normal en la sección z es igual al peso de la parte de la barra que se encuentra debajo de la sección,

$$N=\gamma F z.$$

Es decir que la fuerza normal es proporcional a z. El diagrama de N en este caso se raya con líneas horizontales, puesto que las magnitudes de N se orientan horizontalmente. La tensión en la sección indicada es $\sigma=\gamma z$ (véase el diagrama de la fig. 22).

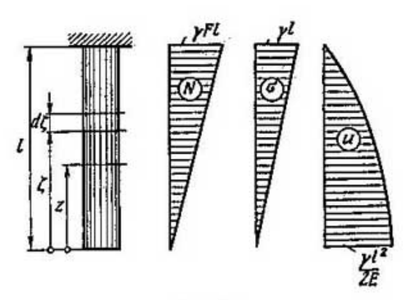


Fig. 22.

El desplazamiento u de la sección z es igual al alargamiento del tramo superior de la barra. Por la fórmula (1.5) obtendremos:

$$u=\int_z^l \frac{\gamma F\zeta d\zeta}{EF}=\frac{\gamma}{2E}(l^2-z^2).$$

Así pues, la ley de variación de u se interpreta por una función cuadrática de z. El máximo desplazamiento u_{max} ocurre en la sección del extremo inferior ($z=0$), y es

$$u_{max}=\frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Ejemplo 1.3. La columna de la figura 23 está cargada con la fuerza P y con su peso propio. Determinar la ley de variación del área de la sección transversal $F=F(z)$, de tal manera que las tensiones en todas las secciones sean las mismas e iguales a $\frac{P}{F_0}$. Constrúyase el diagrama de las fuerzas normales, tensiones y desplazamientos.

En la sección a la distancia z del borde la fuerza normal de compresión N es,

$$N=P+\gamma\int_0^z F d\zeta.$$

Según la condición del problema

$$\sigma=\frac{N}{F}=\frac{P+\gamma\int_0^z F d\zeta}{F}=\frac{P}{F_0}=\text{const},$$

donde se obtiene,

$$P+\gamma\int_0^z F d\zeta=\frac{P}{F_0}F.$$

Derivando las dos partes de la igualdad con relación a z, hallaremos que $\gamma F=\frac{P}{F_0}\frac{dF}{dz}$ o sea,

$$dz=\frac{P}{\gamma F_0}\frac{dF}{F}.$$

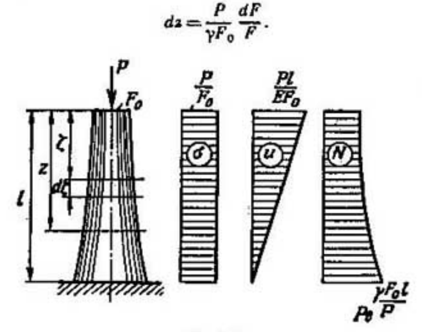


Fig. 23.

Integrando obtendremos,

$$z=\frac{P}{\gamma F_0}(\ln F-\ln C)$$

ó

$$F=Ce^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}.$$

Cuando $z=0$, $F=F_0$ y, por lo tanto, $C=F_0$, es decir, que la ley de variación de F en cuestión será,

$$F=F_0e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}.$$

Conviene comenzar la construcción de los diagramas por el de σ, que no varía a lo largo del eje de la columna (fig. 23). Puesto que la tensión es constante, será constante también el alargamiento unitario ε. Es decir, el desplazamiento u aumenta proporcionalmente a la distancia a la base de la columna.

La fuerza normal en la sección z será,

$$N=\sigma F=Pe^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}.$$

El diagrama de N está representado en la figura 23.

El problema analizado se refiere a un caso muy frecuente en la resistencia de materiales cuando se busca la condición de igualdad de resistencia. Si la tensión en cierto punto del cuerpo (en nuestro caso de la columna) es igual para todos los puntos del volumen ocupado por el cuerpo, este tipo de construcciones se llama de igual resistencia. En estas estructuras el material se aprovecha de la manera más efectiva posible.

Ejemplo 1.4. El soporte ABC tiene una carga P en su extremo (fig. 24). Determinar la sección transversal de las barras AB y BC de tal manera que las tensiones que en ellas surgen sean idénticas e iguales a σ. El ángulo α debe escogerse de la condición del peso mínimo de la construcción, para la longitud l dada del voladizo.

De la condición de equilibrio del nudo B (fig. 24) se obtienen las fuerzas normales en las barras,

$$N_1 = P \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_2 = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Determinamos ahora las áreas de las secciones transversales de las barras, dada la tensión σ,

$$F_1 = \frac{N_1}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \operatorname{ctg} \alpha;$$

Fig. 24.

$$F_2 = \frac{N_2}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

El peso de la estructura del soporte es proporcional a su volumen,

$$V = l_1 F_1 + l_2 F_2.$$

Introduciendo aquí las longitudes y las áreas de las barras, obtendremos,

$$V = \frac{Pl}{\sigma} \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \right).$$

El volumen V resulta ser mínimo cuando

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}; \quad \alpha \approx 55^\circ.$$

§ 10. Energía potencial de la deformación

Veamos el proceso de deformación del sólido elástico desde el punto de vista energético.

Las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo elástico realizan cierto trabajo, que designaremos por A. Como resultado del trabajo realizado, en el cuerpo, se acumula cierta energía potencial U del sólido deformado. Al mismo tiempo, parte del trabajo sirve para trasmitir ciertas velocidades a la masa del sólido, es decir, se transforma en energía cinética K. El balance de la energía es el siguiente:

$$A = U + K.$$

Si la carga se aplica lentamente, la velocidad del desplazamiento de las masas del cuerpo será pequeña. Este proceso de carga se denomina *estático*. El cuerpo en cada momento se encuentra en estado de equilibrio y, en este caso,

$$A = U.$$

El trabajo de las fuerzas exteriores se trasforma totalmente en energía potencial de la deformación.

Al descargar el cuerpo a cuenta de la energía potencial se realiza cierto trabajo. Es decir que el sólido elástico es un acumulador de

energía. Esta propiedad de los sólidos elásticos se aprovecha ampliamente, por ejemplo, en los resortes del mecanismo de los relojes y en diversos tipos de amortiguadores elásticos (resortes, muelles, ejes de torsión, etc.).

En la figura 25 está representada una barra traccionada. Para mayor claridad en los razonamientos, el alagramiento de la barra se representa en escala exagerada. De acuerdo con el segmento Δl, en la parte inferior, está representado el gráfico de la variación de la fuerza P.

Como en el desplazamiento Δl la fuerza P no permanece constante, el trabajo realizado al traccionar la barra tiene que ser determinado

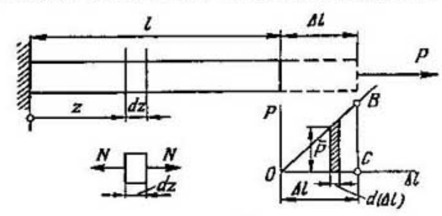


Fig. 25.

integrando sobre los tramos elementales del camino recorrido. En el desplazamiento elemental $d(\Delta l)$ el trabajo de la fuerza $\overline{P}$ será,

$$dA = \overline{P} d(\Delta l).$$

Claro está que el trabajo correspondiente al desplazamiento Δl es numéricamente igual al área del triángulo OBC, es decir,

$$A = U = \frac{1}{2} P \Delta l.$$

Así pues, el trabajo de la fuerza en el desplazamiento elástico se determina como la mitad del producto del valor máximo de la fuerza por el desplazamiento Δl. Si la relación entre la fuerza y el desplazamiento no fuera lineal, entonces en el lugar del coeficiente ½ figuraría otro coeficiente . Cuando la fuerza es constante el coeficiente se hace igual a la unidad. En adelante, al calcular el trabajo de las fuerzas exteriores, escribiremos el coeficiente ½ sin más explicaciones. Eliminando Δl de la expresión de U obtenida, hallaremos

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}. \tag{1.8}$$

Si la fuerza normal N varía a lo largo del eje de la barra entonces la energía potencial de la deformación se determinará sumando sobre todos los tramos dz (fig. 25). Para un tramo elemental se obtiene,

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EF}$$

y para toda la barra,

$$U=\int_0^l \frac{N^2dz}{2EF}. \tag{1.9}$$

Las relaciones energéticas se emplean ampliamente al determinar los desplazamientos en sistemas elásticos complicados. Los teoremas generales que a esto se refieren serán estudiados en el capítulo V.

§ 11. Sistemas estáticamente determinados (isostáticos) y estáticamente indeterminados (hiperestáticos)

En todos los casos analizados hasta ahora, las fuerzas normales en las secciones transversales de las barras se determinaban por el método de las secciones, analizando el equilibrio de la parte separada. Pero este método de determinación de las fuerzas normales y, en general, de las fuerzas interiores en la barra no siempre es posible. En la práctica, constantemente nos encontramos con sistemas con gran número de ligaduras y, para determinar las fuerzas interiores en estos sistemas, las ecuaciones de la estática son insuficientes. Estos sistemas se denominan sistemas *estáticamente indeterminados* (hiperestáticos).

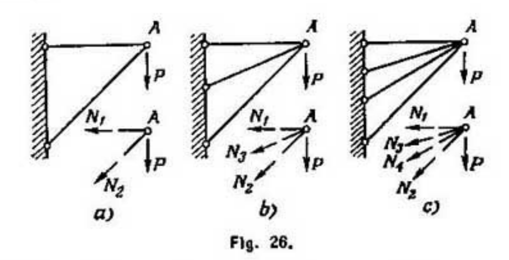


Fig. 26.

En la figura 26, *a* está representado un voladizo compuesto por dos barras. Los esfuerzos en las barras que lo constituyen se hallan sin dificultad de las condiciones de equilibrio del nudo A. Si complicamos la estructura del voladizo, agregándole una barra más (fig. 26, *b*) entonces, por el método anterior, será, imposible determinar los esfuerzos en las barras, puesto que, como antes, se pueden plantear para el nudo A solamente dos ecuaciones de la estática, mientras que el número de incógnitas es tres. En estos casos se dice que el sistema tiene un grado de hiperestaticidad. Complicando la estructura más aún, introduciendo nuevas barras, se pueden obtener sistemas de doble grado de hiperestaticidad (fig. 26, *c*), de triple grado

de hiperestaticidad, etc. En la figura 27 se dan tres sistemas más. El primero de ellos es estáticamente determinado (isostático), el segundo y el tercero, tienen respectivamente uno y dos grados de hiperestaticidad.

Se puede afirmar que el grado de hiperestaticidad del sistema es n cuando el número de ligaduras supera el número de ecuaciones independientes en n unidades. La determinación de todas las fuerzas desconocidas o, como se dice, la superación de la hiperestaticidad, resulta posible solamente planteando ecuaciones que completen el

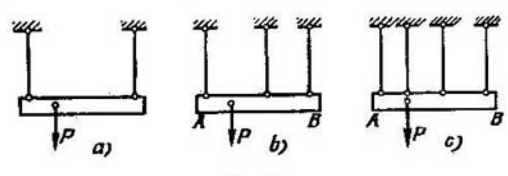


Fig. 27.

número de las ecuaciones de la estática hasta igualarlo al número de incógnitas. Estas ecuaciones adicionales reflejan las particularidades geométricas de las ligaduras impuestas a los sistemas deformables y, convencionalmente, se denominan *ecuaciones de los desplazamientos*. En el caso de los sistemas compuestos por barras de la figura 26, las ecuaciones de los desplazamientos tienen que reflejar el hecho de que el nudo A del sistema deformado tiene que ser común para todas las barras. En el ejemplo de la figura 27, las ecuaciones de los desplazamientos, cuando la barra AB es rígida, deberán indicar que todos los extremos inferiores de los tirantes, una vez cargado el sistema, se encontrarán en una misma recta.

Analicemos los principios del planteamiento de las ecuaciones de los desplazamientos en los casos más elementales de sistemas hiperestáticos.

Ejemplo 1.5. La barra homogénea de la figura 28 está empotrada en sus extremos y solicitada por la fuerza P, aplicada a un tercio de la longitud de la barra a partir del empotramiento superior. Determinar las tensiones máximas que se producen en la barra.

El sistema tiene un grado de hiperestaticidad, puesto que las dos reacciones de apoyos R_A y R_B no se pueden determinar de la única ecuación de equilibrio,

$$R_A+R_B=P.$$

La ecuación de los desplazamientos reflejará el hecho de que la longitud total de la barra no varía. El alargamiento de la parte superior será igual al acortamiento de la inferior. Por lo tanto,

$$|\Delta l_A|=|\Delta l_B|.$$

Expresando los alargamientos por las fuerzas obtendremos,

$$\frac{R_A \frac{1}{3} l}{EF} = \frac{R_B \frac{2}{3} l}{EF},$$

o sea,

$$R_A = 2R_B$$

y resolviendo esta ecuación junto con la de equilibrio, hallaremos,

$$R_A = \frac{2}{3} P; \quad R_B = \frac{1}{3} P.$$

La máxima tensión será,

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3F}.$$

Ejemplo 1.6. El sistema de tres barras de igual sección (fig. 29, *a*) está cargado con una fuerza vertical P. Determinar los esfuerzos en las barras.

Al plantear las ecuaciones de equilibrio del nudo A (fig. 29, *b*) nos basamos en el principio de invariabilidad de las dimensiones originales. Como el ángulo

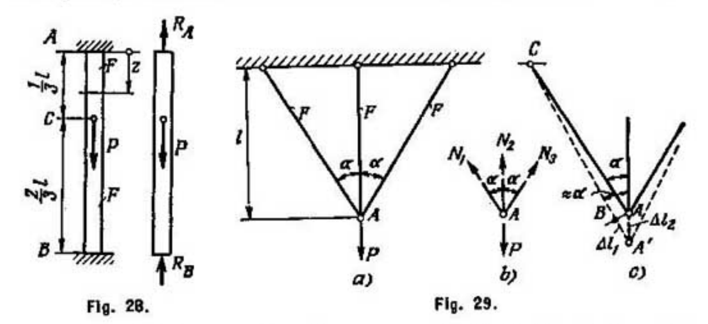


Fig. 28. Fig. 29.

α, bajo la acción de la fuerza P, varía en una magnitud insignificante, lo consideramos invariable, obteniendo así,

$$N_1 = N_3, \qquad 2N_1 \cos\alpha + N_2 = P.$$

Estas ecuaciones son insuficientes para la determinación de todas las fuerzas. Es necesario plantear una ecuación más, la de los desplazamientos. Para ello, comparamos la forma del nudo A antes de aplicar la carga y después de aplicarla (fig. 29, *c*). El segmento AA' constituye el desplazamiento vertical del nudo A, que es igual al alargamiento de la barra central,

$$AA' = \Delta l_2.$$

Trazamos por el punto A un arco circular AB con centro en el punto C. El alargamiento de la barra lateral será entonces $A'B$,

$$A'B = \Delta l_1.$$

Teniendo en cuenta que los desplazamientos son pequeños, podemos sustituir el arco AB por un segmento perpendicular a la recta $A'C$ y entonces, como el ángulo α, al alargarse las barras, varía muy poco, obtendremos,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha.$$

Esta es la ecuación de los desplazamientos que se pretendía plantear. Expresando los alargamientos por las fuerzas correspondientes hallaremos,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF \cos\alpha},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF},$$

obteniendo,

$$N_1 = N_2 \cos^2\alpha.$$

Una vez resuelta esta ecuación conjuntamente con las de equilibrio, tendremos,

$$N_1 = N_3 = \frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}, \quad N_2 = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}.$$

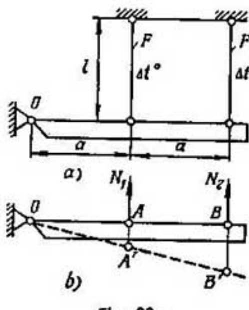


Fig. 30.

Ejemplo 1.7. La viga rígida imponderable articulada en el punto O está colgada de dos tirantes elásticos iguales (fig. 30, *a*). Determinar los esfuerzos en los tirantes, al calentarlos Δt °C.

Cortamos los tirantes e introducimos las fuerzas N_1 y N_2 (fig. 30, *b*). Igualando a cero la suma de los momentos de las fuerzas respecto a la articulación O, hallaremos

$$N_1 a + 2N_2 a = 0.$$

Supongamos ahora que, como resultado del calentamiento de los tirantes, la viga rígida gira alrededor del punto O y ocupa la posición $A'B'$ (fig. 30, *b*). De la semejanza de los triángulos OAA' y OBB', hallaremos

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

o de acuerdo con la fórmula (1.7),

$$\frac{N_2 l}{EF} + l\alpha\Delta t = 2\left(\frac{N_1 l}{EF} + l\alpha\Delta t\right),$$

es decir,

$$N_2 - 2N_1 = EF\alpha\Delta t.$$

Resolviendo esta ecuación simultáneamente con la de equilibrio obtendremos,

$$N_1 = -\frac{2}{5}EF\alpha\Delta t, \qquad N_2 = \frac{1}{5}EF\alpha\Delta t.$$

El signo negativo de N_1 indica que la primera barra no trabaja a tracción como se supuso anteriormente, sino a compresión.

Ejemplo 1.8. Durante el montaje del sistema de barras de la figura 31, *a* se observó que las longitudes de las barras no concuerdan (véase el nudo A). El montaje fue realizado forzando los extremos de las barras, articulaciones A y C. Determinar los esfuerzos en las barras después del montaje.

Tenemos cinco barras y, por lo tanto, cinco fuerzas desconocidas. Para los nudos A y B se pueden plantear cuatro ecuaciones de equilibrio, dos para cada uno. Por lo tanto, el sistema tiene un grado de hiperestaticidad.

De las condiciones de equilibrio de los nudos A y B (fig. 31, *b* y *c*) hallamos,

$$N_1 = N_2 = N_3, \quad N_4 = N_5, \quad N_3 + 2N_4\cos 30° = 0.$$

Supongamos que después del montaje, la articulación A se desplaza hacia abajo la magnitud u_A, ocupando la posición A' y que la articulación B se mueve

hacia arriba u_B (fig. 31, *d* y *c*). Entonces,

$$\Delta l_1 = u_A \operatorname{sen} 30°; \quad \Delta l_4 = -u_B \cos 30°.$$

El alargamiento de la barra media será,

$$\Delta l_3 = \Delta - u_A - u_B.$$

Eliminamos de estas expresiones u_A y u_B, obteniendo así la ecuación de los desplazamientos siguiente:

$$\Delta l_3 = \Delta - 2\Delta l_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta l_4,$$

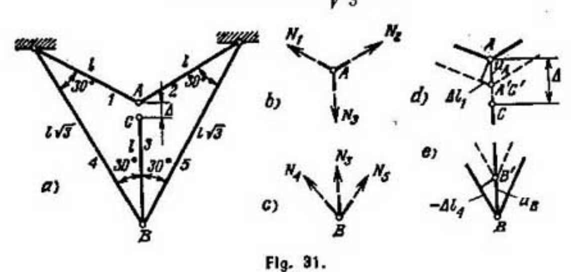


Fig. 31.

que después de expresar los alargamientos por las fuerzas será,

$$2N_1 - 2N_4 + N_3 = \frac{\Delta}{l} EF.$$

Una vez resuelta esta ecuación simultáneamente con las de la estática hallaremos:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}} \frac{\Delta}{l} EF, \qquad N_4 = N_5 = -\frac{1}{2+3\sqrt{3}} \frac{\Delta}{l} EF.$$

Los ejemplos analizados permiten formar un juicio suficiente sobre los métodos que se emplean para vencer la hiperestaticidad. La asimilación cabal de estos métodos se puede conseguir, resolviendo suficiente cantidad de problemas.

Otro método más general de cálculo de sistemas hiperestáticos se analizará más adelante, en el capítulo VI.

§ 12. Estado tensional y de deformación en el caso de tracción y compresión

Analicemos con más detalle las particularidades del estado tensional que aparece en una barra homogénea traccionada. Veamos primeramente las tensiones que aparecen en cierto plano inclinado que forma un ángulo α con el plano de la sección normal (fig. 32). La tensión completa p en este plano es, según la condición de homogeneidad de los estados tensionales de todos los puntos, igual en todos estos puntos. La resultante de las fuerzas interiores en la sec-

ción deberá estar dirigida según el eje de la barra y ser igual a la fuerza traccionante σF, es decir,

$$pF_\alpha = \sigma F,$$

siendo F_α el área de la sección inclinada,

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos\alpha}$$

Así pues, la tensión completa en el plano inclinado es,

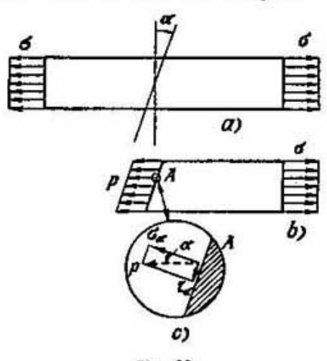


Fig. 32.

$$p = \sigma\cos\alpha.$$

Una vez descompuesta esta tensión según la normal y la tangente al plano inclinado (fig. 32, c) odtendremos,

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha, \quad \tau_\alpha = p\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

o sea,

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha, \qquad (1.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{sen}\,2\alpha. \qquad (1.11)$$

Como podemos observar, en un mismo punto del sólido la magnitud de las tensiones que surgen en las secciones depende de la orientación del plano.

Cuando $\alpha=0$ las fórmulas (1.10) y (1.11) dan las tensiones en la sección transversal,

$$\sigma_\alpha = \sigma; \quad \tau_\alpha = 0.$$

Cuando $\alpha=90°$, es decir, en los planos longitudinales, $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$. Esto indica que las capas longitudinales de la barra traccionada no actúan entre sí en los planos laterales. En este sentido, la tracción de la barra es similar a la tracción de un haz de hilos paralelos sin relación entre sí.

La tensión tangencial τ_α adquiere su valor máximo en el plano inclinado 45° respecto al eje de la barra traccionada,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}.$$

Es importante observar, que el paso del plano arbitrario (α) al de inclinación ($\alpha + 90°$) no afecta al valor absoluto de la tensión tangencial τ_α. En efecto,

$$\left|\frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{sen}\,2\alpha\right| = \left|\frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{sen}\,2(\alpha + 90°)\right|,$$

y, por lo tanto, las tensiones tangenciales en dos planos ortogonales son iguales (sin tener por ahora en consideración los signos de las

tensiones tangenciales). Esta condición es una propiedad general de cualquier estado tensional y se denomina ley de *reciprocidad de las tensiones tangenciales*. A esta regla se le puede dar una interpretación muy ilustrativa. Si separamos de la barra traccionada el elemento rectangular $ABCD$ (fig. 33, a) será fácil observar que, *independientemente* del valor de las tensiones normales σ' y σ'', las tensiones tangenciales τ' y τ'' deberán ser de tal magnitud y tener orientación tal que los momentos de los pares de estas tensiones

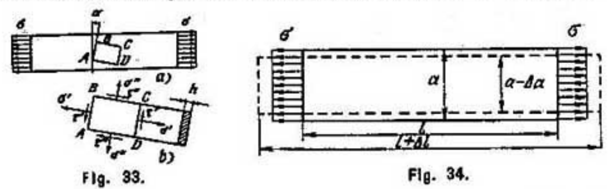


Fig. 33. Fig. 34.

se anulen mutuamente (fig. 33, b). Para un elemento arbitrario de espesor h es evidente que,

$$\tau' ABh AD = \tau'' ADh AB,$$

ó

$$\tau' = \tau''.$$

Al mismo tiempo, como se ve de la figura 33, b, los vectores de las tensiones tangenciales en dos planos perpendiculares entre sí van dirigidos, o los dos a una misma arista (aristas A y C), o los dos se alejan de la arista común (B y D).

La ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales en el caso más general de un estado tensional complejo se analizará otra vez en el capítulo VII (§ 50).

Analicemos ahora las deformaciones de la barra traccionada. Los ensayos demuestran que (dentro de ciertos límites) el alargamiento de la barra en la dirección longitudinal va acompañado de un estrechamiento proporcional transversal de la barra (fig. 34). Si designamos por,

$$\varepsilon_{long} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{trans} = \frac{\Delta a}{a},$$

entonces como demuestran los ensayos,

$$\varepsilon_{trans} = \mu \varepsilon_{long}, \tag{1.12}$$

siendo μ, el coeficiente adimensional de proporcionalidad denominado coeficiente de Poisson. La magnitud μ caracteriza las propiedades del material y se determina experimentalmente. Para todos los materiales los valores de μ se encuentran entre 0,25 y 0,35. En adelante, en el capítulo VII, se demostrará que en el caso de un material isótropo, μ, en general, no puede ser mayor que 0,5.

Al traccionar la barra aparecen no solamente deformaciones lineales, sino también angulares. Para determinarlas, analicemos el ángulo BAC (fig. 35, *a*) formado por los segmentos AB y AC. Al traccionar la barra, los puntos A, B y C se desplazan, ocupando la posición A', B', C' (fig. 35, *b*). El ángulo $B'A'C'$, en el caso general, dejará de ser recto. La diferencia entre los ángulos BAC y $B'A'C'$,

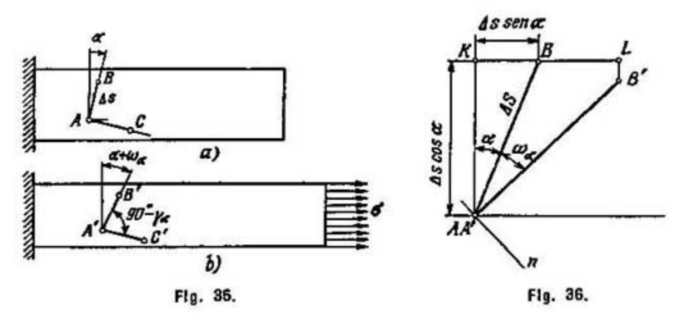


Fig. 35. Fig. 36.

como sabemos, se denomina deformación angular o ángulo de distorsión. Designémoslo por γ_α,

$$\gamma_\alpha = \angle BAC - \angle B'A'C'.$$

Calculemos primeramente el ángulo ω_α de giro del segmento AB al traccionar la barra. Para ello hacemos coincidir los puntos A y A' y analizamos la posición mutua de los segmentos AB y $A'B'$ (fig. 36). En este mismo dibujo señalamos los puntos auxiliares K y L y la recta n perpendicular al segmento $A'B'$.

El alargamiento unitario longitudinal y el acortamiento transversal, como se deduce de la figura 36, son

$$\varepsilon_{\text{long}} = \frac{BL}{KB}, \quad \varepsilon_{\text{trans}} = \frac{LB'}{AK},$$

de donde se obtiene,

$$BL = \varepsilon_{\text{long}} \Delta s \operatorname{sen} \alpha, \quad LB' = \varepsilon_{\text{trans}} \Delta s \cos \alpha$$

o, de acuerdo con las expresiones (1.4) y (1.12),

$$BL = \frac{\sigma}{E} \Delta s \operatorname{sen} \alpha, \quad LB' = \mu \frac{\sigma}{E} \Delta s \cos \alpha.$$

Para determinar el ángulo de giro ω_α, proyectamos la línea quebrada $BLB'A'$ sobre el eje n, obteniendo

$$\Delta s \operatorname{sen} \omega_\alpha = BL \cos \alpha + LB' \operatorname{sen} \alpha$$

o, teniendo en cuenta que el ángulo ω_α es pequeño,

$$\omega_\alpha = \frac{BL \cos \alpha + LB' \operatorname{sen} \alpha}{\Delta s}.$$

Introduciendo las expresiones de los segmentos BL y LB' hallaremos,

$$\omega_\alpha = \frac{\sigma}{E}(1+\mu)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Variando el ángulo α en 90°, obtendremos el ángulo de giro del segmento AC,

$$\omega_{\alpha+90^\circ} = -\frac{\sigma}{E}(1+\mu)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

La deformación angular (ángulo de distorsión) se determina como la diferencia de los ángulos de giro de los segmentos y, por lo tanto,

$$\gamma_\alpha = \omega_\alpha - \omega_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma}{E}(1+\mu)\operatorname{sen}2\alpha.$$

Comparando la expresión de γ_α con la (1.11) que fue obtenida para la tensión τ_α, vemos que el ángulo de distorsión entre los planos AB y AC es proporcional a la tensión tangencial que aparece en estos mismos planos, es decir

$$\gamma_\alpha = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_\alpha.$$

En el caso de un material isótropo, esta relación es válida para todos los tipos de estados tensionales y se denomina *ley de Hooke en el deslizamiento*. Omitiendo el subíndice α, escribimos la última expresión en la forma siguiente:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \qquad (1.13)$$

siendo G *el módulo del deslizamiento o módulo de elasticidad de segundo género*,

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (1.14)$$

G y E son dimensionalmente iguales y se miden ambos en kgf/cm².

Así pues, si la ley de Hooke en el caso de tracción se postula mediante las expresiones (1.4) y (1.12), en el caso del deslizamiento, se deduce de ellas.

§ 13. Ensayo de materiales a tracción y compresión

Al resolver los problemas más simples de la tracción y compresión, nos encontramos ya con la necesidad de tener ciertos datos experimentales previos sobre los cuales se pueda basar la teoría e introducir así ciertas generalizaciones en el análisis de estructuras concretas. Entre estos datos experimentales se encuentra, ante todo, la ley de Hooke que ya conocemos. Las características básicas de los materiales en este caso son el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson μ. Claro, que estas magnitudes dependen de las propiedades del ma-

terial. E y μ dependen, ante todo, del tipo de material y, en cierta medida, de las condiciones del tratamiento térmico y mecánico.

Para la solución de los problemas prácticos, es indispensable tener también las características numéricas de las propiedades de resistencia del material. Al estudiar los procesos de doblado y estampado se necesitan ciertos exponentes que caractericen la capacidad del material de deformarse plásticamente. En toda una serie de casos se requieren datos sobre la capacidad del material de resistir las temperaturas altas, de trabajar con cargas variables, etc.

De acuerdo con lo expuesto, se realizan diversos tipos de ensayos, siendo los principales y más difundidos los ensayos a tracción y compresión. Con su ayuda, se consigue obtener las características principales del material de aplicación directa en los cálculos prácticos.

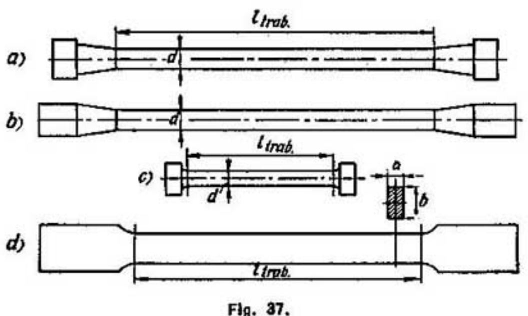


Fig. 37.

Para los ensayos a tracción se emplean probetas especiales que en su mayor parte se tornean de barras o se hacen de láminas. La particularidad esencial de las probetas es la existencia de lugares reforzados que sirven para fijarlas y de una variación paulatina de la sección hacia la parte de trabajo, relativamente más estrecha y debilitada. En la figura 37 se muestran algunos tipos de probetas. La longitud de la parte de trabajo l_{trab} es generalmente 15 veces superior al diámetro d. Al medir las deformaciones, se usa solamente la parte de esta longitud que no supera diez diámetros. Existen al mismo tiempo probetas más cortas, para las cuales $l_{trab/d}$ no es mayor que 5. En el caso de sección transversal rectangular, se escoge como característica que determina la longitud de trabajo l, el diámetro del círculo equivalente d.

En los ensayos a compresión se emplean probetas cilíndricas cortas, cuya altura es mayor que las dimensiones de la sección en menos de dos veces (fig. 38). En el caso de gran altura, la compresión de la

probeta va acompañada, como regla general, de un pandeo que influye sobre los resultados de los ensayos.

Las dimensiones absolutas de las probetas, tanto en los ensayos a tracción como a compresión, dependen de la potencia *) de que disponen las máquinas y de las dimensiones de la pieza bruta de la cual se preparan las probetas.

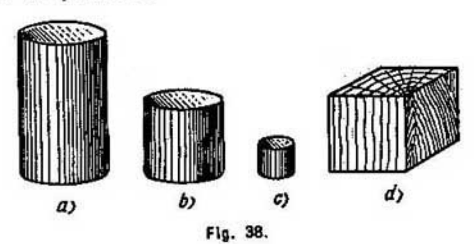


Fig. 38.

El ensayo a tracción o compresión se realiza en máquinas especiales, donde la fuerza se crea, o bien por un peso que actúa sobre la probeta mediante todo un sistema de palancas, o por medio de la presión hidráulica trasmitida al émbolo. En el primer caso la máquina se llama de palanca, en el segundo, hidráulica.

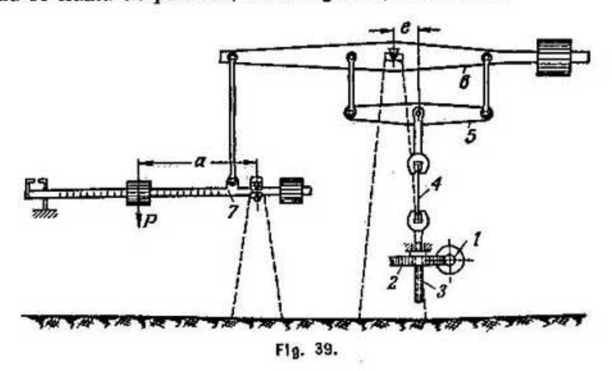


Fig. 39.

En la figura 39 se representa el esquema de la máquina de ensayo de palanca más simple. Del tornillo sin fin *1*, a mano o con mando eléctrico, gira la rueda dentada *2* que desplaza hacia abajo el tor-

*) Cuando se habla de la potencia de una máquina de ensayo o de una prensa, se tiene en cuenta, no el trabajo que realiza por unidad de tiempo, sino la fuerza máxima que es capaz de desarrollar la máquina.

nillo de fuerza *3*. En la probeta *4* aparece de esta manera un esfuerzo que a través de las palancas *5*, *6* y *7* se equilibra con el peso de la carga P en el brazo a. En la palanca *7* existe una graduación en unidades de fuerza aplicada a la probeta. El desplazamiento del peso sobre la palanca puede realizarse no solamente a mano, sino también automáticamente.

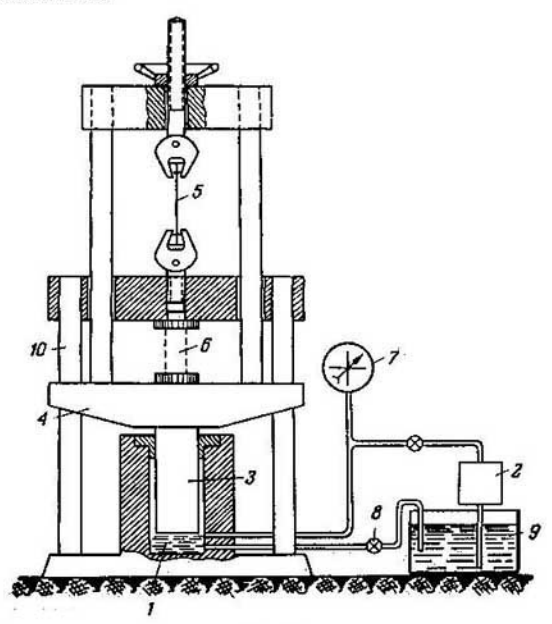


Fig. 40.

En la fig. 40 está representado el esquema de una máquina hidráulica de ensayo de tipo universal, es decir, diseñada para los ensayos a tracción y a compresión. En el espacio interior del cilindro *1*, mediante la bomba *2*, a presión, se introduce el aceite, elevándose así el émbolo *3*. En el émbolo se instala el pórtico *4*, cuya parte superior tiene un cierre que fija la probeta *5* que se ensaya a tracción. En el caso de compresión la probeta se instala sobre la parte inferior de la plataforma. En la figura 40, la probeta para el ensayo a compresión está dibujada con línea punteada y va señalada con la cifra *6*. El pórtico *10* es inmóvil. En la figura 40 su plano convencionalmente se

hace coincidir con el del dibujo y el del pórtico *4*. El esfuerzo se mide con un manómetro *7*, cuya escala indica la fuerza que actúa sobre la probeta. Al terminar el ensayo, el aceite, bajo la presión del pórtico *4*, se desplaza por la llave *8* hacia el recipiente de aceite *9*.

La potencia de las máquinas de ensayo varía entre algunos gramos (para el ensayo de fibras e hilos) y cientos de toneladas (para los ensayos de estructuras grandes). Las máquinas de pequeña potencia (hasta una tonelada) se hacen generalmente del tipo de palanca. Para mayores potencias es preferible el principio hidráulico.

Durante los ensayos a tracción, la probeta se fija en los cierres de la máquina, o mediante cuñas que aprietan automáticamente la probeta (fig. 41, *a*), o mediante casquillos partidos (fig. 41, *b*).

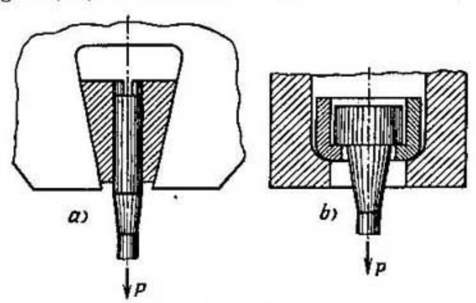


Fig. 41.

Los cierres en las máquinas se diseñan de tal manera que excluyan la inclinación de la probeta y garanticen, dentro de lo posible, la transmisión central del esfuerzo sin flexión suplementaria. En los ensayos a compresión la probeta cilíndrica se coloca libremente entre las losas paralelas.

El propósito principal de los ensayos a tracción y compresión consiste en la construcción de los diagramas de tracción y compresión, o sea, la dependencia entre la fuerza que actúa sobre la probeta y su alargamiento. En la máquina de palanca la fuerza se mide, o por el ángulo de inclinación del péndulo, o por la posición del peso que equilibra. En la máquina hidráulica, la magnitud de la fuerza se establece por la escala del manómetro graduada debidamente. Para la medición *a grosso modo* de los alargamientos se usan dispositivos simples (a menudo de palanca) que fijan el desplazamiento mutuo de los cierres de la máquina. Este desplazamiento en el caso de alargamientos grandes se puede igualar al alargamiento de la probeta. Para la medición exacta de pequeños alargamientos se emplean aparatos especiales denominados tensómetros. Este dispositivo se estable-

ce directamente sobre la probeta para fijar el desplazamiento mutuo de dos secciones de la parte de trabajo de la probeta. El mecanismo y el funcionamiento de algunos tipos de tensómetros será estudiado en el capítulo XVI.

La máquina de ensayo moderna generalmente está provista de un dispositivo para obtener automáticamente el diagrama de tracción — compresión. Esto permite, una vez realizado el ensayo, obtener en cierta escala la curva $P=f(\Delta l)$.

§ 14. Diagrama de tracción

Veamos las particularidades esenciales del diagrama de tracción.

En la figura 42 está representado el diagrama, típico para el acero al carbono, del ensayo de la probeta en el sistema de coordenadas P, Δl. La curva obtenida se puede dividir convencionalmente en las cuatro zonas siguientes.

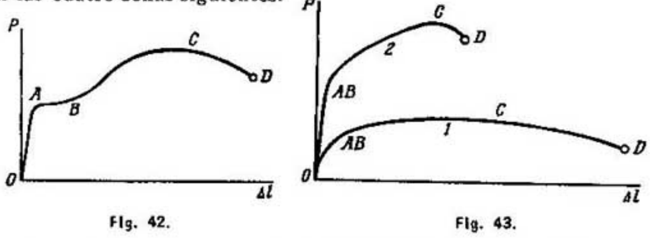


Fig. 42. Fig. 43.

La zona OA se llama *zona de elasticidad*. En ella el material se comporta según la ley de Hooke y

$$\Delta l=\frac{Pl}{EF}.$$

En la figura 42 este tramo, para mayor claridad, no está representado a escala. Los alargamientos Δl en el tramo OA son muy pequeños y si la recta OA fuese dibujada a escala, coincidiría con el eje de las ordenadas (teniendo en cuenta el espesor del eje). La magnitud de la fuerza para la cual es válida la ley de Hooke depende de las dimensiones de la probeta y de las propiedades físicas del material. En el caso de aceros de alta calidad, esta magnitud es más elevada. Para metales como el cobre, el aluminio y el plomo es varias veces menor.

La zona AB se denomina *zona de fluencia general* y el tramo AB del diagrama, escalón de fluencia. Aquí tiene lugar un aumento considerable de la longitud de la probeta, sin el aumento apreciable de la carga. La existencia del escalón de fluencia AB no es característico para los metales. En la mayoría de los casos, en los ensayos a tracción y compresión, no se observa dicho escalón AB y el diagrama de tracción de la probeta es semejante a las curvas representadas en

la figura 43. La curva *1* es típica para el aluminio y el cobre recocido, la curva *2*, para los aceros aleados de alta resistencia.

La zona *BC* se denomina *zona de endurecimiento*. Aquí el alargamiento de la probeta va acompañado del correspondiente aumento de la carga, pero de manera mucho más lenta (ciento de veces) que en el tramo elástico. En la etapa de endurecimiento en la probeta se vislumbra el lugar de la futura rotura y comienza a formarse lo que generalmente se denomina *cuello*, estrechamiento local de la probeta (fig. 44). A medida que se tracciona la probeta la sección



Fig. 44.

del cuello se reduce rápidamente. Cuando la disminución relativa del área de la sección se iguala al aumento relativo de la tensión, la fuerza P alcanza su máximo (punto C del diagrama). En adelante, el alargamiento de la probeta transcurre simultáneamente a la disminución de la fuerza, a pesar de que la tensión media en la sección transversal del cuello aumenta. El alargamiento de la probeta tiene, en este caso, un carácter local y, por lo tanto, el tramo CD de la curva se denomina *zona de fluencia local*. El punto D corresponde a la rotura de la probeta. En el caso de muchos materiales la rotura ocurre sin la aparición apreciable del cuello.

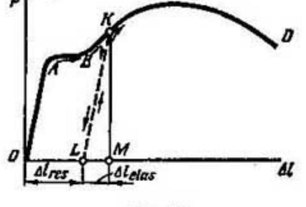


Fig. 45.

Si la probeta que se ensaya no se lleva hasta la rotura y se descarga (punto K de la figura 45), entonces durante el proceso de descarga, la dependencia entre la fuerza P y el alargamiento Δl se representará por la recta KL (fig. 45). El ensayo demuestra que esta recta es paralela a OA. Al descargar la probeta no desaparece completamente el alargamiento, sino que disminuye sólo en una magnitud igual a la parte elástica del alargamiento (segmento LM). El segmento OL representa el alargamiento residual y se denomina éste, *alargamiento plástico*. Su correspondiente deformación se llama deformación plástica. Así pues,

$$OM = \Delta l_{elas} + \Delta l_{res}$$

y de acuerdo con esto,

$$\varepsilon = \varepsilon_{elas} + \varepsilon_{res}.$$

Si la probeta fue cargada previamente dentro de los límites correspondientes al tramo *OA* y descargada después, entonces la deformación será puramente elástica y $\Delta l_{res}=0$.

Al cargarla de nuevo, el diagrama de tracción irá por la recta *LK* y después según la curva *KCD* (fig. 45), como si no existiese descarga intermedia alguna.

Supongamos ahora que disponemos de dos probetas idénticas, de un mismo material y que una de ellas no se sometió a carga previamente mientras que la otra sí y recibió deformaciones residuales.

Al ensayar la primera de las probetas, obtendremos el diagrama de tracción *OABCD* representado en la figura 46, *a*. Al ensayar la

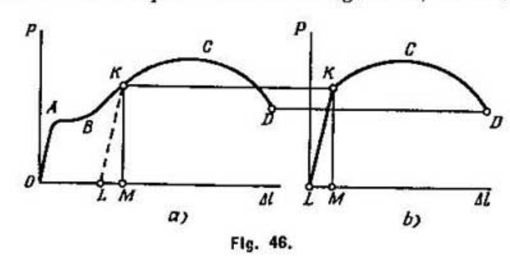


Fig. 46.

segunda, las deformaciones se medirán ya, claro está, a partir del estado sin carga y el alargamiento residual *OL* no se tendrá pues en consideración. Como resultado, obtenemos un diagrama más corto *LKCD* (fig. 46, *b*). El segmento *MK* corresponde a la fuerza con que fue cargada la probeta previamente. Así pues, el aspecto del diagrama para un mismo material depende del grado de estiramiento inicial y la propia solicitación aparece aquí como una operación tecnológica previa. Es muy importante el hecho de que el segmento *LK* (fig. 46, *a*) resulta mayor que *OA*. Esto demuestra que, como resultado del estiramiento inicial del material, éste requiere la capacidad de resistir mayores cargas sin recibir deformaciones residuales.

El fenómeno que consiste en el mejoramiento de las propiedades elásticas del material como resultado de las deformaciones plásticas previas, se denomina *endurecimiento por deformación en frío* y se emplea ampliamente en la técnica.

Por ejemplo, para que el cobre en placas o el latón adquiera propiedades elásticas, se lamina este en frío entre rodillos. Las cadenas, cables y correas se someten a menudo a un estiramiento previo por fuerzas superiores a las de trabajo para que en adelante no surjan alargamientos residuales. En algunos casos, el endurecimiento por deformación en frío no es deseable como, por ejemplo, durante el estampado de muchas piezas de paredes delgadas. En este caso, para

que no se rompa la lámina, el estiramiento se hace en forma escalonada. Antes de realizar la siguiente operación de estiramiento, la pieza se somete a un recocido que elimina el endurecimiento.

§ 15. Mecanismo de las deformaciones

Hasta ahora, al hablar de los ensayos de tracción de la probeta, nos ocupábamos solamente del aspecto exterior del fenómeno, sin profundizar en los procesos interiores que ocurren en el material. Al carácter de la variación de la fuerza P en función de Δl se le puede dar también una interpretación física, si partimos de la composición molecular del sólido.

Como se sabe, los cuerpos sólidos se dividen en amorfos y cristalinos. En los primeros, el diagrama de tracción no tiene carácter estable, sino que depende sensiblemente del tiempo de acción de las fuerzas y el propio material se comporta, hasta cierto punto, como un líquido viscoso. Debido a esto, nos detenemos solamente en el mecanismo de la deformación de los metales.

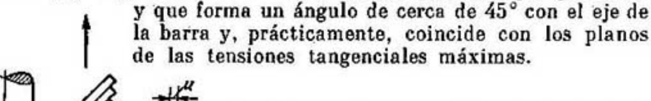
Todos los metales, en el estado en que se emplean en la construcción de máquinas, tienen estructura policristalina, es decir, están constituidos por una inmensidad de pequeños cristales situados caóticamente en volumen del metal. En algunos casos, los cristales tienen cierta orientación que estadísticamente prevalece y que depende del carácter de la tecnología (laminado, estirado). Dentro de los cristales, los átomos del metal se sitúan en cierto orden, formando una red espacial regular. El sistema de disposición de los átomos depende de sus propiedades y depende también de las condiciones físicas de la cristalización.

Entre los átomos de la red cristalina existen fuerzas de interacción constantes. Cuando la distancia entre dos átomos es grande, estos se atraen, en el caso de pequeñas distancias, las fuerzas son de repulsión. El sistema de cristalización propia del metal dado se determina por estas fuerzas y por las leyes que las regulan en las distintas direcciones. En el caso de un cristal libre de cargas, este sistema de fuerzas es tan determinado como la propia disposición de los átomos.

Bajo la acción de las fuerzas, los átomos de la red cristalina reciben desplazamientos mutuos, variando así las fuerzas de interacción. La dependencia que existe entre las fuerzas de interacción y los desplazamientos tiene un carácter funcional complicado. Sin embargo, cuando se trata de desplazamientos pequeños, esta dependencia se puede considerar lineal. Los desplazamientos que aparecen en la red cristalina en las distintas direcciones y corresponden a un conjunto caótico de cristales crean, de una manera integral, la relación de proporcionalidad entre los desplazamientos de los puntos del sólido y las cargas exteriores, lo que se expresa por la ley de Hooke.

Al eliminar las fuerzas exteriores, los átomos ocupan de nuevo su posición bien determinada en la red cristalina y se restablecen así plenamente las dimensiones geométricas del cuerpo. Así se explica la propiedad de elasticidad.

Analizamos ahora el proceso de aparición de las deformaciones plásticas. Los ensayos demuestran que la aparición de las deformaciones plásticas está relacionada con los desplazamientos originados por los deslizamientos en la red cristalina. Una comprobación clara de esto nos la da, en particular, la observación de la superficie de una probeta pulida y sometida a tracción. En la zona de fluencia general y de consolidación del material, es decir, cuando surgen deformaciones plásticas apreciables, la superficie de la probeta se cubre de todo un sistema de líneas finas o, como se las llama, *de franjas de deslizamiento* (fig 47). Estas líneas tienen cierta dirección que prevalece y que forma un ángulo de cerca de 45° con el eje de la barra y, prácticamente, coincide con los planos de las tensiones tangenciales máximas.



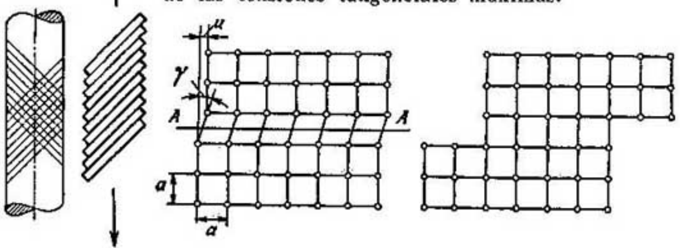


Fig. 47. Fig. 48. Fig. 49.

Como resultado de los deslizamientos en los planos inclinados, la barra se alarga. El mecanismo de la formación de este alargamiento está representado esquemáticamente en la figura 48. El cuadro real es más complicado, puesto que tiene un carácter espacial y el deslizamiento ocurre no solamente en un conjunto de planos paralelos, como se indica en el dibujo, sino en todos los planos que forman un ángulo de cerca de 45° con el eje de la barra.

Dentro de los límites de un solo cristal la formación de las deformaciones plásticas ocurre como resultado del desplazamiento de una parte del cristal en cierto plano un número entero de elementos de la red cristalina (plano *AA* en la figura 49). La deformación plástica mínima corresponde al desplazamiento igual a un elemento de la red. Esto es una especie de cuanto de la deformación plástica. Como resultado de tal desplazamiento cada átomo anterior ocupará el lugar del átomo posterior y todos los átomos ocuparán los lugares pro-

pios de la estructura cristalina dada. Por lo tanto, el cristal mantiene sus propiedades, cambiando solamente su configuración exterior.

Supongamos que el desplazamiento de los átomos durante el deslizamiento ocurre simultáneamente en todo el plano AA (fig. 49) y veamos el orden del valor de las tensiones tangenciales necesarias para que en el cristal aparezcan deformaciones plásticas. Está claro, que la componente tangencial de las fuerzas de interacción, sobre el plano AA, durante el deslizamiento, varía en función del desplazamiento mutuo de las partes del cristal según cierta ley periódica (fig. 50).

Mientras el desplazamiento mutuo u es menor que la mitad de la distancia entre los átomos $a/2$, las fuerzas de adherencia se oponen al

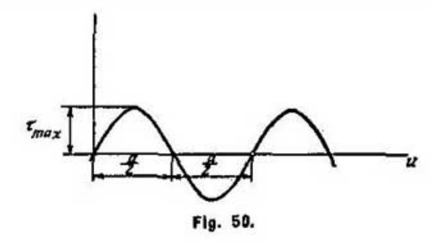


Fig. 50.

eslizamiento. Sin embargo, una vez superada esta distancia, las fuerzas de interacción contribuirán al desplazamiento posterior de la red hacia una nueva posición estable de equilibrio. Así pues, cuando $u=\frac{a}{2}$, la tensión τ varía de signo. Consideremos que τ varía según la sinusoide $\tau=\tau_{max}$ sen $\frac{2\pi u}{a}$, donde τ_{max} representa la tensión después de la cual surgen las deformaciones plásticas.

Cuando el desplazamiento u es pequeño,

$$\text{sen}\,\frac{2\pi u}{a}\approx\frac{2\pi u}{a},$$

obteniendo así la proporcionalidad directa correspondiente a la ley Hooke

$$\tau=\tau_{max}\frac{2\pi u}{a}.$$

Pero como $\frac{u}{a}=\gamma$ y $\tau=G\gamma$ obtendremos, $\tau_{max}=\frac{G}{2\pi}$.

Al traccionar la barra, las tensiones tangenciales máximas aparecerán en los planos inclinados 45° respecto al eje de la probeta y serán iguales a $\sigma/2$. Suponiendo que $G=\frac{E}{2,6}$, obtendremos $\sigma_{max}=\frac{E}{2,6\pi}$.

Así pues, es de esperar que la barra en la tracción es capaz de resistir tensiones del orden de una décima de la magnitud del mó-

dulo de elasticidad E, sin que surjan deformaciones plásticas. Sin embargo, los ensayos demuestran que esta valoración no es correcta. En realidad, las deformaciones plásticas comienzan a desarrollarse en los cristales para tensiones cientos de veces menores que las que se esperan.

El error esencial cometido más arriba lo constituye la suposición de que el desplazamiento de los átomos durante el deslizamiento ocurre en todo el plano al mismo tiempo. En realidad, el paso de los átomos a los lugares vecinos va acompañado de aberraciones locales de la estructura que se denominan dislocaciones y se trasmiten como una onda a lo largo del plano en función del tiempo.

En la figura 51 está representado el esquema más simple de la así llamada dislocación de borde que se caracteriza por la existencia de un

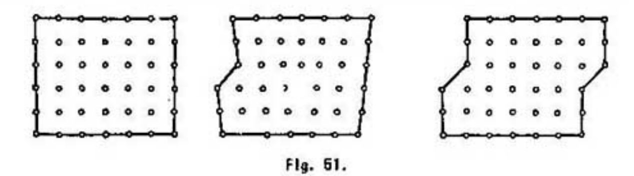


Fig. 51.

semiplano vertical superfluo de átomos en la parte superior del cristal. Una vez que la dislocación recorra todo el cristal de izquierda a derecha (fig. 51), variará la forma del cristal, aunque la estructura permanezca inalterada.

En la figura 52 está dado el modelo de burbujas del plano atómico que contiene dislocación. Para observar mejor se debe mirar la fotografía bajo un ángulo pequeño, girándola 30° hacia la derecha o hacia la izquierda.

El desplazamiento de la dislocación a través del cristal es semejante al movimiento del pliegue en la alfombra que cuando recorre toda la alfombra, esta última recibe cierto desplazamiento. La fuerza necesaria para el desplazamiento del pliegue es sensiblemente menor que la necesaria para mover toda la alfombra.

El paso del átomo a un nuevo lugar va acompañado de efectos dinámicos. El átomo adquiere cierta energía cinética y realiza un movimiento oscilatorio alrededor de la nueva posición de equilibrio. Por lo tanto, tiene lugar cierta radiación de calor, resultando que la probeta se calienta sensiblemente en el proceso de las deformaciones plásticas.

La formación de las deformaciones plásticas en los metales comienza ya para cargas relativamente pequeñas. Entre la inmensidad de cristales situados caóticamente, siempre se encuentran algunos de orientación desfavorable, con defectos interiores, lo que hace

posible la aparición de variaciones plásticas incluso para cargas relativamente pequeñas y dentro de la zona elástica. El número de cristales de este tipo no es grande y las deformaciones plásticas locales no influyen sensiblemente sobre la dependencia lineal general entre la fuerza y el desplazamiento que es propia de la primera etapa de solicitación de la probeta.

En el caso de fuerzas suficientemente grandes las deformaciones plásticas prevalecen ya en la probeta. Los deslizamientos irreversi-

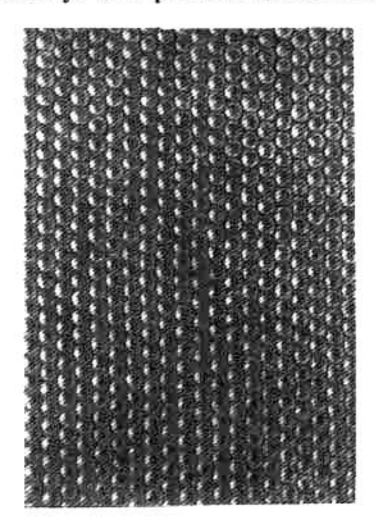


Fig. 52.

bles ocurren en la mayoría de los cristales en los planos más débiles, sobre todo si éstos tienen una orientación semejante a la de los planos de las tensiones tangenciales máximas de la probeta. Esto encuentra su expresión en la formación de las franjas de deslizamiento. Al traccionar la probeta los cristales vecinos actúan unos sobre otros y como consecuencia, los desplazamientos plásticos que se desarrollan en un cristal no pueden crecer indefinidamente puesto que resultan bloqueados por los cristales vecinos de orientación más favorable. Así se explica la existencia de la zona de consolidación del material y cierto aumento de la fuerza de tracción durante las deformaciones plásticas. Así pues, durante el proceso de endurecimiento por deformación en frío ocurre, diríamos, la liquidación de los puntos débiles en los cristales de orientación menos favorable.

Al aplicar a la probeta la carga exterior, en los cristales surgen ciertos desplazamientos de los átomos, no solamente en un número entero de posiciones, sino que se mantiene también cierta deformación de la red cristalina. Es decir, junto a la deformación plástica existe también la deformación elástica. Durante la descarga, la forma de la red deformada se recupera, es decir, desaparece la deformación elástica, mientras que la deformación plástica, claro está, no desaparece.

Tiene importancia el hecho de que el proceso de desaparición de la deformación elástica transcurre por las mismas leyes de variación de las fuerzas intercristalinas que en la etapa inicial de la carga de la probeta. Es por esto que la recta de la descarga KL (fig. 45) es paralela a la recta correspondiente a la carga inicial OA.

Cuando los esfuerzos de tracción son considerables, las deformaciones plásticas conducen a la destrucción de las ligaduras entre los cristales y los átomos, destruyéndose así la probeta. El mecanismo de la destrucción está poco estudiado por ahora y no existe una teoría que sea admitida por todos.

Es importante observar que la descripción anterior sobre el origen de las deformaciones plásticas conserva sus peculiaridades cualitativas para los cuerpos de cualquier forma independientemente de las leyes de distribución de las fuerzas exteriores. Por eso, la dependencia lineal entre los desplazamientos y las fuerzas es propia, dentro de ciertos límites, no sólo de la probeta traccionada, sino, como regla general, también de cualquier estructura compleja. Lo mismo se puede decir sobre la ley de la descarga. En el diagrama del ensayo de la estructura la recta de la descarga es paralela a la de la solicitación inicial.

Pasemos ahora a las características mecánicas numéricas que se determinan de los ensayos de los materiales a tracción y compresión.

§ 16. Propiedades mecánicas esenciales del material

Para dar una valoración cuantitativa a las propiedades del material expuestas anteriormente, construimos de nuevo el diagrama de tracción $P=f(\Delta l)$, pero en el sistema de coordenadas σ y ε. Para ello, dividimos por F las ordenadas y por l las abscisas, siendo F y l, respectivamente, el área de la sección transversal y la longitud de trabajo de la probeta antes de ser cargada. Puesto que estas magnitudes son constantes, el diagrama $\sigma=f(\varepsilon)$ (fig. 53) tendrá el mismo aspecto que el diagrama de tracción, pero caracterizará ya no las propiedades de la probeta, sino las del material.

Destaquemos los puntos característicos del diagrama y las definiciones de las magnitudes numéricas correspondientes a ellos.

La tensión máxima hasta la cual el material sigue la ley de Hooke se denomina límite de proporcionalidad (σ_p).

La magnitud del límite de proporcionalidad depende de la exac-

titud con que el tramo original del diagrama se pueda considerar recto. El grado de desviación de la curva $\sigma=f(\varepsilon)$ de la recta $\sigma=E\varepsilon$ se determina por el ángulo que forma la tangente al diagrama con el eje σ. Dentro de los límites de la ley de Hooke, la tangente de este ángulo se determina por $1/E$. Generalmente se considera que si $d\varepsilon/d\sigma$ resultó un 50% mayor que $1/E$, entonces se alcanza el límite de proporcionalidad.

Las propiedades elásticas del material se mantienen hasta la tensión denominada límite de elasticidad. *Se entiende por límite de elasticidad* (σ_e) *la tensión máxima hasta la cual el material no recibe deformaciones residuales.*

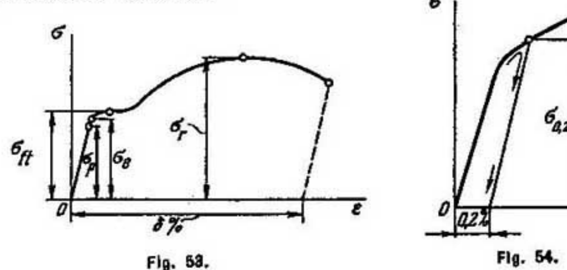


Fig. 53. Fig. 54.

Para obtener el límite de elasticidad es necesario, después de cada carga suplementaria, descargar la probeta y analizar, si han surgido deformaciones residuales o no. Como las deformaciones plásticas en ciertos cristales aparecen ya al principio de la solicitación, está claro que la magnitud del límite de elasticidad, como la del límite de proporcionalidad, depende de la exactitud que se exige a las mediciones. Generalmente, la deformación residual correspondiente al límite de elasticidad se considera aproximadamente igual a $\varepsilon_{res}=(1\div5)\ 10^{-5}$, es decir, $0{,}001\div0{,}005\%$. De acuerdo con esta tolerancia, el límite de elasticidad se designa por $\sigma_{0,001}$ ó $\sigma_{0,005}$.

El límite de elasticidad y el límite de proporcionalidad son muy difíciles de obtener y cambian bruscamente de valor según la tolerancia convencional del ángulo de inclinación de la tangente y de la deformación residual. Por eso, las magnitudes de σ_p y σ_e no figuran en los manuales donde están dadas las propiedades de los materiales.

La característica siguiente, mejor determinada, es el límite de fluencia. *Se entiende por límite de fluencia la tensión bajo la cual tiene lugar el aumento de las deformaciones sin un aumento apreciable de la carga.* Cuando en el diagrama no aparece bien definido el escalón de fluencia, se entiende por límite de fluencia, convencionalmente, la tensión para la cual la deformación residual constituye $\varepsilon_{res}=0{,}002$ ó 0,2% (fig. 54). En algunos casos se establece el límite $\varepsilon_{res}=0{,}5\%$.

El límite convencional de fluencia se anota por $\sigma_{0,2}$ y $\sigma_{0,5}$ según la magnitud admitida de la tolerancia de la deformación residual. El subíndice 0,2 generalmente se omite en las notaciones del límite de fluencia. Si es necesario distinguir el límite de fluencia a la tracción del límite correspondiente a la compresión, en la notación se introduce el subíndice suplementario «t» ó «c», según se trate de la tracción o de la compresión. Así pues, para el límite de fluencia se obtienen las notaciones σ_{ft} y σ_{fc}.

El límite de fluencia se obtiene fácilmente y constituye una de las características mecánicas del material fundamentales.

La razón entre la fuerza máxima que es capaz de resistir la probeta y el área inicial de la sección transversal se denomina límite de rotura y se denota por σ_{rt} (en el caso de compresión σ_{rc}).

Es importante advertir que σ_{rt} no coincide con la tensión que surge en el momento de la rotura de la probeta. Si se refiere la fuerza de tracción no al área original de la sección de la probeta, sino a la sección mínima en el momento dado, entonces se podrá observar que la tensión media*) en la sección más estrecha, instantes antes de la rotura, es mucho mayor que σ_{rt}. Así pues, el límite de resistencia es también una magnitud convencional, pero que debido a la sencillez de su determinación se introdujo sólidamente en la práctica como la característica fundamental relativa de las propiedades de resistencia del material.

Los valores de σ_{ft} y σ_{rt} para algunos materiales de uso más frecuente están dados en la tabla 1 en kgf/cm².

En los ensayos a tracción se determina otra característica más del material, que es el así denominado, *alargamiento de rotura* $\delta\%$.

El alargamiento en el momento de la rotura es el valor medio de la deformación residual que se desarrolla en el momento de la rotura y que se mide sobre una longitud «estándard» de la probeta. La determinación de $\delta\%$ se lleva a cabo de la manera siguiente.

Antes del ensayo, en la superficie de la probeta se hace una serie de marcas que dividen la longitud de trabajo en partes iguales. Una vez ensayada y rota la probeta, se juntan las dos partes (fig. 55). Después, por medio de las marcas hechas, y partiendo de la sección de rotura, hacia la derecha y hacia la izquierda, se marcan dos tramos que tenían antes del ensayo $5d$ de longitud cada una (fig. 55). Así se determina el alargamiento medio correspondiente a la longitud «estándard» $l_0=10d$. En algunos casos l_0 se considera igual a $5d$.

El alargamiento correspondiente a la rotura será,

$$\delta\% = \frac{\Delta l_0}{l_0}100.$$

*) En la zona del cuello la tensión en la sección transversal de la probeta se distribuye, hablando rigurosamente, de manera no uniforme.

Tabla 1

Material	σ_{ft}	σ_{fc}	σ_{rt}	σ_{rc}	δ, en % $l_0=5\ d$	E, kgf/cm²
Acero suave	2 500	2 500	3 900	—	42	$2,0\cdot10^6$
Acero 30 no templado	3 300	3 300	5 300	—	28	$2,0\cdot10^6$
Acero 30 templado	10 300	9 000	11 000	—	11	$2,0\cdot10^6$
Acero 45 no templado	3 700	3 700	6 200	—	24	$2,0\cdot10^6$
Acero 45 templado	10 400	9 700	10 800	—	13	$2\ 0.10^6$
Acero У8 no templado	2 500	4 300	6 300	—	25	$2,0\cdot10^6$
Acero У8 templado	7 000	7 000	11 000	—	16	$2,0\cdot10^6$
Acero 30 ХГСА templado	14 000	14 000	16 200	—	10	$2,0\cdot10^6$
Acero 40 ХНВ templado	17 200	21 000	20 500	—	10	$2,0\cdot10^6$
Fundición gris СЧ28	1 400	3 100	1 500	6 400	0,6	$0,7\cdot10^6$
Titanio técnico	5 200	5 200	6 000	—	23	$1,1\cdot10^6$
Cobre recocido	550	550	2 200	—	46	$1,1.10^6$
Cobre en barras	2 500	2 500	3 200	—	15	$1,1\cdot10^6$
Latón	3 300	3 300	4 500	—	17	$1,2\cdot10^6$
Bronce	1 100	1 100	1 360	—	7,5	$1,2\cdot10^6$
Aluminio	500	500	840	—	35	$0,7\cdot10^6$
Duraluminio	3 400	3 400	5 400	—	13	$0,75\cdot10^6$
Textolita	750	1 150	1 270	1 680	1,5	$0,03\cdot10^6$

Las deformaciones se distribuyen a lo largo de la probeta de manera no uniforme. Si se midiese la longitud de los tramos entre

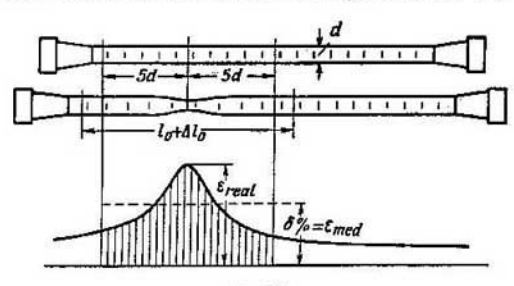


Fig. 55.

dos marcas consecutivas, se podría construir el diagrama de las deformaciones residuales representado en la figura 55. El alargamiento máximo aparece en el lugar de rotura y se denomina generalmente *alargamiento real de rotura*.

El diagrama de tracción que se construye considerando la disminución del área F y el aumento local de la deformación se denomina *diagrama real de tracción* (véase la curva $OC'D'$ de la figura 56).

La construcción del diagrama real de tracción resulta indispensable para el análisis teórico de la operación de estampado profundo, y, en general, para la solución de problemas relacionados con el surgimiento de grandes deformaciones. La construcción de este diagrama se realiza por métodos aproximados.

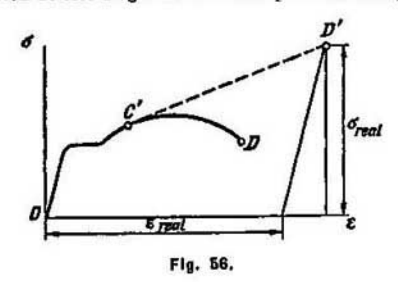


Fig. 56.

Veamos uno de ellos. Se determinan primeramente las coordenadas σ_{real} y ε_{real} del punto D', del punto real de rotura (fig. 56). Es evidente que

$$\sigma_{real}=\frac{P_D}{F_c}$$

siendo F_c, el área de la sección transversal del cuello después de la rotura, que se determina fácilmente, midiendo la probeta rota. P_D es la magnitud de la fuerza de tracción en el momento de la rotura (punto D del diagrama).

El valor de ε_{real} se determina con facilidad de la condición de igualdad de los volúmenes del material antes y después del ensayo. Cerca del lugar de rotura, la unidad de longitud de la probeta tenía antes del ensayo un volumen de $F\cdot 1$, después de la rotura el volumen será $F_c(1+\varepsilon_{real})$, es decir,

$$F=F_c(1+\varepsilon_{real})$$

de donde se obtiene,

$$\varepsilon_{real}=\frac{F}{F_c}-1.$$

La abscisa del punto D' será,

$$\varepsilon_{D'}=\frac{F}{F_c}-1+\frac{\sigma_{real}}{E}.$$

Por el punto D', obtenido como se indicó anteriormente, se traza después la tangente $D'C'$ a la curva OD. En el tramo OC' el diagrama común coincide con el diagrama real, ya que el cuello de la probeta no se ha formado aún. En el caso de grandes deformaciones se considera diagrama real la recta $C'D'$. En lugar de la recta $C'D'$ se hubiese podido trazar también, y con la misma exactitud, una línea curva que varíe paulatinamente y que sea tangente a la curva OD.

§ 17. Plasticidad y fragilidad. Dureza

La capacidad del material de permitir grandes deformaciones residuales sin romperse se denomina *plasticidad*. Esta propiedad tiene una importancia decisiva para las operaciones tecnológicas como el estampado, el estirado, el trefilado, el doblado y otras. Se considera como medida de la plasticidad el alargamiento δ en el momento de la rotura. Cuanto mayor sea δ tanto más plástico será el material. El cobre recocido, el aluminio, el latón, el acero suave y otros son materiales muy plásticos. Menos plásticos son el duraluminio y el bronce. Muchos aceros aleados son de poca plasticidad.

La fragilidad es una propiedad opuesta a la plasticidad, y consiste en la capacidad del material de destruirse sin deformaciones

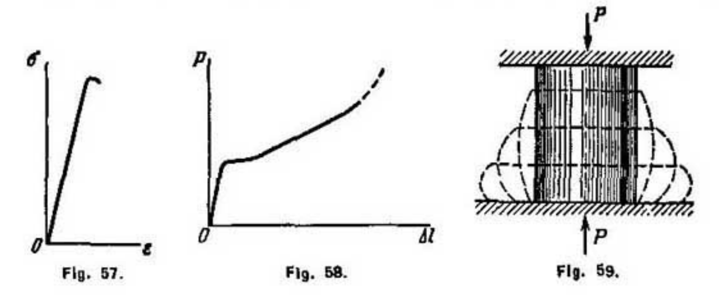


Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59.

residuales apreciables. Los materiales que tienen esta propiedad se llaman materiales *frágiles*. En estos materiales el alargamiento en la rotura no supera el 2—5% y, en toda una serie de casos, es del orden de centésimos de por ciento. Son materiales frágiles el hierro fundido, el acero de herramientas de alto carbono, el vidrio, el ladrillo, la piedra, etc. El diagrama de tracción de los materiales frágiles carece de escalón de fluencia y de la zona de consolidación (fig. 57).

Es completamente distinto también el comportamiento de los materiales plásticos y frágiles durante los ensayos a compresión. Como se ha dicho ya, el ensayo a compresión se realiza con probetas cortas cilíndricas que se sitúan entre las losas paralelas. En el caso de acero suave, el diagrama de compresión de la probeta tiene el mismo carácter que el representado en la figura 58. En este caso, como en el caso de tracción, aparece el escalón de fluencia con el paso sucesivo a la zona de consolidación. En adelante la carga no disminuye, como en el caso de tracción, sino que aumenta bruscamente. Esto ocurre como resultado del aumento del área de la sección transversal de la probeta comprimida. La probeta, debido a la fricción en los extremos, adquiere la forma de un tonel (fig. 59). Resulta prácticamente

imposible llevar hasta la rotura una probeta de material plástico. El cilindro sometido al ensayo se comprime hasta convertirse en un disco fino (fig. 59) y el ensayo sucesivo está limitado únicamente por las posibilidades de la máquina. Por eso, el límite de resistencia a la compresión de estos materiales no se puede determinar (véase la tabla 1).

De otra manera se comportan en los ensayos a compresión los materiales frágiles. El diagrama de compresión de estos materiales conserva las mismas particularidades cualitativas que el diagrama de tracción (fig. 57). El límite de resistencia a compresión de un material frágil se determina por el mismo procedimiento que en el caso de tracción. La destrucción de la probeta ocurre cuando aparecen grietas en los planos inclinados o longitudinales (fig. 60).



Fig. 60.

La comparación del límite de resistencia a tracción de los materiales frágiles σ_{rt} con el de compresión σ_{rc} demuestra que estos materiales, como regla general, tienen mayor resistencia a compresión que a tracción. La magnitud

$$k=\frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}$$

en el caso del hierro fundido oscila entre los límites $0{,}2\div0{,}4$. En el caso de materiales cerámicos, $k=0{,}1\div0{,}2$.

La comparación de las características de resistencia de los materiales plásticos a tracción y compresión se lleva a cabo por el límite de fluencia (σ_{ft} y σ_{fc}). Generalmente se considera que $\sigma_{ft}\approx\sigma_{fc}$.

Existen materiales que son capaces de resistir a tracción mayores cargas que a compresión. Estos son generalmente materiales de estructura fibrosa como la madera y algunos tipos de plásticos. Esto es propio también de algunos metales como, por ejemplo, el magnesio.

La división de los materiales en plásticos y frágiles es convencional y no solamente porque entre unos y otros no existe un límite bien definido de δ. Según sean las condiciones del ensayo, muchos materiales frágiles son capaces de comportarse como plásticos y viceversa.

Por ejemplo, cuando se ensaya una probeta de hierro fundido a tracción en condiciones de grandes presiones ($p>4\ 000$ atm) ésta, al destruirse, forma el cuello. Muchos minerales que se encuentran bajo grandes presiones debidas a las capas superiores, durante los deslizamientos de la corteza terrestre, sufren deformaciones plásticas. La probeta de un material plástico cuando tiene una ranura circular (fig. 61), al ser traccionada, sufre una rotura frágil, debido a que en la sección debilitada se dificulta la formación de las deformaciones plásticas de deslizamiento en los planos inclinados.



Fig. 61.

Tiene gran influencia sobre la manifestación de las propiedades plásticas y frágiles el tiempo que dura el proceso de carga y el factor de temperatura. Cuando se trata de cargas rápidas se manifiesta acentuadamente la propiedad de fragilidad, en caso de cargas lentas de larga duración, la propiedad de plasticidad. Por ejemplo, el vidrio frágil sometido a una carga de larga duración y a temperatura normal es capaz de recibir deformaciones residuales, mientras que los materiales plásticos como el acero suave si se someten a cargas bruscas de impacto manifiestan propiedades frágiles.

Una de las operaciones tecnológicas básicas que permite variar en el sentido deseable las propiedades del material es el tratamiento térmico. De los datos que figuran en la tabla 1 se desprende, por ejemplo, que el temple eleva súbitamente las características de resistencia del acero, disminuyendo al mismo tiempo las propiedades plásticas. Para la mayoría de los materiales que se emplean ampliamente en la construcción de máquinas se conocen bien los regímenes de tratamiento térmico que garantizan la obtención de las propiedades mecánicas necesarias del material.

El ensayo de los materiales a tracción y compresión nos da una valoración objetiva de las propiedades del material. Sin embargo, en la producción, para el control operativo de la calidad de las piezas elaboradas, este método presenta en algunos casos ciertas incomodidades. Por ejemplo, mediante los ensayos a tracción y compresión es difícil controlar la regularidad del tratamiento térmico de las piezas fabricadas. Para este tipo de control sería necesario preparar algunas probetas «testigos» de cada grupo de piezas que pasasen todas las etapas del tratamiento térmico junto con las piezas y después ensayar estas probetas a tracción o compresión, para obtener de esta forma las características mecánicas de las piezas fabricadas. Este método sobrecargaría seriamente la producción perjudicando así a la operatividad del control.

Prácticamente en la mayoría de los casos se recurre a una valoración relativa de las propiedades del material mediante la determinación de la *dureza*.

Se entiende por *dureza* la capacidad del material de oponerse a la penetración mecánica en él de cuerpos ajenos. Está claro que esta definición de la dureza repite, de hecho, la definición de las propiedades de resistencia. Durante la penetración de un cuerpo agudo, en el material aparecen deformaciones plásticas locales que van acompañadas, al aumentar la carga, de destrucciones locales. Por eso, el exponente de la dureza está relacionado con los exponentes de la resistencia y la plasticidad y depende de las condiciones concretas del desarrollo del ensayo.

Los ensayos más difundidos son los de Brinell y Rockwell. En el primero, en la superficie de la pieza que se estudia penetra una bola de acero de 10 mm de diámetro, en el segundo, la punta aguda de un pedazo de diamante. Por las dimensiones de la huella obtenida se juzga sobre la dureza del material. El laboratorio de ensayos dispone generalmente de tablas obtenidas exprerimentalmente que permiten, de manera aproximada, determinar el límite de resistencia del material en función del exponente de dureza. De esta manera se consigue, sin destruir la pieza, determinar las características de la resistencia del material.

§ 18. Influencia de la temperatura y del tiempo en las características mecánicas del material

Todo lo expuesto anteriormente sobre las propiedades de los materiales se refería a los ensayos realizados en condiciones normales, es decir, a temperatura de 20° C y con velocidades de variación de las cargas y los alargamientos relativamente pequeños, que se observan en las máquinas de ensayo comunes. Se entiende por velocidad normal de deformación la magnitud

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=0{,}01 \div 3\,\frac{1}{\text{min}}\ .$$

Los límites de variación de las temperaturas, dentro de los cuales trabajan los materiales de construcción sobrepasan en mucho las condiciones normales indicadas. Existen estructuras donde el material se encuentra bajo temperaturas muy altas como, por ejemplo, en las paredes de las cámaras de los motores a reacción y cohetes. Existen también estructuras donde, por el contrario, las temperaturas de trabajo son muy bajas, por ejemplo, en los elementos de las instalaciones de refrigeración y tanques que contienen gases líquidos.

Varían también, entre amplios límites, la velocidad de solicitación y el tiempo de acción de las fuerzas exteriores. Existen cargas que varían muy lentamente y otras de variación rápida, unas actúan durante años y otras cuya duración se mide en millonésimas de segundo.

Claro está que las propiedades mecánicas del material se manifiestan de manera diferente según sean las condiciones indicadas.

El análisis general de las propiedades del material que tenga en cuenta la temperatura y el tiempo de duración, resulta muy complicado y no puede ser ubicado dentro de las curvas experimentales simples semejantes a los diagramas de tracción. La dependencia funcional entre los cuatro parámetros, σ, ε, temperatura t° y el tiempo t,

$$f(\sigma, \varepsilon, t^{\circ}, t)=0$$

no es unívoca y contiene, de forma compleja, relaciones integrales y diferenciales entre las magnitudes que en ella figuran.

Como no se puede dar en forma general, analítica o gráfica, la función indicada, la influencia de la temperatura y el factor de tiempo se considera, por ahora, solamente en tipos concretos de problemas. La división en grupos se realiza fundamentalmente en función de los tipos de las cargas exteriores. Se distinguen cargas de lenta variación, de variación rápida y de variación ultrarrápida.

Las básicas que generalmente se estudian en la resistencia de materiales son las de variación lenta (cargas estáticas). La velocidad de la variación de estas cargas en función del tiempo es tan pequeña, que la energía cinética que reciben las partículas del cuerpo deformado constituye una parte insignificante del trabajo de las fuerzas exteriores. Es decir, el trabajo de las fuerzas exteriores se transforme exclusivamente en energía potencial elástica y en energía térmica irreversible relacionada con las deformaciones plásticas del sólido. El ensayo de los materiales en las condiciones denominadas normales tiene lugar bajo la acción de cargas estáticas.

Si efectuamos los ensayos a tracción a distintas temperaturas, manteniéndonos dentro de las velocidades normales de deformación $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}=0{,}01\div 3\ \frac{1}{\text{min}}\right)$ se podrá, dentro de ciertos límites, obtener la dependencia entre las características mecánicas y la temperatura. Esta dependencia está determinada por la variación térmica de las ligaduras dentro de los cristales y entre ellos y, en algunos casos, por los cambios estructurales del propio material.

En la figura 62 está representada la dependencia entre la temperatura y el módulo de elasticidad E, el límite de fluencia σ_{ft}, el límite de rotura σ_{rt} y el alargamiento correspondiente a la rotura δ, para el caso del acero suave cuando la temperatura varía de 0 a 500° C. Como se puede observar de estas curvas, el módulo de elasticidad no varía prácticamente cuando la temperatura permanece por debajo de 300° C. Los valores de σ_{rt} y sobre todo δ varían mucho más. Tiene lugar lo que se llama «fragilización», del acero, es decir, que el alargamiento en el momento de la rotura disminuye. Después, al aumentar la temperatura, se restablecen las propiedades plásticas

del acero, mientras que las propiedades de resistencia disminuyen rápidamente.

El fenómeno de «fragilización» a temperaturas altas es propio principalmente del acero suave. Los aceros aleados y las aleaciones de metales no ferrosos al aumentar la temperatura, manifiestan generalmente un crecimiento monótono de δ y una disminución, monótona también de σ_{fl} y σ_{rt}. En la figura 63 están representadas las respectivas curvas para el acero al cromomanganeso, acero marca 30 XГСА.

Cuanto mayor sea la temperatura, más difícil será la determinación

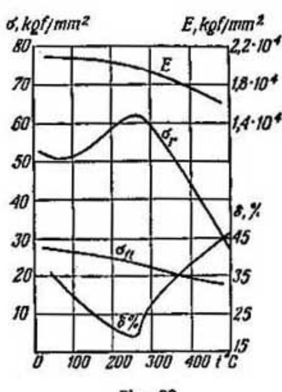


Fig. 62.

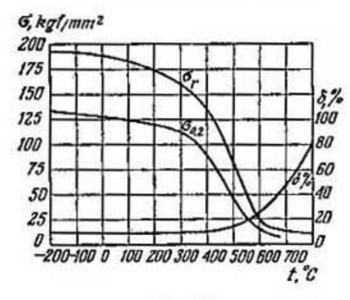


Fig. 63.

de las características mecánicas del material. Esto ocurre no sólo por el hecho de que se complica la técnica del ensayo, sino también porque las propias características se hacen menos determinadas. En las solicitaciones estáticas, a partir de ciertas temperaturas, aumenta bruscamente la influencia del factor tiempo. Para unos materiales esto ocurre a temperaturas bajas, para otros, a temperaturas más altas. La influencia del factor tiempo se observa también a temperaturas normales. Sin embargo, en el caso de los metales se puede prescindir de esta influencia. Cuando se trata de algunos materiales de procendencia orgánica, incluso en el caso de bajas temperaturas, la duración del proceso de carga y de ensayo influye seriamente sobre las magnitudes de las características que se determinan.

La variación de las deformaciones y las tensiones, que surgen en la pieza solicitada por carga, en función del tiempo, se denomina *fluencia plástica*.

Un caso paticular de la misma lo constituye el crecimiento de las deformaciones irreversibles para tensiones constantes. Este fenómeno se denomina *tiempo de efecto*. Como ilustración clara de este fenómeno puede servir el aumento que se observa de las dimensiones

del disco y de las paletas de una turbina de gas que se encuentran bajo la acción de grandes fuerzas centrífugas y de altas temperaturas. Este aumento de las dimensiones es irreversible y se manifiesta generalmente después de muchas horas de trabajo del motor.

Otra revelación particular de las propiedades de la fluencia plástica es la *relajación*, o sea la variación espontánea, en función del tiempo, de las tensiones sin cambiar las deformaciones. La relajación se puede observar, particularmente, en el ejemplo del debilitamiento de las juntas de tornillos que trabajan a altas temperaturas.

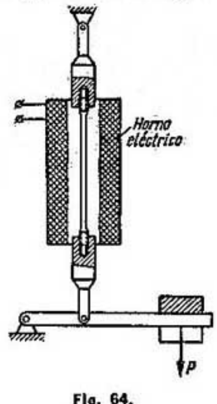


Fig. 64.

Lo más fácil de estudiar experimentalmente es el tiempo de efecto. Si cargamos la probeta con una fuerza constante (fig. 64) y seguimos la variación de su longitud, a temperatura fija, se podrá obtener entonces el diagrama del tiempo de efecto (fig. 65) que da la dependencia entre la deformación y el tiempo, para distintos valores de la tensión σ.

Como vemos, el crecimiento de las deformaciones es al principio muy rápido. Después, el proceso se estabiliza y las deformaciones crecen ya con velocidad constante. Al transcurrir el tiempo en la

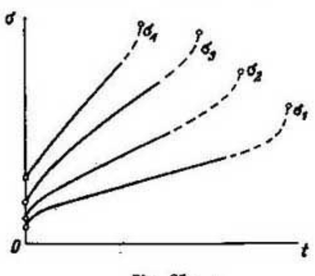


Fig. 65.

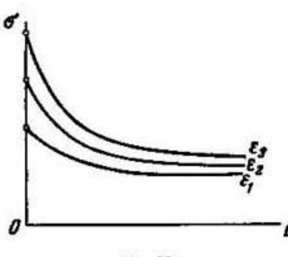


Fig. 66.

probeta, como en los ensayos comunes, aparece el cuello. Momentos antes de la rotura tiene lugar un rápido crecimiento de las deformaciones locales como resultado de la disminución del área de la sección. Para temperaturas más altas, la variación de la deformacián en función del tiempo transcurre de manera más rápida. Para un material dado se puede, por los métodos de la teoría de la fluencia plástica, transformar el diagrama del tiempo de efecto en diagrama de rela-

jación. Este último puede obtenerse, por cierto, experimentalmente, pero para ello se necesita una maquinaria más complicada, puesto que surge la necesidad de medir las variaciones de la fuerza de tracción manteniendo constante el alargamiento de la probeta.

El aspecto de los diagramas de relajación que muestran la dependencia entre la tensión y el tiempo está dado en la figura 66.

Las características mecánicas principales del material en la fluencia plástica son el límite de resistencia prolongada y el límite de fluencia plástica.

Se entiende por límite de resistencia prolongada la razón entre la carga que origina la rotura de la probeta traccionada, después de un tiempo determinado, y el área inicial de la sección.

Así pues, el límite de resistencia prolongada depende del tiempo transcurrido dado después del cual ocurre la rotura. Este tiempo se escoge igual al tiempo de servicio de la pieza y varía de unas decenas de horas hasta cientos de miles de horas. De acuerdo a este amplio intervalo de variación del tiempo varía el límite de resistencia prolongada. Al aumentar el tiempo, el límite, claro está, disminuye.

Se entiende por límite de fluencia plástica la tensión que origina, en un tiempo determinado, una deformación plástica de magnitud fijada.

Como vemos, para determinar el límite de fluencia plástica es necesario fijar previamente el intervalo de tiempo (determinado por el período de duración de la pieza) y el intervalo de las deformaciones admisibles (que se establece en función de las condiciones de explotación de la pieza).

El límite de resistencia prolongada y el límite de fluencia plástica dependen considerablemente de la temperatura. Al aumentar esta última, estos límites, claro está, disminuyen.

Entre las diversas cargas estáticas ocupan un lugar especial las cargas que varían periódicamente o las cargas *cíclicas*. Los problemas de la resistencia de los materiales sometidos a estas cargas constituyen el contenido de una parte espacial de la resistencia de materiales y se relacionan con el concepto de *fatiga* del material. Estas cuestiones se analizarán detalladamente en el capítulo XIII.

Después de las cargas estáticas, analicemos el tipo de cargas que varían rápidamente, o sea, las cargas dinámicas.

Para la valoración de estas cargas existen dos criterios. Por una parte, se considera de variación rápida la carga que origina velocidades apreciables de las partículas del sólido deformado, velocidades tan grandes, que la energía cinética total de las masas en movimiento constituye una parte significante del trabajo total de las fuerzas exteriores. Por otra parte, la velocidad de variación de la carga se puede relacionar con la velocidad con que transcurren las deformaciones plásticas La carga puede considerarse de variación rápida si durante el tiempo de carga del sólido, las deformaciones plásticas

no tienen tiempo de desarrollarse completamente. Esto influye sensiblemente sobre el carácter de las dependencias observadas entre las deformaciones y las tensiones.

El primer criterio de clasificación de las cargas de variación rápida se emplea fundamentalmente para el análisis de las oscilaciones de los cuerpos elásticos (capítulo XV), el segundo, al estudiar las propiedades mecánicas de los materiales durante los procesos de deformación rápida.

Puesto que en el caso de solicitaciones rápidas, las deformaciones plásticas no tienen tiempo para desarrollarse plenamente, al aumentar la velocidad de deformación, el material se hace más frágil, disminuyendo así la magnitud de δ. Como el deslizamiento de las partículas de la probeta en los planos inclinados se dificulta, deberá aumentar en cierta medida la mangitud de la carga de rotura. Esto se ilustra, comparando los diagramas de tracción para las cargas de variación lenta y las cargas de variación rápida (fig. 67).

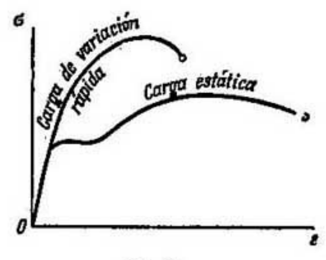


Fig. 67.

La influencia de la velocidad de las deformaciones es más apreciable cuando se trata de temperaturas altas. En el metal calentado, incluso cuando se trata de un aumento relativamente pequeño de la velocidad de solicitación, se observa la tendencia que tienen σ_{rt} y δ, la primera a aumentar y la segunda a disminuir.

El último de estos tres tipos de carga corresponde a las cargas que varían de manera ultrarrápida en función del tiempo. La velocidad de variación de estas cargas es tan grande que el trabajo de las fuerzas exteriores se transforma casi plenamente en energía cinética de las partículas que se encuentran en movimiento, mientras que la energía de las deformaciones plásticas y elásticas resulta relativamente pequeña.

Las cargas de variación ultrarrápida aparecen durante el choque de los cuerpos que se mueven con velocidades del orden de varios cientos de metros por segundo y mayores. Estas cargas aparecen generalmente cuando se estudian los problemas de penetración sobre corazas, al juzgar sobre la acción destructora de la onda de explosión, en las investigaciones de la capacidad de penetración del polvo interplanetario que se encuentra en los caminos cósmicos.

Como la energía de la deformación del material cuando se trata de solicitaciones ultrarrápidas, es relativamente pequeña, las propiedades del material, como un cuerpo sólido, tienen en este caso

una importancia secundaria. Aparecen en un primer plano las leyes del movimiento del medio fácilmente deformable (casi líquido) y adquieren gran importancia los problemas relacionados con el estado físico y las propiedades físicas del material en las nuevas condiciones. Así pues, los problemas relacionados con las cargas de variación ultrarrápida se salen fuera de los marcos de la resistencia de materiales y se encuentran en la esfera de los problemas físicos.

§ 19. Coeficiente de seguridad

Mediante los ensayos a tracción y compresión se obtienen los datos fundamentales sobre las propiedades mecánicas del material. Veamos ahora el problema sobre el empleo de los resultados de los ensayos obtenidos en los cálculos prácticos de la resistencia de las construcciones.

Como ya se indicó en el § 7, el método de cálculo fundamental y más difundido es el basado en las tensiones. Según este método, el cálculo de la resistencia se realiza por la tensión máxima σ_{max} que surge en cierto punto de la estructura solicitada. La tensión σ_{max} se denomina tensión máxima de trabajo. Esta no debe superar cierto valor, propio del material dado y de las condiciones de trabajo de la construcción.

El cálculo basado sobre las tensiones se realiza según el esquema

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_L}{n},$$

siendo σ_L cierto valor límite de la tensión para el material dado y n, un número mayor que la unidad denominado *coeficiente de seguridad*. Generalmente ocurre que las dimensiones de la estructura son conocidas y están determinadas, digamos, partiendo de criterios de mantenimiento o de tecnología. En estos casos el cálculo tiene carácter comprobatorio. Se determina la magnitud de σ_{max} y se halla el coeficiente de seguridad efectivo,

$$n = \frac{\sigma_L}{\sigma_{max}}.$$

Si este coeficiente satisface al constructor, se considera que el cálculo comprobativo dio un resultado positivo.

Cuando la estructura se encuentra en la etapa de diseño y ciertas dimensiones características deben determinarse directamente de la condición de resistencia, la magnitud de n se fija previamente. La dimensión que se busca se determina de la condición,

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma],$$

siendo

$$[\sigma] = \frac{\sigma_L}{n}.$$

Esta magnitud se denomina *tensión admisible.*

No queda más que resolver el problema de qué tensión considerar como límite (σ_L) y cómo fijar el valor de n. Para evitar que en la estructura aparezcan deformaciones residuales considerables, entendremos por σ_L, en el caso de materiales plásticos, el límite de fluencia. Entonces la máxima tensión de trabajo constituirá la n-ésima parte de σ_{ft} (fig. 68). El coeficiente en este caso se designa por n_f y se denomina *coeficiente de seguridad referido al límite de*

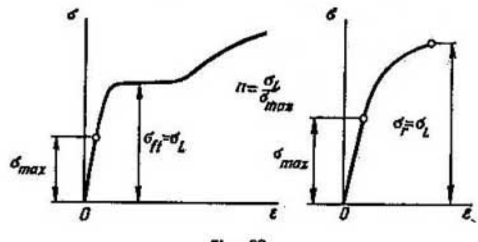


Fig. 68.

fluencia. En el caso de materiales frágiles y en algunos casos cuando se trata de materiales de plasticidad moderada por σ_L se entiende el límite de resistencia σ_{rt}. Entonces obtendremos,

$$n_r = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{max}},$$

siendo n_r, *el coeficiente de seguridad* referido al límite de resistencia.

Como se dijo en el § 7, el cálculo por tensiones no es el único posible.

Si se realiza el cálculo partiendo de las cargas límites, entonces se podrá de la misma forma introducir el concepto de seguridad (reserva) referido a la carga límite

$$n = \frac{P_L}{P_{trab}},$$

siendo P_L y P_{trab} la carga límite y la carga de trabajo respectivamente. En el caso de que se calcule por rigidez

$$n = \frac{\delta_L}{\delta_{trab}},$$

siendo δ_L y δ_{trab} los desplazamientos límite y el de trabajo, respectivamente.

La elección de n se realiza basándose en toda una serie de criterios que, en la mayoría de los casos, salen fuera de los problemas que se estudian en la resistencia de materiales.

El coeficiente de seguridad no puede ser señalado sin contar con las condiciones concretas de trabajo de la estructura que se calcula.

El coeficiente n se establece de hecho basándose en la práctica que existe de creación de estructuras análogas en períodos anteriores y teniendo en cuenta el nivel de desarrollo de la técnica en el período dado. En cada rama de la técnica ya se han asentado sus tradiciones, sus exigencias, sus métodos y, por último, la particularidad de sus métodos de cálculo, de acuerdo con los cuales se señala el coeficiente de seguridad. Así, por ejemplo, al diseñar las estructuras estacionarias, calculadas para un período largo de servicio, el coeficiente de seguridad se elige bastante grande ($n_r = 2 \div 5$). En la técnica de aviación, donde la construcción tiene limitaciones muy serias del peso, el coeficiente de seguridad se determina a partir del límite de resistencia y constituye una magnitud del orden de $1{,}5 \div 2$. Debido a la responsabilidad de este tipo de estructuras, en esta rama de la técnica se consolidó la práctica de los ensayos estáticos obligatorios de partes aisladas e incluso de naves aéreas enteras para la determinación directa de las cargas límites.

La elección del coeficiente de seguridad depende también de los métodos de cálculo de las tensiones, de la exactitud de estos métodos y de la seriedad de las consecuencias que implicaría la rotura de la estructura.

La magnitud del coeficiente de seguridad depende también de las propiedades del material. En el caso de materiales plásticos, la reserva respecto al límite de fluencia puede ser menor que en el caso de una pieza de un material frágil. Esto es obvio ya que el material frágil es más sensible a los distintos tipos de averías fortuitas y a los defectos imprevistos de la producción. La elevación casual de las tensiones en un material plástico puede crear solamente pequeñas deformaciones residuales, mientras que en el caso de un material frágil puede conducir a la destrucción directa.

El estudio de las cuestiones relacionadas con la elección concreta del coeficiente de seguridad pertenecen a asignaturas como la resistencia de los aviones, la resistencia de las construcciones y otras. El acierto en la determinación del coeficiente de seguridad depende en gran medida de la práctica y del arte del diseñador y del constructor.

Capítulo II

TORSION

§ 20. Deslizamiento (distorsión) puro y sus particularidades

En el ejemplo de tracción y compresión se obtuvieron algunas propiedades esenciales del estado tensional. En la tracción, según la orientación de los planos en las caras del elemento rectangular que se separa (fig. 33) surgen tanto tensiones normales como tangenciales. Estas últimas, independientemente de la magnitud de las tensiones normales, se someten a la condición de reciprocidad (véase § 12).

Supongamos ahora que disponemos de un estado tensional en el cual, sobre las caras del elemento elegido, aparecen solamente tensiones tangenciales τ (fig. 69). Este estado tensional se denomina *deslizamiento puro* o *distorsión pura* *).

La manera más fácil de obtener el deslizamiento puro homogéneo consiste en cargar una placa enmarcada en un cuadro de listones rígidos articulados (fig. 70). En todos los puntos de la placa las tensiones tangenciales τ serán iguales a

Fig. 69.

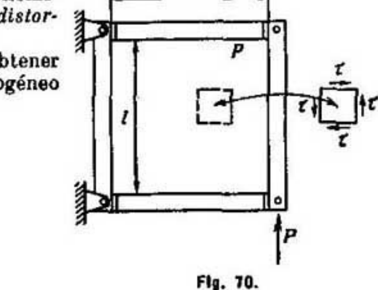


Fig. 70.

$$\tau = \frac{P}{l\delta},$$

*) Una definición más rigurosa de la distorsión pura se dará en el capítulo VII (§ 52), tomando como base la teoría general del estado tensional.

siendo δ, el espesor de la placa. Solamente en la zona que limita directamente con el marco, el estado tensional será distinto al deslizamiento puro. Sin embargo, de acuerdo con el principio de Saint Venant, estas desviaciones tienen un carácter puramente local y afectan a una zona que es pequeña en comparación con las dimensiones generales de la placa tensionada.

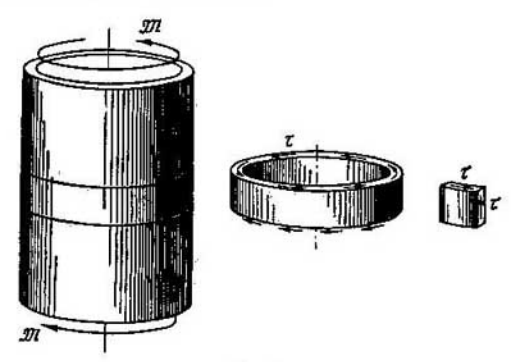


Fig. 71.

Otro ejemplo que ilustra el estado tensional homogéneo de deslizamiento puro es el de un tubo cilíndrico de paredes delgadas, solicitado por momentos aplicados en los planos laterales (fig. 71). Aquí y en adelante, el momento exterior, para diferenciarlo del momento interior, se anotará con la letra $\mathfrak{M}$.

La magnitud de la tensión τ se determina de la condición de igualdad del momento originado por las fuerzas interiores distribuidas uniformemente en la sección transversal y el momento exterior $\mathfrak{M}$,

$$\tau = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi R^2 \delta}, \tag{2.1}$$

siendo R, el radio del tubo y δ, su espesor.

Veamos ahora como, en el caso del deslizamiento puro, varían las tensiones en función de la orientación de los planos. Para ello, separamos de la placa que se encuentra en el estado de deslizamiento puro, un prisma triangular elemental ABC (fig. 72).

Según la condición, sobre las caras AB y BC actúan solamente tensiones tangenciales τ. Sobre la cara AC, en función del ángulo α, pueden actuar tanto tensiones normales como tangenciales que anotaremos por σ_α y τ_α respectivamente.

Proyectemos ahora todas las fuerzas que actúan sobre el prisma, sobre los ejes n y t. De las condiciones de equilibrio obtendremos,

$$\sigma_\alpha AC = \tau AB \operatorname{sen} \alpha + \tau BC \cos \alpha;$$
$$\tau_\alpha AC = \tau AB \cos \alpha - \tau BC \operatorname{sen} \alpha.$$

Los segmentos AB y BC están relacionados con AC como sigue:

$$AB = AC \cos \alpha, \quad BC = AC \operatorname{sen} \alpha$$

y, por lo tanto,

$$\sigma_\alpha = \tau \operatorname{sen} 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha.$$

Cuando $\alpha=0$ y $\alpha=90°$, las tensiones σ_α y τ_α adquieren los valores

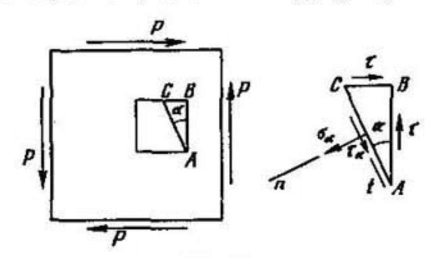


Fig. 72.

correspondientes a los planos iniciales, es decir, $\sigma_\alpha=0$ y $\tau_\alpha=\tau$. Cuando $\alpha=\pm45°$, las tensiones tangenciales serán $\tau_\alpha=0$ y la tensión normal, $\sigma_\alpha=\pm\tau$. Por lo tanto, si separamos de la placa un elemento rectangular cuyas caras estén giradas 45° respecto a los planos iniciales, entonces en estos planos surgirán solamente tensiones normales. En dos de ellos, las tensiones serán de tracción y en los otros dos, de compresión. Así pues, el deslizamiento puro se puede interpretar como tracción y compresión simultáneas en dos direcciones ortogonales (fig. 73).

Analicemos las deformaciones que acompañan al deslizamiento puro. La tensión tangencial τ está relacionada con la deformación angular γ por medio de la relación (1.13)

$$\tau = G\gamma,$$

siendo G, como ya sabemos (§ 12), la magnitud $\frac{E}{2(1+\mu)}$.

Como resultado de las deformaciones angulares, la placa representada en la figura 70 sufre una distorsión, mientras que las secciones transversales extremas del tubo (fig. 71) reciben ciertos desplazamientos angulares mutuos φ.

El carácter de los desplazamientos que surgen como consecuencia de esto se indica en la figura 74, resultando que

$$\varphi = \frac{\gamma l}{R}. \tag{2.2}$$

En el deslizamiento puro, como en la tracción (y en el caso de cualquier estado tensional) en el cuerpo deformado se acumula cierta

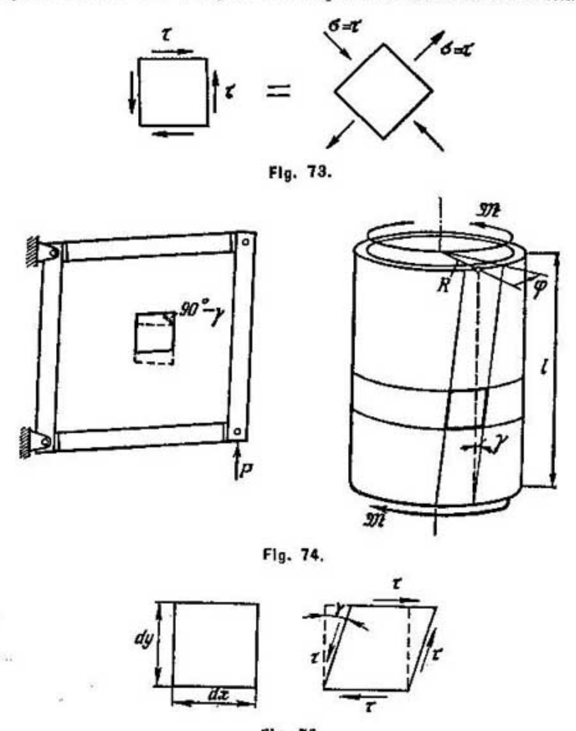


Fig. 73.

Fig. 74.

Fig. 75.

energía potencial elástica que se obtiene fácilmente analizando la variación de la forma del elemento rectangular de dimensiones dx, dy y espesor δ (fig. 75).

Consideremos que la cara inferior del elemento, no se desplaza. Entonces, al desplazarse la cara superior, la fuerza $\tau dx \delta$ realizará

cierto trabajo en el desplazamiento γdy. Puesto que la fuerza varía proporcionalmente al desplazamiento, el trabajo realizado por ella será la mitad del producto $\tau\, dx\delta \cdot \gamma dy$ (§ 10). Es decir, que la energía potencial de la deformación, acumulada en el elemento será,

$$dU = \frac{1}{2} \tau\gamma\, dx\, dy\, \delta.$$

La energía por unidad de volumen será,

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau\gamma$$

y expresando ahora γ por τ según la ley de Hooke, obtendremos

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G} . \qquad (2.3)$$

La magnitud U_0 $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}^3}$ se denomina *energía potencial unitaria del desplazamiento puro.*

Al igual que en el caso de tracción y compresión, en el caso del deslizamiento puro se pueden realizar también ensayos del material. Para ello, lo más cómodo es ensayar un tubo de paredes finas (fig. 76).

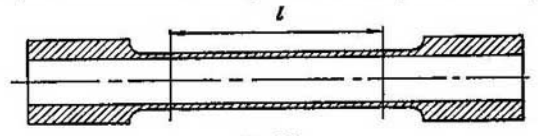


Fig. 76.

Si al realizar los ensayos se mide la magnitud del momento $\mathfrak{M}$ y la del ángulo de giro de las secciones φ correspondientes a la longitud l, se podrá construir así el diagrama $\mathfrak{M} = f(\varphi)$ correspondiente a la probeta. Después este diagrama fácilmente se transforma de acuerdo con las expresiones (2.1) y (2.2) en otro diagrama que relaciona a τ y γ. Así se puede obtener el diagrama del deslizamiento puro $\tau = f(\gamma)$ para el material dado.

Comparando el diagrama del deslizamiento puro con el de la tracción, para un mismo material, se demuestra que éstos son, desde el punto de vista cualitativo, semejantes. En el diagrama del deslizamiento puro también aparece la zona elástica, la zona de fluencia y la zona de endurecimiento del material.

Como en la tracción, en el deslizamiento puro se pueden introducir también las características: límite de proporcionalidad en el deslizamiento puro, límite de elasticidad, límite de fluencia, etc.

Antes, cuando el estudio de la mecánica de los cuerpos deformables se encontraba en su etapa inicial, esa era la práctica. Pero en adelante se demostró que las características correspondientes al des-

lizamiento puro están relacionadas con las de la tracción. En la actualidad, la teoría de la plasticidad (véase el cap. XII) permite construir teóricamente el diagrama del deslizamiento puro, partiendo del diagrama de tracción y expresar todas las características del deslizamiento puro por las características mecánicas de la tracción, bien conocidas por nosotros. Igualmente, las tensiones admisibles y los coeficientes de seguridad correspondientes al deslizamiento puro pueden relacionarse con las magnitudes correspondientes de la tracción simple. Estas cuestiones se analizarán con detalle en el capítulo XII.

§ 21. Torsión de una barra de sección transversal circular

Se entiende por torsión el caso de solicitación cuando en las secciones transversales de la barra aparece solamente un momento torsor. El resto de los factores de fuerza (momento flector, fuerza axial y fuerza cortante) es igual a cero.

Para el momento torsor, independientemente de la forma de la sección, se admite la regla siguiente para los signos. El momento M_t

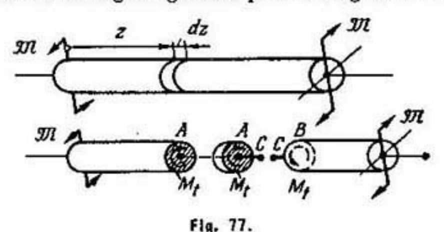


Fig. 77.

que gira en dirección contraria a las manecillas del reloj, cuando se le observa desde la normal exterior a la sección transversal, se considera positivo. Cuando gira en dirección contraria se considera negativo.

En la figura 77 está representada una barra solicitada en sus extremos por los momentos 𝔐. Si miramos al plano A desde la normal exterior (o sea desde el punto C) veremos que el momento M_t gira según las manecillas del reloj, es decir, que es de signo negativo. El mismo resultado se obtiene si miramos desde el punto C al plano B.

Al construir en diagrama de los momentos torsores es necesario atenerse a esta regla para los signos de los momentos. En la figura 78 se dan algunos ejemplos de solicitación de la barra por momentos exteriores. Los momentos están representados por dos círculos. El círculo que contiene un punto representa una fuerza dirigida *hacia*

el observador, el círculo con una cruz, una fuerza dirigida *desde* el observador. En la figura 78 están representados los diagramas de los momentos torsores correspondientes. Las ordenadas de los momentos positivos se sitúan hacia arriba.

Al calcular una barra a torsión es necesario resolver dos problemas fundamentales: determinar las tensiones que aparecen en la barra,

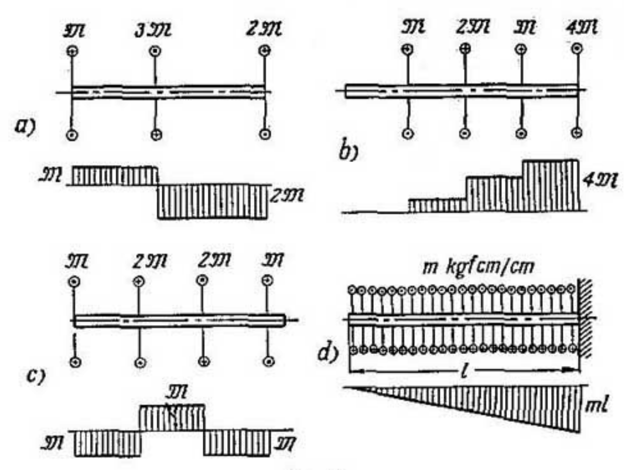


Fig. 78.

por una parte y calcular los desplazamientos angulares en función de los momentos exteriores, por otra. Estos problemas se resuelven de manera distinta según sea la configuración de la sección transversal de la barra. El caso más simple es el de la sección circular, así como el de las barras de paredes delgadas.

El mecanismo de la deformación de la barra de sección circular se puede interpretar de la manera siguiente: consideramos que, como resultado de la acción de los momentos exteriores, cada sección transversal de la barra gira sin deformarse en su plano cierto ángulo. Este ángulo será distinto para las distintas secciones. Esto es una hipótesis o suposición justificada por los razonamientos lógicos sobre el carácter de los desplazamientos que ocurren.

El criterio definitivo sobre la veracidad de tal o cual hipótesis es siempre la práctica. Una vez obtenida la fórmula de cálculo es necesario, ante todo, comparar los resultados del cálculo con los experimentales y si entre ellos hay suficiente concordancia, la hi-

pótesis se considera aceptable. En este caso, la hipótesis admitida se llama *hipótesis de las secciones planas.*

Es necesario señalar que el problema de la torsión de una barra se puede resolver no solamente con los métodos de la resistencia de materiales, sino también con los métodos de la teoría de la elasticidad, sin recurrir de antemano a ninguna clase de hipótesis, excepto la hipótesis sobre la composición continua del material. La solución que se obtiene por este método demuestra que la sección transversal circular de la barra se mantiene, en efecto, plana y gira sin deformarse. En las secciones transversales surgen solamente tensiones tangenciales.

Volvamos a la barra de sección transversal circular, solicitada en sus extremos por dos momentos (fig. 77). En las secciones transversales de esta barra surge el momento torsor constante

$$M_t = \mathfrak{M}.$$

Separemos de la barra un elemento de longitud dz originado por dos secciones transversales y de él, a su vez, mediante dos planos cilíndricos de radios ρ y $\rho + d\rho$, separamos un anillo elemental como el de la figura 79.

La sección extrema derecha del anillo gira, en el caso de torsión respecto a la sección izquierda un ángulo $d\varphi$. La generatriz del cilindro AB girará entonces un ángulo γ pasando a ocupar la posición AB'. El segmento BB' es igual, por un lado, a $\rho d\varphi$ y por otro, a γdz. Por lo tanto,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

El ángulo γ representa el ángulo de distorsión de la superficie cilíndrica. La magnitud $\frac{d\varphi}{dz}$ se anota generalmente por θ,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \theta, \tag{2.4}$$

y se denomina *ángulo de torsión unitario.* Este es el ángulo de giro mutuo de dos secciones referido a la distancia entre ellas. La magnitud θ es análoga al alargamiento unitario en la tracción $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$. Introduciendo la notación θ, hallaremos,

$$\gamma = \rho\theta. \tag{2.5}$$

Según la ley de Hooke para el deslizamiento,

$$\tau = G\theta\rho \tag{2.6}$$

siendo τ, la tensión tangencial que surge en la sección transversal de la barra. Las tensiones recíprocas a éstas aparecen en las secciones longitudinales (axiales) (fig. 79).

Las fuerzas elementales $\tau\, dF$ (fig. 80) se reducen a un momento torsor,

$$M_t = \int_F \tau\rho\, dF.$$

La integración abarca todo el área de la sección transversal F. Introduciendo en la función integrando la tensión τ de la expre-

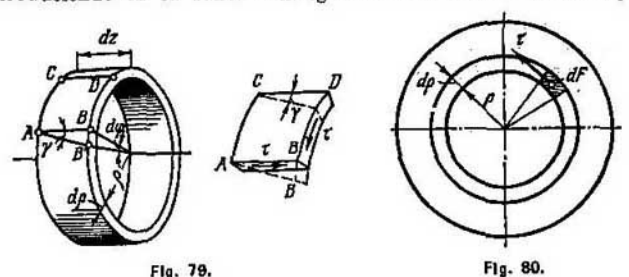


Fig. 79. Fig. 80.

sión (2.6) hallaremos,

$$M_t = G\theta \int_F \rho^2\, dF.$$

La integral $\int_F \rho^2\, dF$ es una característica puramente geométrica y se denomina *momento polar de inercia de la sección*,

$$\int_F \rho^2\, dF = I_p \text{ cm}^4. \tag{2.7}$$

Así pues, se obtiene

$$M_t = GI_p\theta,$$

ó

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p}. \tag{2.8}$$

El producto GI_p se denomina *rigidez de la barra a la torsión*.

El ángulo de giro mutuo de las secciones φ fácilmente se expresa a través del ángulo de torsión unitario θ, de acuerdo a las expresiones (2.4) y (2.8)

$$d\varphi = \frac{M_t\, dz}{GI_p}, \tag{2.9}$$

de donde hallamos

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_t\, dz}{GI_p}, \tag{2.10}$$

siendo l, la distancia entre las secciones para las cuales se determina el ángulo de giro mutuo φ.

Si el momento torsor no varía a lo largo de la barra, $M_t = \mathfrak{M}$, y si la rigidez es constante, entonces

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M} l}{G I_p} . \qquad (2.11)$$

Volvamos ahora a la expresión (2.6). Despejando de ella θ, obtendremos,

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p} . \qquad (2.12)$$

Así pues, las tensiones tangenciales en la sección transversal se distribuyen a lo largo del radio linealmente y tienen su máximo valor en los puntos más alejados del eje de la barra (fig. 81.)

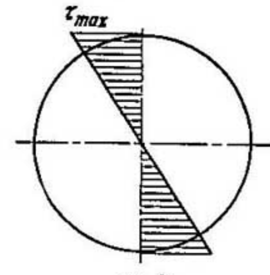


Fig. 81.

Fig. 82.

Al mismo tiempo,

$$\tau_{max} = \frac{M_t \rho_{max}}{I_p} .$$

La magnitud

$$\frac{I_p}{\rho_{max}} = W_p \text{ cm}^3 \qquad (2.13)$$

se denomina *módulo polar de la sección*. Definitivamente se obtiene,

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \qquad (2.14)$$

Las fórmulas (2.11) y (2.14) son fundamentales para el cálculo de la barra torsionada de sección transversal circular. Ellas son válidas tanto para la barra de sección maciza como para las barras huecas de sección circular.

Calculemos ahora las magnitudes de las características geométricas de la sección I_p y W_p. Para ello sustituimos en la expresión (2.7) dF por el área del anillo $2\pi\rho \, d\rho$ (fig. 80). Si la barra es de sección circular maciza, entonces,

$$I_p = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho^3 \, d\rho ,$$

siendo D el diámetro de la sección. Así pues,

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}. \tag{2.15}$$

Si la barra es hueca de diámetro interior d (fig. 82), entonces

$$I_p = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 \, d\rho$$

ó

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \tag{2.16}$$

De acuerdo a estas expresiones determinamos el módulo polar de la sección W_p [véase la fórmula (2.13)]. En el caso de la sección maciza,

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0{,}2D^3 \tag{2.17}$$

y en el de la sección anular (árbol hueco),

$$W_p \approx 0{,}2D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \tag{2.18}$$

Así pues, de las expresiones (2.11) y (2.15) se deduce que para un momento torsor dado, las deformaciones angulares del árbol son

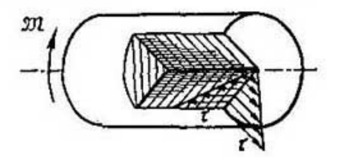


Fig. 83.

inversamente proporcionales a la cuarta potencia del diámetro. La tensión máxima es, según las expresiones (2.14) y (2.17), inversamente proporcional al cubo del diámetro D.

Las tensiones tangenciales en las secciones transversales de la barra se orientan en cada punto perpendicularmente al radio variable ρ. De la condición de reciprocidad se deduce que tensiones tangenciales iguales a éstas aparecen también en las secciones longitudinales de la barra (fig. 83). La existencia de dichas tensiones se revela, por ejemplo, al ensayar a torsión las probetas de madera. La madera, como se sabe, tiene una anisotropía muy acentuada en lo que se refiere a las propiedades elásticas y de resistencia. Tiene relativamente poca resistencia a cortadura a lo largo de las fibras. Por

eso la destrucción de la probeta durante la torsión comienza por la formación de grietas longitudinales (fig. 84).

Si con dos pares de secciones axiales y transversales separamos de la barra torsionada el elemento $ABCD$ representado en la figura 85, entonces en sus caras se observarán solamente tensiones tangenciales. Así pues, todos los elementos de la barra, en el caso de torsión, se encontrarán en las condiciones del deslizamiento puro, como en el caso de la torsión de un tubo. Pero en este caso, sin embargo, no se trata del deslizamiento puro homogéneo ya que τ varía a lo largo del radio de la sección transversal.



Fig. 84.

Del parágrafo anterior sabemos ya que si se varía la orientación de la sección, girándola en el plano del deslizamiento puro 45°, entonces en los nuevos planos aparecerán solamente tensiones normales de magnitud igual a τ. Una de ellas resulta ser de tracción y la otra de compresión. De acuerdo a lo dicho, en las caras del elemento $A_1B_1C_1D_1$ separado de la barra por secciones helicoidales giradas 45° respecto a la generatriz, surgirán las tensiones normales indicadas en la figura 85.

Una ilustración clara de esto nos la da el carácter de la destrucción de las probetas frágiles durante la torsión. Los materiales frágiles se destruyen generalmente por las superficies de las tensiones máximas de tracción. Si se ensaya una probeta de un material frágil, por ejemplo, de hierro fundido, la destrucción de la probeta ocurrirá por una superficie helicoidal compleja que corresponde a las tensiones máximas de tracción (fig. 86).

La existencia de tensiones de tracción y compresión en los planos inclinados, durante la torsión, se puede ilustrar también de otra forma. Sobre la superficie del cilindro de un material plástico (fig. 87) se dibujan toda una serie de círculos que durante la torsión de la barra se convierten en elipses cuyos ejes principales se orientan a 45° respecto a las generatrices. En la dirección de los ejes mayores de la elipse ocurre un alargamiento y en la dirección de los ejes menores una compresión.

La energía potencial de la deformación, acumulada en la barra durante la torsión, se determina de manera idéntica a como se determinó en el caso de tracción. Veamos un tramo de la barra torsionada de longitud dz (fig. 88). La energía acumulada en este elemento de la barra, será igual al trabajo de los momentos M_t, aplicados sobre

los extremos,

$$dU = \frac{1}{2} M_t \, d\varphi,$$

siendo $d\varphi$ el ángulo de giro mutuo de las secciones. El coeficiente

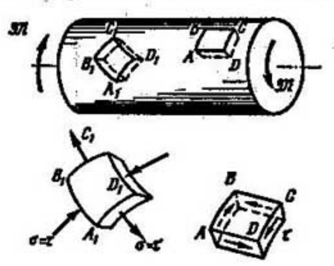


Fig. 85.

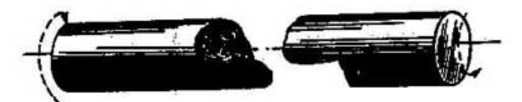


Fig. 86.

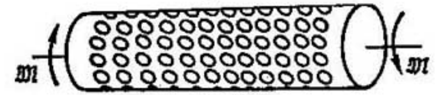


Fig. 87.

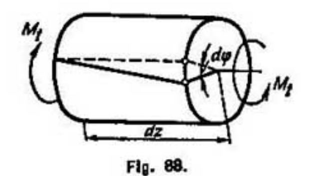


Fig. 88.

$^1/_2$ que figura en la expresión es consecuencia de que el momento M_t varía proporcionalmente a $d\varphi$.

Introduciendo en la expresión obtenida $d\varphi$ (2.9), hallaremos,

$$dU = \frac{M_t^2 \, dz}{2GI_p}. \tag{2.19}$$

La energía potencial en toda la barra se obtiene integrando la expresión (2.19) a lo largo de la barra, es decir,

$$U=\int_0^l \frac{M_t^2\,dz}{2GI_p}\,. \tag{2.20}$$

Si el momento M_t no varía a lo largo de la barra y la rigidez de ésta es constante, entonces $M_t=\mathfrak{M}$ y

$$U=\frac{\mathfrak{M}^2 l}{2GI_p}\,.$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. Un árbol transmite el momento $\mathfrak{M}=1000$ kgf·m. Calcular las dimensiones de la sección transversal del árbol en dos casos: a) cuando el árbol es macizo de sección circular y b) cuando la sección es hueca ($d={}^7/_8 D$). Compárense las dos secciones desde el punto de vista del consumo de metal. La tensión admisible es $[\tau]=600$ kgf/cm².

Por la fórmula (2.14) se obtiere para las dos secciones,

$$W_p=\frac{M_t}{[\tau]}=\frac{100\,000}{600}=167\ \text{cm}^3.$$

En el caso de la sección maciza hallamos según (2.17),

$$D^3=\frac{167}{0,2}=833\ \text{cm}^3;\quad D=9,43\ \text{cm}$$

y para la sección hueca, partiendo de (2.18),

$$D^3=\frac{167}{0,2\left(1-\frac{7^4}{8^4}\right)}=2\,020\ \text{cm}^3;\quad D=12,7\ \text{cm}.$$

El consumo de metal es proporcional al área de la sección transversal. En el primer caso se obtiene,

$$F=\frac{\pi D^2}{4}=69,8\ \text{cm}^2,$$

y en el segundo,

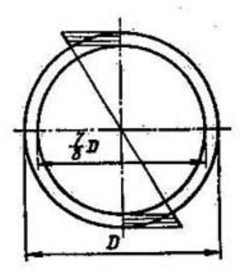
$$F=\frac{\pi D^2}{4}\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)=29,4\ \text{cm}^2.$$

Así pues, la sección hueca resulta más económica y en este caso $\left(\frac{d}{D}=\frac{7}{8}\right)$ disminuye en más del doble el consumo de metal.

El hecho de que el árbol hueco resulta más conveniente que el macizo se ve claramente, analizando el diagrama de las tensiones en la sección del árbol (fig. 89). En la parte central de la sección del árbol macizo, el material permanece poco cargado y su aprovechamiento está lejos de ser suficiente. En el caso de la sección hueca las tensiones se distribuyen de manera más uniforme (fig. 89) y el grado de aprovechamiento del material es más alto.

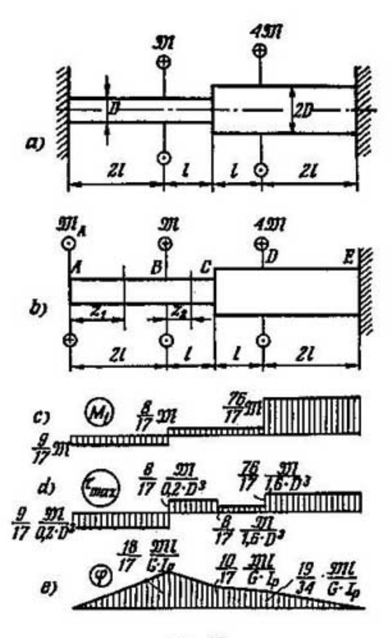
Ejemplo 2.2. Construir el diagrama de los momentos torsores, tensiones y ángulos de giro para el árbol representado en la figura 90, *a*.

El grado de hiperestaticidad del sistema es uno. Para vencer la hiperestaticidad retiramos el empotramiento izquierdo y lo sustituimos por el momento $\mathfrak{M}_A$



7/8 D
D

Fig. 89.



a)
𝔐
4𝔐
D
2D
2l
l
l
2l
b)
𝔐A
𝔐
4𝔐
A
B
C
D
E
z1
z2
2l
l
l
2l
c)
M1
8/17 𝔐
76/17 𝔐
9/17 𝔐
d)
τmax
8/17 𝔐/0,2·D³
76/17 𝔐/1,6·D³
9/17 𝔐/0,2·D³
8/17 𝔐/1,6·D³
e)
φ
18/17 𝔐l/G·Ip
10/17 𝔐l/G·Ip
19/34 𝔐l/G·Ip

Fig. 90.

(fig. 90, *b*). Este momento se determina de la condición de que el ángulo de giro de la sección extrema izquierda respecto a la sección de la derecha es igual a cero.

El ángulo de giro de la sección *A* se puede obtener como la suma algebraica de los ángulos de giro mutuos de las secciones extremas de los tramos *AB*, *BC*, *CD* y *DE*.

Por la fórmula (2.11) se obtiene para estos tramos,

$$\frac{\mathfrak{M}_A 2l}{GI_p}+\frac{(\mathfrak{M}_A-\mathfrak{M})\,l}{GI_p}+\frac{(\mathfrak{M}_A-\mathfrak{M})\,l}{GI_p'}+\frac{(\mathfrak{M}_A-5\mathfrak{M})\,2l}{GI_p'}=0,$$

siendo GI_p, la rigidez en el tramo de diámetro D y GI_p', la rigidez en el tramo de diámetro $2D$. Es obvio que,

$$GI_p'=16GI_p.$$

Teniendo esto en cuenta hallaremos,

$$\mathfrak{M}_A=\frac{9}{17}\mathfrak{M}.$$

Ahora es fácil ya construir el diagrama de los momentos torsores (fig. 90, *c*) y por la fórmula (2.14) determinar τ_{max} en todas las secciones del árbol (fig. 90, *d*).

Al analizar el diagrama de las tensiones construido, se debe tener en cuenta que en las zonas de empotramiento del árbol y en las zonas de aplicación de los momentos exteriores las leyes reales de distribución de las tensiones en las secciones transversales no coinciden con las leyes lineales obtenidas. Pero según el principio de Saint Venant, estas desviaciones tienen carácter local y, prácticamente, no se propagan a lo largo del eje a más de una distancia del orden del diámetro de la barra.

Determinamos ahora en el primer tramo el ángulo de giro de la sección situada a la distancia z_1 del empotramiento,

$$\varphi_z=\frac{\mathfrak{M}_A z_1}{GI_p}=\frac{9\mathfrak{M}z_1}{17GI_p}.$$

Esta dependencia se representa por la recta del diagrama de φ (fig. 90, *e*). Cuando $z_1=2l$ obtendremos,

$$\varphi=\frac{18\mathfrak{M}l}{17GI_p}.$$

En el segundo tramo a este ángulo se le suma la magnitud

$$\frac{(\mathfrak{M}_A-\mathfrak{M})\,z_2}{GI_p},$$

donde z_2 se mide desde el extremo izquierdo del segundo tramo. Así, tramo por tramo, se construye el diagrama representado en la figura 90, *e*.

Ejemplo 2.3. Dado el sistema representado en la figura 91.

Entre las palancas absolutamente rígidas *AB* y *CD* queda el espacio Δ. Determinar el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la fuerza *P*, si son iguales las rigideces GI_p de los árboles *I* y *II*.

Cuando la fuerza *P* es pequeña, la holgura Δ no se cierra y trabaja solamente el árbol *II*. El desplazamiento en cuestión será $\delta=\varphi\, a$, o de acuerdo a la fórmula (2.11)

$$\delta=\frac{Pa^2}{GI_p}. \qquad \text{(A)}$$

Una vez cerrado el espacio, el sistema se convierte en hiperestático. Si M_I y M_{II} son los momentos torsores que surgen en los árboles *I* y *II*, de la condición

de equilibrio obtendremos,

$$M_I + M_{II} = Pa.$$

La ecuación de los desplazamientos será,

$$a\varphi_{II} - a\varphi_I = \Delta,$$

o de acuerdo con (2.11),

$$M_I - M_{II} = \frac{\Delta}{la} GI_p.$$

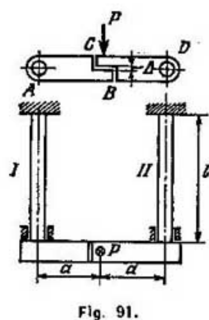


Fig. 91.

Fig. 92.

Eliminando M_I, obtendremos,

$$M_{II} = \frac{Pa}{2} - \frac{\Delta}{2la} GI_p.$$

El desplazamiento en cuestión sera,

$$\delta = \frac{M_{II} l}{GI_p} a = \frac{Pla^2}{2GI_p} - \frac{\Delta}{2}. \qquad \text{(B)}$$

La expresión (A) es aplicable mientras δ sea inferior a Δ, es decir, cuando

$$P < \frac{\Delta GI_p}{a^2 l}.$$

Si la fuerza supera esta magnitud, el desplazamiento se obtendrá ya por la fórmula (B). En la figura 92 está representado el desplazamiento δ en función de la fuerza P.

§ 22. Torsión de barras de sección transversal no circular

La determinación de las tensiones en una barra de sección no circular es de por sí un problema bastante complicado que no se puede resolver por los métodos de la resistencia de materiales. La causa radica en que, en el caso de una sección no circular, la hipótesis que en el caso de la sección circular permitió simplificar el problema sobre la invariabilidad de las secciones transversales pla-

nas, no es ya válida. Las secciones de la barra alabean y, en consecuencia varía notablemente la distribución de las tensiones en la sección. En calidad de ejemplo, en la figura 93, está representada una barra torsionada de sección transversal rectangular en cuya superficie se ha dibujado una red cuadriculada de líneas que se deforma conjuntamente con las partículas de la superficie del metal. Las líneas transversales de la red se curvan sensiblemente lo que indica que alabean también las secciones transversales de la barra.

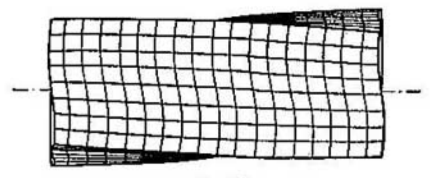


Fig. 93.

Así pues, al determinar los ángulos de distorsión, es necesario tener en consideración no solamente el ángulo de giro mutuo de las secciones, sino también la distorsión local, relacionada con el alabeo de las secciones. El problema se complica más aún por el hecho de que en el caso de una sección no circular las tensiones dependen no solamente de una variable (ρ), sino de las dos (x e y).

Expongamos ahora una serie de razonamientos generales sobre la distribución de las tensiones en las secciones transversales de configuración no circular y escribamos después las fórmulas que se obtienen por los métodos de la teoría de la elasticidad para los casos más frecuentes de secciones transversales de las barras.

En primer lugar, se puede probar fácilmente que las tensiones tangenciales en las secciones transversales, en los puntos situados en las proximidades del contorno de la sección tienen que estar orientadas obligatoriamente según la tangente a éste. En efecto, supongamos que en el punto A (fig. 94) la tensión tangencial τ cerca del borde de la sección va dirigida con cierta inclinación respecto al contorno. Descompongamos esta tensión en dos componentes, una según la tangente al borde (τ_t) y la otra, según la normal (τ_n).

De la ley de reciprocidad se deduce que en la superficie libre de la barra deberá aparecer una tensión tangencial $\tau_n' = \tau_n$. Pero como la superficie exterior está libre de carga y en ella no se aplica ninguna fuerza exterior excepto, puede ser, la presión atmosférica, resulta que $\tau_n' = 0$ y, por lo tanto, $\tau_n = 0$. Es decir, la tensión tangencial τ en las proximidades del borde se orienta según la tangente a éste.

De manera análoga se puede demostrar, que en el caso cuando la sección transversal tiene ángulos salientes, las tensiones tangenciales

en estos lugares son iguales a cero. Descomponiendo la tensión τ en las inmediaciones del ángulo (fig. 95) en dos componentes según las normales a los lados del ángulo, se obtienen las tensiones τ_1 y τ_2. Las tensiones recíprocas a estas τ_1' y τ_2' son nulas, es decir, serán nulas también las tensiones τ_1 y τ_2. Es decir, en las proximidades del ángulo saliente no existen tensiones tangenciales en la sección transversal de la barra.

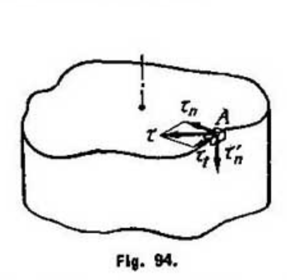


Fig. 94.

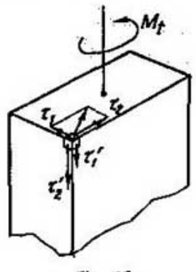


Fig. 95.

En la figura 96 está representado el diagrama de las tensiones tangenciales que se obtienen por los métodos de la teoría de la elasticidad para una barra de sección rectangular. En los ángulos, como vemos, las tensiones son iguales a cero, mientras que las tensiones máximas surgen en los centros de los lados mayores, es decir, en los puntos A,

$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha a b^2}. \quad (2.21)$$

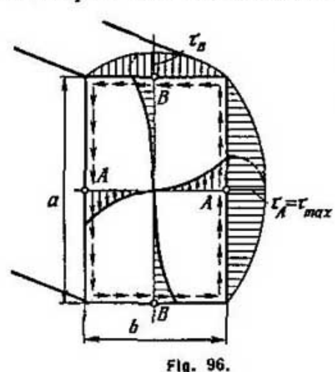


Fig. 96.

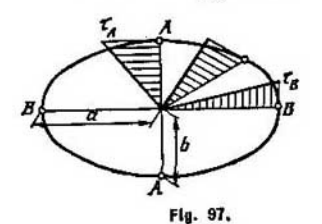


Fig. 97.

En el punto B obtendremos,

$$\tau_B = \eta \tau_{max}, \quad (2.22)$$

siendo a el lado mayor y b el lado menor del rectángulo.

Los coeficientes α y η dependen de la fracción a/b. Los valores de estos coeficientes están dados en la tabla 2.

Tabla 2

a/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0.299	0.307	0,313	0,333
β	0.141	0,196	0,214	0,229	0,249	0.263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

El desplazamiento angular se obtiene por la fórmula,

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}l}{G\beta b^3a}. \tag{2.23}$$

El coeficiente β también depende de la fracción a/b. Sus valores numéricos figuran en la tabla 2.

En el caso de una sección elíptica (fig. 97) la tensión máxima aparecerá en los puntos A, es decir, en los extremos del eje menor,

$$\tau_A=\tau_{\max}=\frac{2M_t}{\pi ab^2}.$$

Las tensiones en el punto B serán,

$$\tau_B=\frac{2M_t}{\pi ba^2},$$

siendo a y b los semiejes de la elipse.

El desplazamiento angular, en el caso de una barra de sección elíptica, es el siguiente

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}l}{G\dfrac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}}.$$

Cuando la sección tiene la forma de un triángulo equilátero de lado a, las tensiones tangenciales máximas surgen en los centros de los lados y son,

$$\tau_{\max}=\frac{20M_t}{a^3}.$$

El desplazamiento angular en este caso es,

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}l}{G\dfrac{\sqrt{3}}{80}a^4}.$$

Generalizando todas estas fórmulas se puede afirmar que en la torsión,

$$\tau_{\max}=\frac{M_t}{W_t}, \tag{2.24}$$

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}l}{GI_t} \tag{2.25}$$

y

$$M_t=GI_t\theta. \tag{2.26}$$

La energía potencial acumulada en la barra torsionada de acuerdo a la fórmula (2.20) será,

$$U = \int_0^l \frac{M_t^2\, dz}{2GI_t}, \qquad (2.27)$$

siendo W_t e I_t factores geométricos que dependen de la configuración de la sección y que se obtienen de la tabla 3 (página 112). En el caso de una sección circular W_t e I_t coincidirán con W_t e I_t respectivamente, es decir, con el módulo polar de la sección y con el momento polar de inercia.

§ 23. Breves nociones sobre la analogía de la membrana

Como la solución analítica del problema de la torsión de barras de sección no circular es muy complicada, surgió la necesidad de crear métodos indirectos para el estudio de este problema. Entre ellos ocupa el primer lugar el *método de las analogías.*

En los problemas de la mecánica se encuentran muy a menudo casos cuando problemas de naturaleza física completamente diferente se reducen a las mismas ecuaciones diferenciales. Entonces, entre estos problemas se puede establecer una analogía. Se puede, sin resolver la ecuación, afirmar que entre variables x_1 e y_1 de un problema existe la misma relación que entre variables x_2 e y_2 del otro. Entonces se dice que la variable x_2 es análoga a la variable x_1 y la variable y_2, análoga a la variable y_1. Ocurre a menudo que en el primer problema, sin resolver las ecuaciones, es difícil imaginarse la relación entre las variables x_1 e y_1, mientras que el contenido físico del otro problema admite una interpretación clara de la dependencia entre x_2 e y_2. En este caso, la analogía establecida permite representar claramente las leyes que rigen en el primer problema. Así, por ejemplo, ocurre en el problema de la torsión. Resulta, que independientemente de la forma de la sección en cuestión, el problema de la torsión de la barra nos lleva a la misma ecuación diferencial que el problema del equilibrio de una membrana estirada sobre un contorno de la misma configuración y solicitada por una presión uniformemente distribuida. El análogo de la tensión es el ángulo que forma la tangente a la superficie de la membrana con el plano del contorno y el análogo del momento torsor, el volumen contenido entre el plano del contorno y la superficie de la membrana.

El carácter de la deformación de la membrana sometida a la presión indicada siempre se le puede uno imaginar, si no de manera exacta, por lo menos de manera aproximada. Por lo tanto, siempre existe la posibilidad de imaginarse la ley de distribución de las tensiones en la torsión de una barra de sección de forma dada.

Supongamos, por ejemplo, que se necesita establecer la ley de distribución de las tensiones en la sección representada en la figu-

ra 98. Supongamos además que sobre el contorno indicado se estira una membrana sometida a una carga uniformemente distribuida. Veamos varias secciones de la membrana. En función de los ángulos



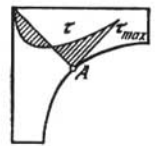


Fig. 98.

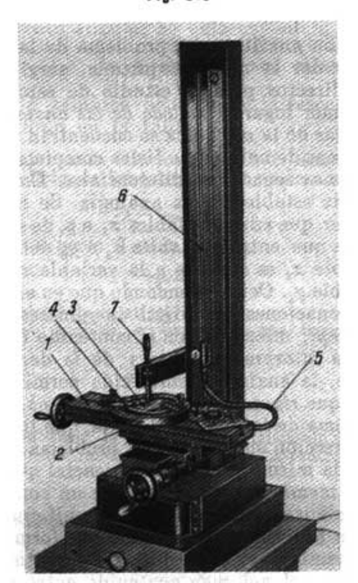


Fig. 99.

de inclinación de la membrana representamos de manera aproximada la distribución de las tensiones en la sección (fig. 98).

Mediante la analogía de membrana se pueden obtener no sólo resultados cualitativos, sino también relaciones cuantitativas. Para ello se emplea el dispositivo especial simple representado en la figura 99. Este dispositivo se compone de una mesa móvil *1*, en la cual

se coloca una caja plana *2* con una membrana de goma estirada *3*. La membrana se cierra por arriba con una tapa *4*, la cual tiene un orificio de forma igual a la sección que se estudia. En la figura 99 tiene la forma de un rectángulo. En la parte inferior de la caja conecta un tubo *5* comunicado con un manómetro de cristal *6*. Al levantar el tubo, aumenta la presión que actúa por debajo de la membrana, y esta se deforma. Es muy fácil realizar la medición de las flechas de la membrana. Esto se hace con el micrómetro vertical *7*. Las coordenadas del punto de la membrana se determinan por los desplazamientos longitudinales y transversales de la mesa. Una vez determinados los desplazamientos se pueden determinar también los ángulos de inclinación de la tangente respecto a la superficie de la membrana.

Si preparamos un tapón de forma igual a la de la sección y si se cierra con este tapón el orificio en la tapa superior, la membrana restablecerá su estado plano, desplazando así el líquido que se encuentra debajo de la membrana. El nivel del líquido en el tubo de cristal determina el volumen concluido entre la membrana deformada y el plano horizontal, que, como se dijo ya, es el análogo del momento torsor.

Los desplazamientos y volúmenes medidos dependen del espesor de la mebrana y de la magnitud de la tensión inicial de la membrana. Para eliminar la influencia de la rigidez de la membrana, simultáneamente a la sección que se estudia, en este mismo dispositivo se realizan las mediciones pertinentes de otra membrana circular. Como en el caso de una barra de seccion circular la rigidez y las tensiones se pueden obtener mediante el cálculo, resulta posible, comparando los resultados de las mediciones en ambos casos, obtener las características de la sección que interesa en función de las características de la sección circular, basándonos en razonamientos de proporcionalidad.

Así por ejemplo, el factor geométrico de la rigidez I_t de la sección que se analiza [véase la fórmula (2.25)] se determina de la relación,

$$\frac{I_t}{I_p}=\frac{V}{V_0},$$

siendo, $I_p=\frac{\pi D^4}{32}$ el momento polar de inercia del círculo; D, el diámetro de la membrana de sección circular, V y V_0, los volúmenes limitados por las membranas de la sección en cuestión y de la sección circular.

De manera análoga se obtiene el factor geométrico W_t [véase la fórmula (2.24)],

$$\frac{W_t}{W_p}=\frac{\alpha_{0\,max}}{\alpha_{max}}$$

siendo, $W_p=\frac{\pi D^3}{16}$ el módulo polar de la sección circular, α_{max}

y $\alpha_{\theta\,max}$, los ángulos máximos de inclinación de la tangente a la superficie de la membrana para la sección que se analiza y para la circular, que se obtienen de las correspondientes mediciones en el caso cuando los volúmenes limitados por las membranas son iguales.

La analogía expuesta no es la única. En el caso de la torsión de una barra, se pueden proponer también otras analogías relacionadas, por ejemplo, con las leyes hidrodinámicas de fluencia. En la teoría de la elasticidad, para la solución de ciertos problemas se emplean también las analogías electrostáticas, según las cuales las leyes de distribución de las tensiones en un cuerpo elástico se determinan, midiendo la magnitud del campo electrostático en los diversos puntos del espacio ocupado por el modelo.

La técnica moderna, en general, aprovecha ampliamente distintas analogías. Cuando en calidad de analogía se emplea un sistema creado artificialmente, el método de la analogía se denomina ya método de modelación. Este método se emplea para la investigación de muchos procesos complejos que no pueden ser observados a simple vista como, por ejemplo, el proceso de estabilización del cohete durante el vuelo. Los análogos de los ángulos de giro del cohete en el espacio son, en este caso, los potenciales eléctricos en determinados nudos de la instalación electrónica modeladora a propósito.

§ 24. Torsión de una barra de paredes delgadas

En la construcción de máquinas y, sobre todo, en la construcción de aviones, muy a menudo, resulta necesario calcular la torsión de las barras denominadas de paredes delgadas. Las formas típicas de los perfiles laminados, doblados, estirados y prensados se dan en la figura 100. La particularidad geométrica característica de estos perfiles consiste en que el espesor es muy inferior a las otras dimensiones lineales.

Estos perfiles se dividen en abiertos y cerrados. Los cuatro primeros perfiles de la figura 100 son abiertos y los últimos tres, cerrados.

El carácter de la distribución de las tensiones en la sección transversal de la barra de paredes delgadas se establece fácilmente por medio de la analogía de la membrana. Supongamos una placa plana con un orificio de configuración similar a la del perfil, sobre la cual se estira una membrana. Si aplicamos a la última una carga uniformemente distribuida, la membrana se deformará de manera distinta según sea el perfil cerrado o abierto. Esta diferencia se ilustra en la figura 101. Cuando se trata de un perfil cerrado, la zona dentro del perfil no está ligada con la exterior y se desplaza bajo la presión aplicada (fig. 101, *b*). Esto es lo que determina la diferencia cuantitativa entre las formas de la membrana para los casos de perfiles abiertos y cerrados.

En el caso de un perfil abierto, la membrana tiene sus máximos ángulos de inclinación en los extremos del segmento normal (fig. 101, *a*), resultando que, aproximadamente, en el centro del espesor tiene lugar el cambio del signo del ángulo de inclinación.

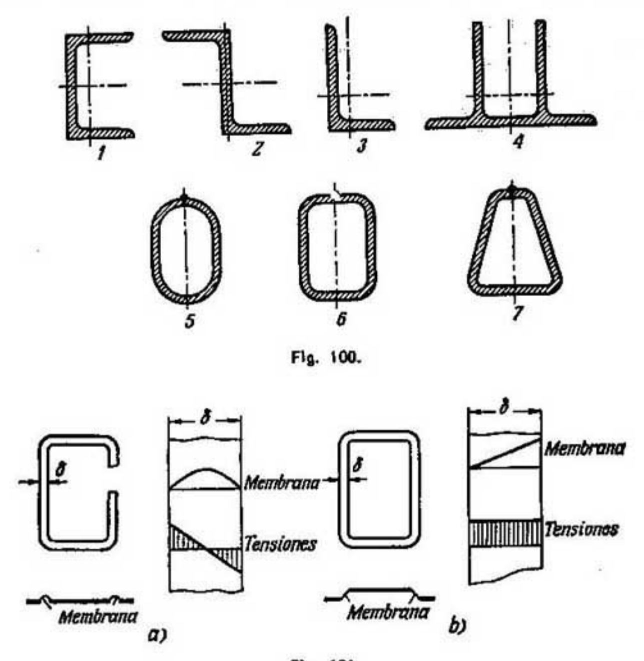


Fig. 100.

Fig. 101.

Con gran exactitud se puede admitir que las tensiones se distribuyen linealmente dentro del espesor de la pared del perfil abierto.

En el caso de un perfil cerrado la membrana se deforma de otra manera. La parte de la placa que se encuentra dentro del contorno, deberá considerarse aislada de la zona exterior y, al deformarse la membrana sometida a la presión aplicada, se eleva conjuntamente con el borde interior de la membrana. La membrana deformada constituye una superficie de ángulo de elevación aproximadamente constante (fig. 101, *b*), de donde se deduce que la distribución de las tensiones dentro del espesor del perfil es casi uniforme.

Pasemos ahora a la deducción de las fórmulas correspondientes, comenzando por el perfil abierto. Es obvio que la forma de la membrana (fig. 101, *a*) y, por lo tanto, las tensiones en la barra también no variarán considerablemente, si enderezamos el perfil de la sección. Es decir, las tensiones en un perfil abierto de configuración curvilínea serán aproximadamente las mismas que en el recto. En este último caso se pueden aplicar las fórmulas que anteriormente se dieron para el caso de una sección rectangular cuando la relación de los lados es grande.

Volviendo a las fórmulas (2.21) y (2.23) y a la tabla N° 2, para $\frac{a}{b}=\infty$, obtendremos,

$$\tau_{max}=\frac{3M_t}{\delta^2 s}, \tag{2.28}$$

$$\varphi=\frac{3\mathfrak{M}l}{G\delta^3 s}, \tag{2.29}$$

siendo δ, el espesor del perfil (el lado menor del rectángulo) y s, la longitud del contorno de la sección transversal (el lado mayor del rectángulo).

Las fórmulas así obtenidas son generales, independientemente de la forma del perfil, si este último puede ser enderezado, convirtiéndose en un rectángulo.

Cuando se trata de un perfil de paredes delgadas abierto compuesto, como, por ejemplo, el representado en la figura 102, y no puede ser enderezado y transformado en un rectángulo, se opera de la siguiente manera: se interpreta el momento M_t como la suma de los momentos que surgen en los distintos tramos y entonces, por la fórmula (2.29) obtendremos,

$$\mathfrak{M}=M_t=\frac{\varphi G}{3l}(\delta_1^3 s_1+\delta_2^3 s_2+\ldots+\delta_n^3 s_n)$$

y

$$\varphi=\frac{3\mathfrak{M}l}{G(\delta_1^3 s_1+\delta_2^3 s_2+\ldots+\delta_n^3 s_n)}. \tag{2.30}$$

Por la analogía de la membrana se establece fácilmente que las tensiones máximas aparecen en el tramo de mayor espesor δ_{max}. Para un tramo determinado de número i, son válidas las fórmulas (2.28) y (2.29), es decir,

$$\tau_i=\tau_{max}=\frac{3M_i}{\delta_i^2 s_i}, \quad \varphi=\frac{3M_i l}{G\delta_i^3 s_i},$$

siendo M_i, la parte del momento torsor que corresponde al tramo i y φ, el desplazamiento angular, que es único para todos los tramos. Despejando de estas expresiones M_i, obtendremos,

$$\tau_i=\tau_{max}=\varphi G\frac{\delta_{max}}{l},$$

o teniendo en cuenta (2.30),

$$\tau_{max} = \frac{3M_t\delta_{max}}{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \ldots + \delta_n^3 s_n}. \qquad (2.31)$$

El método de determinación de las tensiones expuesto para el caso de un perfil abierto es aproximado, puesto que no tiene en cuenta las tensiones locales elevadas en los ángulos entrantes del perfil quebrado. Cuanto menor sea el radio de la curva de los ángulos entrantes, tanto mayores serán las tensiones locales. Esto se ilustra claramente mediante la analogía de la membrana (fig. 103). El ángulo de inclinación local de la membrana α en el punto A es mayor que en el resto de los puntos del contorno interior. Para evitar las grandes sobretensiones locales los ángulos entrantes se redondean.

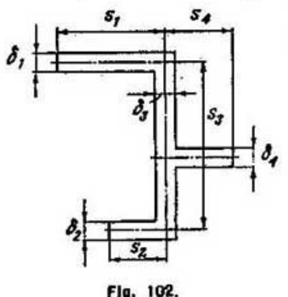


Fig. 102.

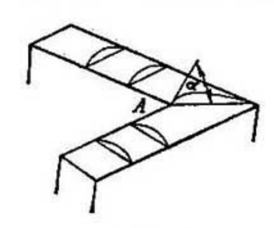
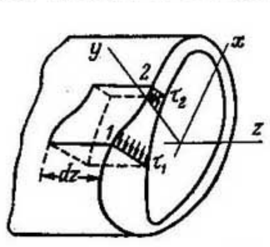


Fig. 103.



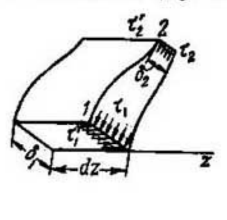


Fig. 104.

Analicemos ahora la torsión de una barra de sección transversal constituida por un perfil de paredes delgadas cerrado (fig. 104).

En este caso, a diferencia del caso anterior, las tensiones se distribuyen de manera uniforme dentro del espesor del perfil. Separemos de la barra un prisma elemental de longitud dz. La dimensión del prisma en la dirección del arco del contorno, es decir, la distancia entre los puntos *1* y *2*, es arbitraria. Supongamos que el espesor del

contorno en el punto *1* es δ_1 y en el punto *2*, δ_2. Designamos por τ_1 y τ_2 las tensiones en la sección transversal. En las secciones longitudinales aparecerán entonces las tensiones recíprocas $\tau_1' = \tau_1$ y $\tau_2' = \tau_2$.

Planteemos para el elemento separado la ecuación de equilibrio proyectando todas las fuerzas sobre la dirección del eje de la barra

$$\tau_1 \delta_1 dz = \tau_2 \delta_2 dz.$$

Como los puntos *1* y *2* están escogidos de manera arbitraria, $\tau\delta = $ $= \text{const}$.

Así pues, el producto $\tau\delta$ no varía a lo largo del contorno cerrado. En los tramos de menor espesor, las tensiones serán mayores.

Expresemos ahora el momento torsor a través de las tensiones τ. Para ello, escogemos en el contorno un tramo elemental de longitud ds (fig. 105). El momento de la fuerza $\tau\delta\, ds$ respecto al punto arbitrario O será $\tau\delta\, ds\, OA$. Entonces,

$$M_t = \int_s \tau\delta\, OA\, ds.$$

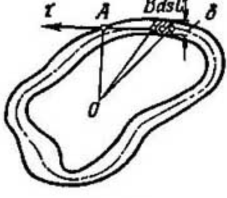


Fig. 105.

Como el producto $\tau\delta$ es constante a lo largo del arco del contorno, obtendremos,

$$M_t = \tau\delta \int_s OA\, ds.$$

El producto $OA\, ds$ es el doble del área del triángulo OBC, y la integral de este producto sobre la longitud del contorno cerrado, será entonces igual al duplo del área limitada por la línea media del contorno. Designemos esta área por F^* para diferenciarla de F que es el área de la sección transversal real. Así pues,

$$M_t = \tau\delta 2F^*.$$

La tensión máxima será

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2F^* \delta_{min}}. \tag{2.32}$$

Falta por determinar el desplazamiento angular φ para la barra de paredes delgadas de contorno de la sección cerrado. Lo haremos comparando la energía potencial de la barra, expresada primero por la tensión τ y después por el momento exterior $\mathfrak{M}$. Veamos la expresión de la energía potencial unitaria del deslizamiento (2.3),

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G}.$$

La energía acumulada en el volumen elemental de dimensiones ds, dz y δ será,

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} \delta\, dz\, ds.$$

Esta expresión deberá ser integrada sobre la longitud de la barra l y sobre el arco del contorno cerrado. Si la barra es homogénea a lo largo de su eje, entonces

$$U=\frac{l}{2G}\int_s \tau^2\delta\, ds=\frac{l\tau^2\delta^2}{2G}\int_s \frac{ds}{\delta}.$$

La última integral depende de la ley de variación del espesor en el contorno y es una característica geométrica de la sección. Teniendo en cuenta que

$$\tau\delta=\frac{M_t}{2F^*}=\frac{\mathfrak{M}}{2F^*},$$

obtendremos,

$$U=\frac{\mathfrak{M}^2 l}{8GF^{*2}}\int_s \frac{ds}{\delta}.$$

Por otra parte, la energía U se puede expresar como el trabajo del momento exterior $\mathfrak{M}$ en el desplazamiento angular φ, es decir,

$$U=\frac{1}{2}\mathfrak{M}\varphi.$$

Comparando estas dos expresiones hallaremos,

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}l}{4GF^{*2}}\int_s \frac{ds}{\delta}.$$

Si el espesor δ es constante a lo largo del contorno,

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}ls}{4GF^{*2}\delta}, \tag{2.33}$$

siendo s la longitud del contorno cerrado.

Ejemplo 2.4. Determinar la tensión y el desplazamiento angular en el tubo de pared delgada hecho de una lámina (fig. 106), con dos variantes:

a) los bordes de la lámina son libres (fig. 106, a),

b) los bordes de la lámina están unidos por remaches (fig. 106, b).

Compárense las tensiones y los ángulos de giro de las secciones.

En el primer caso, el perfil de la sección transversal se debe considerar abierto. Prescindiendo del tramo del perfil en la zona de unión solapada de los dos bordes, obtendremos por las fórmulas (2.28) y (2.29),

$$\tau_a=\frac{3\mathfrak{M}}{\pi D\delta^2},\qquad \varphi_a=\frac{3\mathfrak{M}l}{G\pi D\delta^3}.$$

En el segundo caso, el perfil es cerrado. Las fórmulas (2.32) y (2.33) darán en este caso,

$$\tau_b=\frac{\mathfrak{M}}{2\frac{\pi D^2}{4}\delta},\qquad \varphi_b=\frac{\mathfrak{M}l\pi D}{4G\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2\delta}.$$

Para una comparación más ilustrativa, veamos las relaciones de las tensiones y los ángulos,

$$\frac{\tau_a}{\tau_b}=\frac{3}{2}\,\frac{D}{\delta},\quad \frac{\varphi_a}{\varphi_b}=\frac{3}{4}\,\frac{D^2}{\delta^2}.$$

Así pues, la relación de las tensiones es del orden de D/δ y la de los ángulos de giro del orden de D^2/δ^2 Pero, como de la definición de los perfiles de paredes delgadas se deduce que D es mucho mayor que δ, resulta que el perfil cerrado es bastante más resistente y más rígido aún que el mismo perfil abierto.

Esta deducción es general. El momento exterior cuando se aplica a una barra de sección cerrada se equilibra por los momentos de las fuerzas interiores cuyos brazos son del orden de las dimensiones transversales de la sección, mientras que cuando se aplica a una barra de perfil abierto, los brazos son del orden del espesor. De aquí se deduce que las tensiones tangenciales en el perfil abierto serán mayores que las tensiones en el perfil cerrado en la misma proporción en que las dimensiones de la sección transversal son mayores que su espesor.

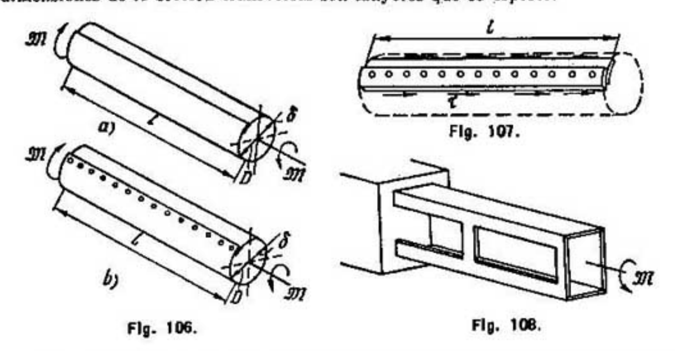


Fig. 106. Fig. 107. Fig. 108.

Ejemplo 2.5. Dado el momento $\mathfrak{M}$ y para las mismas dimensiones de la barra que en el ejemplo anterior, determinar el esfuerzo correspondiente a un remache (fig. 106, *b*).

Con dos secciones longitudinales separamos del tubo una junta remachada (fig. 107). La fuerza que actúa sobre los remaches a lo largo de la generatriz del cilindro es $P=\tau\delta l$, pero como

$$\tau=\frac{\mathfrak{M}}{2\frac{\pi D^2}{4}\delta}$$

resulta,

$$P=\frac{2\mathfrak{M}l}{\pi D^2}.$$

Si el número de remaches es n, entonces la fuerza que corresponde a uno de ellos será P/n.

Del cuadro de las fuerzas representado en la figura 107 se deduce que cuando no hay remaches los extremos de la lámina se desplazan a lo largo de la generatriz. La sección transversal en este caso saldrá de su plano original y tendrá lugar lo que se llama *alabeo* de la sección. La limitación de este alabeo conduce al aumento de la rigidez y de la resistencia de la barra. Cuando por requerimientos constructivos, de montaje o de mantenimiento nos vemos obligados a emplear los perfiles abiertos, se pretende imponer limitaciones locales al alabeo. Así, por ejemplo, en la figura 108 está representada una barra de perfil de paredes delgadas abierto, donde mediante el empotramiento rígido y la existencia de dos listones se limita el alabeo. La torsión en estas condiciones se denomina *torsión restringida*. Esta cuestión se analizará en el capítulo XI.

Ejemplo 2.6. A una barra de paredes delgadas de sección tipo canal (fig. 109) se la suelda una barra de sección angular. Determinar en cuántas veces aumenta la rigidez de la barra a la torsión y en cuántas veces disminuyen las tensiones, manteniendo el mismo momento.

Para el perfil canal la fórmula (2.30) dará lo siguiente,

$$\varphi = \frac{3\mathfrak{M}l}{G\delta^3(2b+h)},$$

mientras que el caso de la sección compuesta,

$$\varphi = \frac{3\mathfrak{M}l}{G[3b\delta^3+(2\delta)^3h]}.$$

Es decir, que la rigidez aumentará

$$\frac{3b+8h}{2b+h}$$

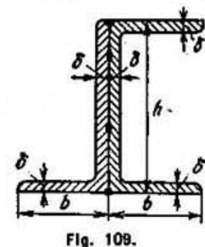


Fig. 109.

veces. Las tensiones se calculan por la fórmula (2.31) que, en el caso del perfil canal dará,

$$\tau = \frac{3\mathfrak{M}}{\delta^2(2b+h)}$$

y en el de la sección compuesta,

$$\tau = \frac{3\mathfrak{M}\cdot 2\delta}{3b\delta^3+(2\delta)^3h}.$$

Es decir, después de soldar el perfil angular, las tensiones desminuirán

$$\frac{1}{2}\,\frac{3b+8h}{2b+h} \text{ veces.}$$

En la tabla 3 vienen dados los factores geométricos W_t e I_t que figuran en las fórmulas de las tensiones y de los ángulos de giro

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad \varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{GI_t},$$

correspondientes a barras de secciones transversales distintas.

Tabla 3

Sección		W_t	I_t
Secciones macizas	Círculo	$0,2D^3\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right)$	$\frac{\pi D^4}{32}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right)$
	Rectángulo	$\alpha b^2 a$	$\beta b^3 a$
	Elipse	$\frac{\pi a b^2}{2}$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$
	Triángulo equilátero	$\frac{a^3}{20}$	$\frac{\sqrt{3}}{80}a^4$

	Sección		W_t	I_t
Secciones finas	Perfil abierto		$\frac{1}{3}\delta^2 s$	$\frac{1}{3}\delta^3 s$
	Perfil compuesto		$\frac{I_t}{\delta_{max}}$	$\frac{1}{3}\sum_{1}^{n}\delta_i^3 s_i$
	Perfil cerrado		$2F^* \delta_{min}$	$\frac{4F^{*2}}{\oint_s \frac{ds}{\delta}}$

Capítulo III

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE LAS BARRAS

§ 25. Momentos estáticos de la sección

Al resolver problemas relacionados con la flexión, surgirá la necesidad de operar con ciertas características geométricas de las secciones transversales de la barra. Estas características se emplean principalmente en los problemas de la flexión y debido a su carácter aplicado, no se estudian en el curso general de geometría, sino en el

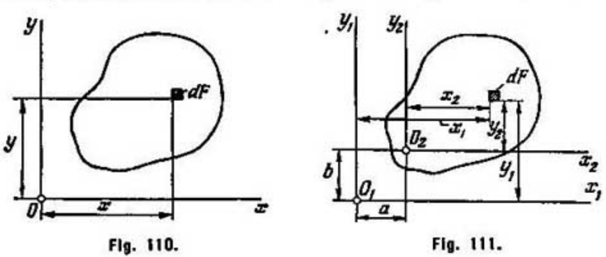


Fig. 110.

Fig. 111.

curso de resistencia de materiales. Este capítulo está dedicado precisamente a esta cuestión.

Supongamos cierta sección transversal de la barra (fig. 110), referida al sistema de coordenadas x, y y analicemos las integrales siguientes:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_F y\,dF. \\ S_y &= \int_F x\,dF \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

El subíndice F de la integral indica que la integración se realiza sobre todo el área de la sección. Cada una de estas integrales representa la suma de los productos de las áreas elementales dF por la distancia al eje correspondiente (x ó y).

La primera integral se denomina *momento estático de la sección* respecto al eje x y la segunda, respecto al eje y. Se mide el momento estático en cm^3.

Al desplazar paralelamente los ejes, los momentos estáticos varían. Veamos dos pares de ejes paralelos x_1y_1 y x_2y_2. Supongamos que la distancia entre los ejes x_1 y x_2 es b y entre los ejes y_1 e y_2, a (fig. 111). Supongamos también que el área de la sección F y los momentos estáticos respecto a los ejes x_1 e y_1, es decir, S_{x_1} y S_{y_1}, están dados. Determinemos S_{x_2} y S_{y_2}.

Está claro que,

$$x_2 = x_1 - a, \quad y_2 = y_1 - b,$$

resultando que los momentos estáticos que se buscan serán,

$$S_{x_2} = \int_F (y_1 - b)\, dF, \quad S_{y_2} = \int_F (x_1 - a)\, dF,$$

o sea,

$$S_{x_2} = S_{x_1} - bF, \quad S_{y_2} = S_{y_1} - aF.$$

Así pues, al desplazar paralelamente los ejes, el momento estático varía en una magnitud igual al producto del área F por la distancia entre los ejes.

Veamos con más detalle, por ejemplo, la primera de las expresiones obtenidas,

$$S_{x_2} = S_{x_1} - bF.$$

La magnitud de b puede ser cualquiera, tanto positiva como negativa. Por eso, siempre se puede escoger (de manera única) de tal forma que el producto bF sea igual a S_{x_1}. Entonces el momento estático S_{x_2} respecto al eje x_2 será igual a cero.

El eje, respecto al cual el momento estático es igual a cero se denomina eje *central*. En el conjunto de ejes paralelos solamente uno es central y la distancia de este eje a otro arbitrario x_1 será,

$$b = y_c = \frac{S_{x_1}}{F}. \tag{3.2}$$

De manera análoga, para el otro conjunto de ejes paralelos se obtiene,

$$a = x_c = \frac{S_{y_1}}{F}. \tag{3.3}$$

El punto de intersección de los ejes centrales se denomina *centro de gravedad de la sección* (baricentro). Girando los ejes se puede demostrar que el momento estático respecto a *cualquier* eje que pase por el centro de gravedad es igual a cero.

Fácilmente se demuestra la identidad de esta definición del centro de gravedad y la definición general, según la cual el centro de gravedad es el punto de aplicación de las resultantes de las fuerzas de gravedad. Si consideramos a la sección como una placa homogénea, la fuerza de gravedad de la placa en todos los puntos será proporcional al área elemental dF y el momento de las fuerzas del peso respecto a

cierto eje, proporcional al momento estático. Este momento de las fuerzas de gravedad respecto al eje que pasa por el centro de gravedad es igual a cero, convirtiéndose también en cero el momento estático respecto al eje central.

Las expresiones (3.2) y (3.3) permiten determinar la posición del centro de gravedad, si se conocen los momentos estáticos o, al revés, determinar los momentos estáticos, si se conoce la posición del centro de gravedad.

Veamos los ejemplos más simples.

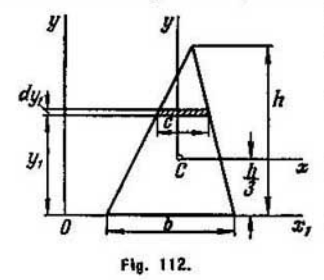


Fig. 112.

Ejemplo 3.1. Determinar la distancia desde la base hasta el centro de gravedad del triángulo (fig. 112).

Comenzamos por determinar el momento estático del triángulo respecto al eje x_1,

$$S_{x_1}=\int\limits_F y_1\,dF.$$

El área elemental es $dF=c\,dy$. De la semejanza de los triángulos correspondientes obtendremos,

$$c=b\frac{h-y_1}{h},$$

siendo b, la base del triángulo y h, su altura.

Así pues,

$$S_{x_1}=\frac{b}{h}\int\limits_0^h (h-y_1)\,y_1\,dy_1. \qquad (3.4)$$

Una vez calculada la integral hallaremos,

$$S_{x_1}=\frac{bh^2}{6},$$

es decir, que la distancia desde la base del triángulo hasta el centro de gravedad será,

$$y_c=\frac{S_{x_1}}{F}=\frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}}=\frac{h}{3}$$

(fig. 112).

Ejemplo 3.2. Determinar la posición del centro de gravedad de una sección compuesta (fig. 113).

Dividimos la sección en tres figuras elementales: triángulo, rectángulo y semicírculo. Escogemos un sistema arbitrario de ejes x_1 e y_1 y determinamos las coordenadas de los centros de gravedad de las figuras componentes. El centro de gravedad del triángulo C_1 se encuentra de la base a $^1/_3$ de la altura y el centro de gravedad del rectángulo C_2 se encuentra en el punto de intersección de las

líneas medias. El centro de gravedad del semicírculo se encuentra en el eje de simetría a la distancia $\frac{4R}{3\pi}$ del diámetro vertical (fig. 113).

La manera más fácil de obtener esta última expresión consite en aplicar el teorema de Guldin. Girando el semicírculo respecto a su diámetro, se obtiene el

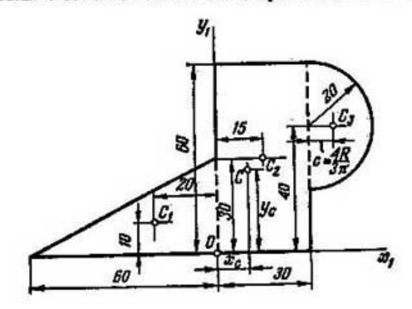


Fig. 113.

cuerpo de revolución que coincide con esfera y cuyo volumen es igual al producto del arco $2\pi c$ por el área del semicírculo,

$$\frac{4}{3}\pi R^3=2\pi c\frac{\pi R^2}{2},$$

de donde se obtiene,

$$c=\frac{4R}{3\pi}.$$

Calculemos ahora el momento estático de la figura compuesta, como la suma de los momentos estáticos de las figuras componentes,

$$S_{x_1}=F_1y_{c1}+F_2y_{c2}+F_3y_{c3}.$$

Así se obtiene,

$$S_{x_1}=\frac{1}{2}60\cdot30\cdot10+30\cdot60\cdot30+\pi\frac{20^2}{2}40=88\,100\ \text{mm}^3,$$

$$S_{y_1}=-\frac{1}{2}30\cdot60\cdot20+30\cdot60\cdot15+\pi\frac{20^2}{2}\left(30+\frac{4\cdot20}{3\pi}\right)=33\,200\ \text{mm}^3.$$

El área de la figura compuesta será

$$F=\frac{1}{2}60\cdot30+30\cdot60+\frac{\pi20^2}{2}=3\,330\ \text{mm}^2$$

y las coordenadas buscadas del centro de gravedad en el sistema de ejes x_1 e y_1,

$$x_c=\frac{S_{y_1}}{F}=9{,}97\ \text{mm},\quad y_c=\frac{S_{x_1}}{F}=26{,}5\ \text{mm}.$$

§ 26. Momentos de inercia de la sección

Como complemento de los momentos estáticos analicemos también las tres integrales siguientes:

$$I_x=\int_F y^2\,dF;\quad I_y=\int_F x^2\,dF,\quad I_{xy}=\int_F xy\,dF, \tag{3.5}$$

siendo como antes, x e y las coordenadas variables del área elemental dF en un sistema de coordenadas arbitrario x, y (fig. 110). Las dos primeras integrales se denominan *momentos de inercia axiales de la sección* respecto a los ejes x e y respectivamente. La tercera integral se denomina *producto de inercia* de la sección respecto a los ejes x e y. Los momentos de inercia se miden en cm^4.

Los momentos axiales de inercia son siempre positivos puesto que se considera positiva el área dF. El producto de inercia puede ser tanto positivo como negativo según donde esté situada la sección respecto a los ejes x, y.

Obtengamos ahora las fórmulas para la transformación de los momentos de inercia al desplazar paralelamente los ejes. Para ello consideremos otra vez la figura 111. Supongamos dados los momentos de inercia y los momentos estáticos respecto a los ejes x_1 e y_1 y determinemos los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 e y_2,

$$I_{x_2}=\int_F y_2^2\,dF,\quad I_{y_2}=\int_F x_2^2\,dF;\quad I_{x_2y_2}=\int_F x_2y_2\,dF.$$

Introduciendo aquí $x_2=x_1-a$ e $y_2=y_1-b$, obtendremos,

$$I_{x_2}=\int_F (y_1-b)^2\,dF,\quad I_{y_2}=\int_F (x_1-a)^2\,dF,$$

$$I_{x_2y_2}=\int_F (x_1-a)(y_1-b)\,dF,$$

y, abriendo los paréntesis, de acuerdo con las notaciones (3.1) y (3.5),

$$\left.\begin{aligned}I_{x_2}&=I_{x_1}-2bS_{x_1}+b^2F,\\ I_{y_2}&=I_{y_1}-2aS_{y_1}+a^2F,\\ I_{x_2y_2}&=I_{x_1y_1}-aS_{x_1}-bS_{y_1}+abF.\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Cuando los ejes x_1 e y_1 son centrales, $S_{x_1}=S_{y_1}=0$ y entonces las expresiones obtenidas se simplifican considerablemente,

$$\left.\begin{aligned}I_{x_2}&=I_{x_1}+b^2F,\\ I_{y_2}&=I_{y_1}+a^2F,\\ I_{x_2y_2}&=I_{x_1y_1}+abF.\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Es decir, que cuando los ejes se desplazan paralelamente (siendo uno de ellos eje central) los momentos de inercia axiales varían en una

magnitud igual al producto del área por el cuadrado de la distancia entre los ejes.

De las dos primeras fórmulas (3.7) se deduce que en el conjunto de ejes paralelos el momento mínimo de inercia corresponde al eje central ($a=0$ ó $b=0$). Por eso es fácil comprender que al pasar de los ejes centrales a los ejes no centrales, los momentos de inercia axiales aumentan en las magnitudes a^2F y b^2F, mientras que al pasar de los ejes no centrales a los ejes centrales los momentos de inercia disminuyen en las mismas magnitudes.

Al calcular el producto de inercia por las fórmulas (3.7) se debe tener en cuenta el signo de a y b. Se puede, sin embargo, establecer directamente en que sentido varía la magnitud de I_{xy} al desplazar

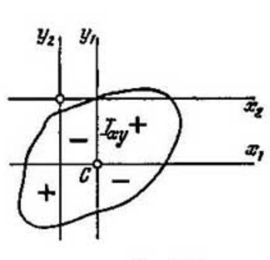


Fig. 114.

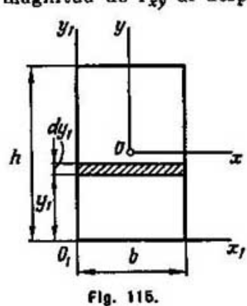


Fig. 115.

paralelamente los ejes. Para ello debe tenerse en cuenta que la parte del área situada en los cuadrantes I y III del sistema de coordenadas x_1y_1 (fig. 114) da un valor positivo del producto de inercia, mientras que las partes del área que se encuentra en los cuadrantes II y IV, darán valores negativos. Por lo tanto, al desplazar los ejes, lo más fácil resulta establecer el signo del sumando abF según que de las cuatro componentes del área aumenten o disminuyan. Así, si pasamos de los ejes centrales x_1y_1 (fig. 114) a los ejes x_2y_2, observaremos que aumenta considerablemente el área del IV cuadrante y, por lo tanto, disminuirá el momento de inercia lo que indica que el producto abF debe restarse del momento $I_{x_1y_1}$.

Determinemos, en los ejemplos que siguen, los momentos de inercia de las secciones simples respecto a los ejes característicos.

Ejemplo 3.3. Calcular el momento de inercia del rectángulo de base b y de altura h, respecto a su base y respecto al eje central paralelo a la base (fig. 115).

El momento de inercia respecto al eje x_1 será,

$$I_{x_1}=\int_F y_1^2\,dF=\int_0^h y_1^2 b\,dy_1,$$

o sea,

$$I_{x_1}=\frac{bh^3}{3}.$$

De acuerdo a la fórmula (3.7) obtendremos el momento de inercia respecto al eje central,

$$I_x=I_{x_1}-\left(\frac{h}{2}\right)^2F,$$

o sea,

$$I_x=\frac{bh^3}{12}.$$

Ejemplo 3.4. Calcular el momento de inercia del triángulo examinado anteriormente (fig. 112), respecto a su base y respecto al eje central paralelo a la base.

Para no repetir las mismas operaciones, volvamos a la expresión (3.4) para el momento estático del triángulo y sustituyamos a y_1 de la expresión que se integra por y_1^2. Obtendremos entonces,

$$I_{x_1}=\frac{b}{h}\int_0^h (h-y_1)\,y_1^2\,dy_1,$$

de donde hallaremos,

$$I_{x_1}=\frac{bh^3}{12}.$$

Por la fórmula para el cálculo de los momentos respecto a ejes paralelos, se obtiene el momento de inercia del triángulo respecto al eje central x (fig. 112),

$$I_x=I_{x_1}-\left(\frac{h}{3}\right)^2F,$$

ó

$$I_x=\frac{bh^3}{36}.$$

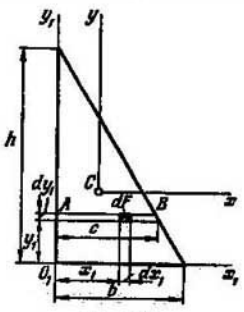


Fig. 116.

Ejemplo 3.5. Determinar el producto de inercia del triángulo rectángulo respecto a los ejes que coinciden con sus catetos (fig. 116).

Separemos el elemento del área dx_1, dy_1 y considerando que y_1 no varía calculamos así el producto de inercia de la zanja AB,

$$I_{x_1y_1}(AB)=y_1\,dy_1\int_0^c x_1\,dx_1=y_1\,dy_1\,\frac{c^2}{2}.$$

Pero como

$$c=\frac{b}{h}(h-y_1),$$

obtendremos

$$I_{x_1y_1}(AB)=\frac{b^2}{2h^2}(h-y_1)^2\,y_1\,dy_1.$$

Integrando esta expresión respecto a y_1 de cero a h, obtendremos,

$$I_{x_1y_1}=\frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h-y_1)^2\,y_1\,dy_1, \text{ ó } I_{x_1y_1}=\frac{b^2h^2}{24}.$$

Pasemos ahora al sistema de ejes centrales xy (fig. 116). Se observa entonces que aumentan las áreas ubicadas en los cuadrantes II y IV, que dan valores negativos del producto de inercia. Por lo tanto, $I_{x_1y_1}$, según la fórmula para el cálculo de los momentos respecto a ejes paralelos, disminuye y se le resta el producto abF, es decir,

$$I_{xy}=I_{x_1y_1}-\frac{h}{3}\frac{b}{3}F, \text{ ó } I_{xy}=-\frac{b^2h^2}{72}.$$

El producto de inercia respecto a los ejes x, y resultó, como vemos, negativo.

§ 27. Ejes principales y momentos principales de inercia

Veamos ahora cómo varían los momentos de inercia al girar los ejes de coordenadas. Supongamos dados los momentos de inercia de cierta sección respecto a los ejes x, y (que pueden no ser centrales). Calculemos I_u, I_v e I_{uv}, es decir, los momentos de inercia respecto a los ejes u, v girados un ángulo α respecto al sistema inicial (fig. 117).

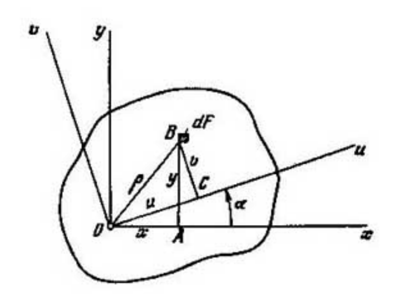


Fig. 117.

Proyectamos el cuadrilátero cerrado $OABCO$ sobre los ejes u y v. Como la proyección de la línea quebrada es igual a la proyección de la línea de cierre, obtendremos,

$$u=y\operatorname{sen}\alpha+x\cos\alpha,\quad v=y\cos\alpha-x\operatorname{sen}\alpha.$$

Despejamos en las expresiones

$$I_u=\int_F v^2\,dF,\quad I_v=\int_F u^2\,dF \text{ e } I_{uv}=\int_F uv\,dF$$

las magnitudes u y v, obteniendo,

$$I_u = \int_F (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2\,dF,$$

$$I_v = \int_F (y\,\mathrm{sen}\,\alpha + x\cos\alpha)^2\,dF,$$

$$I_{uv} = \int_F (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)(y\,\mathrm{sen}\,\alpha + x\cos\alpha)\,dF,$$

de donde hallamos,

$$\left.\begin{aligned} I_u &= I_x\cos^2\alpha - I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\alpha + I_y\,\mathrm{sen}^2\alpha,\\ I_v &= I_x\,\mathrm{sen}^2\alpha + I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\alpha + I_y\cos^2\alpha,\\ I_{uv} &= I_{xy}\cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Veamos las dos primeras ecuaciones. Sumándolas término a término tendremos,

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \int_F (y^2 + x^2)\,dF.$$

Así pues, la suma de los momentos axiales de inercia respecto a dos ejes ortogonales no depende del ángulo α y permanece constante al girar los ejes. Observando que

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

siendo ρ, la distancia desde el origen de las coordenadas al área elemental (fig. 117), obtendremos,

$$I_x + I_y = I_p, \tag{3.9}$$

siendo I_p, el momento polar de inercia que ya conocemos,

$$I_p = \int_F \rho^2\,dF$$

y cuya magnitud, claro está, no depende del giro de los ejes xy. Partiendo de la expresión (3.9) se determina fácilmente el momento axial de inercia del círculo respecto a su diámetro. Puesto que debido a la simetría $I_x = I_y$, obtendremos,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_p$$

y como ya conocemos la magnitud de I_p,

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32},$$

es decir, que en el caso del círculo,

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Al variar el ángulo α de giro de los ejes, cada una de las magnitudes I_u y I_v varía mientras que su suma permanece constante. Es decir, existe un ángulo α tal que uno de los momentos de inercia alcanza a su máximo valor, mientras que el otro alcanza su valor mínimo.

Derivando la expresión de I_u (3.8) respecto a α e igualando la derivada a cero, obtendremos,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \qquad (3.10)$$

Cuando α adquiere este valor, uno de los momentos axiales de inercia será máximo y el otro mínimo. Al mismo tiempo, el producto de inercia I_{uv} correspondiente a este ángulo α será igual a cero, lo que fácilmente se obtiene de la fórmula (3.8).

Los ejes, respecto a los cuales el producto de inercia es igual a cero, mientras que los momentos axiales de inercia adquieren valores extremos, se denominan *ejes principales*. Si al mismo tiempo estos ejes son también centrales, se denominarán entonces *ejes principales centrales*. Los momentos axiales de inercia respecto a los ejes principales se denominan *momentos de inercia principales*. Determinemos estos momentos de inercia. Para ello escribimos las dos primeras fórmulas de (3.8) en la forma siguiente,

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \text{ y } \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

y si, mediante la expresión (3.10), eliminamos el ángulo α, obtendremos,

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \qquad (3.11)$$

El signo superior corresponde al momento de inercia máximo y el inferior, al mínimo. Una vez dibujada a escala la sección y después de indicar la posición de los ejes principales, es fácil, a simple vista, establecer cual de estos dos ejes corresponde al momento de inercia máximo y cual de ellos corresponde al momento de inercia mínimo.

Si la sección tiene un eje de simetría, este eje siempre será, claro está, eje principal (fig. 118), puesto que el producto de inercia de la parte de la sección ubicada a un lado del eje será igual, pero de signo contrario, al producto de inercia de la otra parte que se encuentra

al otro lado del eje. Es decir $I_{xy}=0$, resultando que los ejes x e y son ejes principales.

Veamos algunos ejemplos de determinación de los ejes principales y de los momentos principales de inercia.

Ejemplo 3.6. Determinar la posición de los ejes principales centrales y los momentos principales del triángulo rectángulo de la figura 119.

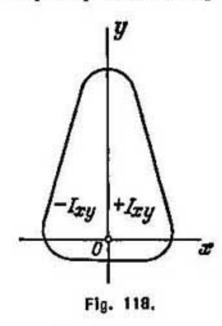


Fig. 118.

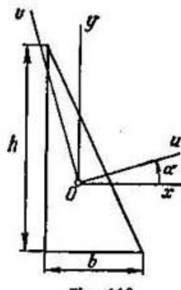


Fig. 119.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, para los ejes centrales paralelos a los catetos se obtiene,

$$I_x=\frac{bh^3}{36},$$
$$I_y=\frac{hb^3}{36},$$
$$I_{xy}=-\frac{b^2h^2}{72}.$$

De la fórmula (3.10) hallaremos,

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{bh}{h^2-b^2}.$$

Si $h=b$, entonces $\alpha=45°$, resultando que el eje principal coincidirá con el eje de simetría del triángulo isósceles. De la fórmula (3.11) se deduce que,

$$I_{\substack{\max\\ \min}}=\frac{bh}{72}\left(b^2+h^2\pm\sqrt{b^4-b^2h^2+h^4}\right)$$

Ejemplo 3.7. Determinar la posición de los ejes principales centrales y los momentos principales de inercia para la sección compuesta de la figura 120.

La posición del centro de gravedad C de esta sección fue obtenida ya anteriormente. Hallamos ahora los momentos de inercia de las figuras que componen la sección respecto al sistema de ejes arbitrario x_1y_1 obteniendo:

para el triángulo

$$I_{x_1}=\frac{60\cdot 30^3}{12}=135\,000 \text{ mm}^4=13{,}5 \text{ cm}^4,$$
$$I_{y_1}=\frac{30\cdot 60^3}{12}=540\,000 \text{ mm}^4=54 \text{ cm}^4,$$
$$I_{x_1y_1}=-\frac{30^2\cdot 60^2}{24}=-135\,000 \text{ mm}^4=-13{,}5 \text{ cm}^4,$$

para el rectángulo

$$I_{x_1}=\frac{30\cdot 60^3}{3}=2\,160\,000\ \text{mm}^4=216\ \text{cm}^4,$$

$$I_{y_1}=\frac{60\cdot 30^3}{3}=540\,000\ \text{mm}^4=54\ \text{cm}^4.$$

El producto de inercia del rectángulo se determina desplazando los ejes, es decir, que

$$I_{x_1y_1}=I_{x_2y_2}+abF,\quad \text{ó}\quad I_{x_1y_1}=0+30\cdot 15\cdot 30\cdot 60=810\,000\ \text{mm}^4=81\ \text{cm}^4,$$

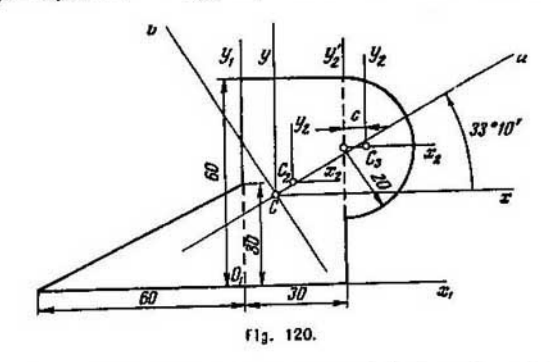


Fig. 120.

para el semicírculo, recurriendo de nuevo al desplazamiento de los ejes, obtendremos para los momentos de inercia respecto a los ejes centrales x_2y_2,

$$I_{x_2}=\frac{1}{2}\,\frac{\pi D^4}{64}=\frac{\pi 40^4}{128}=62\,800\ \text{mm}^4=6{,}28\ \text{cm}^4,$$

$$I_{y_2}=I'_{y_2}-c^2F=\frac{\pi 40^4}{128}-\left(\frac{4\cdot 20}{3\pi}\right)^2\frac{\pi 20^2}{2}=17\,560\ \text{mm}^4=1{,}76\ \text{cm}^4,$$

$$I_{x_2y_2}=0,$$

y para los momentos de inercia respecto a los ejes x_1y_1,

$$I_{x_1}=62\,800+40^2\,\frac{\pi 20^2}{2}=1\,068\,000\ \text{mm}^4=107\ \text{cm}^4,$$

$$I_{y_1}=17\,560+(30+c)^2\,\frac{\pi 20^2}{2}=948\,000\ \text{mm}^4=94{,}8\ \text{cm}^4,$$

$$I_{x_1y_1}=0+(30+c)\,40\,\frac{\pi 20^2}{2}=967\,000\ \text{mm}^4=96{,}7\ \text{cm}^4.$$

Sumando los valores obtenidos de los momentos de inercia de las figuras que componen la sección, hallamos los momentos de inercia de toda la sección respecto a los ejes x_1y_1,

$$I_{x_1}=336\ \text{cm}^4,\ I_{y_1}=203\ \text{cm}^4,\ I_{x_1y_1}=164\ \text{cm}^4.$$

Pasamos ahora a los ejes x, y, aprovechando para ello las coordenadas del

centro de gravedad C obtenidas anteriormente,

$$I_x = 336 - 2{,}65^2 \cdot 33{,}3 = 103 \text{ cm}^4,$$
$$I_y = 203 - 0{,}997^2 \cdot 33{,}3 = 170 \text{ cm}^4,$$
$$I_{xy} = 164 - 0{,}997 \cdot 2{,}65 \cdot 33{,}3 = 76{,}3 \text{ cm}^4.$$

Por la fórmula (3.10) obtendremos,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 76{,}3}{170 - 103} = 2{,}28; \quad \alpha \approx 33°10'.$$

En la figura 120 está dada la posición de los ejes principales centrales. De la fórmula (3.11) hallaremos,

$$I_{max} = 220 \text{ cm}^4, \ I_{min} = 53{,}0 \text{ cm}^4.$$

El eje u de la figura 120 corresponde al valor mínimo del momento de inercia y el eje v, al valor máximo del momento.

Capítulo IV

FLEXION

§ 28. Factores de fuerza interiores que ocurren en las secciones transversales de la barra en la flexión

Se entiende por *flexión* el caso de solicitación cuando en las secciones transversales de la barra aparecen momentos flectores (véase el § 3). Si el momento flector en la sección es el único factor de fuerza existente, mientras que las fuerzas cortantes y la fuerza normal son nulas, entonces la flexión se denomina flexión *pura*. En la mayoría de los casos en las secciones transversales de la barra, simultáneamente a los momentos flectores, aparecen también fuerzas cortantes. En este caso se dice que la flexión es *transversal*. La clasificación de los tipos de flexión se realiza también atendiéndose a otros aspectos, algunos de los cuales serán estudiados más adelante. La barra que trabaja principalmente a flexión se denomina *viga*.

Para orientarse correctamente en los problemas relacionados con el cálculo de la barra a flexión, es necesario ante todo, saber determinar las leyes de variación de los factores de fuerza interiores, es decir, aprender a construir los diagramas de los momentos flectores y de las fuerzas cortantes. Veamos algunos ejemplos característicos y establezcamos las reglas necesarias.

En la figura 121, *a* está representado el caso más simple de una viga de dos apoyos solicitada por la fuerza P. Recordemos una vez más, que el esquema indicado, así como todos los que se analizaron hasta aquí y los que serán analizados más adelante, fue obtenido por los procedimientos expuestos en el § 2 para la elección del esquema de cálculo. A este esquema de la viga de dos apoyos, se reducen muchas estructuras de máquinas, como, por ejemplo, la viga del puente grúa indicado en la figura 122.

El análisis de las fuerzas interiores comienza generalmente por la determinación completa del sistema de fuerzas exteriores. En nuestro caso es necesario determinar las reacciones de apoyo. De las condiciones de equilibrio se obtiene para las reacciones,

$$P_A = \frac{Pb}{a+b}, \quad P_B = \frac{Pa}{a+b}$$

(véase la figura 121).

Trazamos la sección C (fig. 121) a la distancia z del apoyo izquierdo y dividimos la viga en dos partes. Para que cada parte se encuentre en equilibrio, es necesario aplicar en la sección C la fuerza Q y el momento M_{flec}. Estos factores de fuerza se determinan de las condiciones de equilibrio de una de las partes de la barra. En el § 3 se

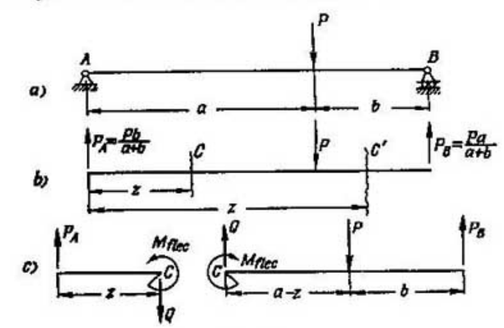


Fig. 121.

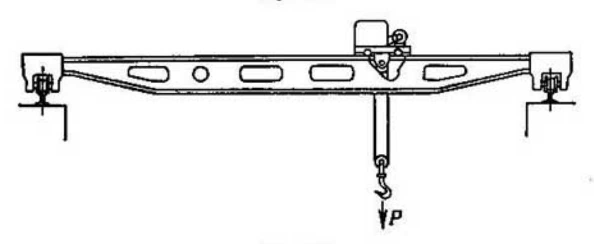


Fig. 122.

demostró que la magnitud de las fuerzas interiores no depende de que se analicen las condiciones de equilibrio de la parte derecha o de la parte izquierda de la barra (fig. 121, *c*). En nuestro caso es preferible analizar la parte izquierda.

Planteando la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre la parte izquierda de la barra, respecto al eje central transversal de la sección C e igualando esta suma a cero, obtendremos,

$$M_{flec} = P_A z.$$

Si a la izquierda de la sección C actuase no una fuerza sino varias, la magnitud del momento flector M_{flec} en la sección se determinaría como la *suma* de los momentos de estas fuerzas. Así pues, el momento

flector en la sección se puede interpretar como la suma de los momentos respecto al eje transversal de la sección de todas las fuerzas ubicadas a un lado de esta sección. En adelante, para evitar dibujos complicados, que ilustren el equilibrio de las partes separadas de la barra, el momento flector se determinará precisamente por este procedimiento.

El signo del momento flector se establece en función del signo de la curvatura de la barra flexionada (fig. 123) y depende de la orientación escogida del sistema de ejes de coordenadas exterior inmóvil zy. Si el eje y (fig. 123) se orienta en dirección contraria, variará el

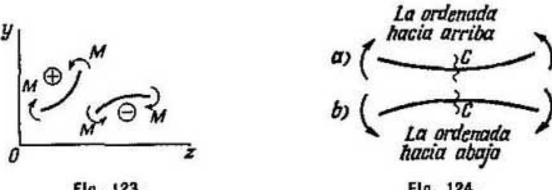


Fig. 123. Fig. 124.

signo de la curvatura y, por lo tanto, también el del momento flector. Esta regla para los signos se emplea al determinar los desplazamientos de la barra y al determinar la forma del eje de la viga flexionada.

Al construir los diagramas de los momentos flectores se emplea otra regla de signos (regla de signos relativos), según la cual el signo del momento flector no depende de la orientación de los ejes exteriores. El diagrama de los momentos se construye en el eje de la barra y la ordenada del momento se sitúa en la zona cóncava de la línea elástica, o sea, como se dice, el diagrama de los momentos se construye en la fibra comprimida. Esta regla se puede interpretar también de otra manera.

Si la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la *parte izquierda* de la barra equivale a un momento resultante dirigido *según las manecillas del reloj*, entonces la ordenada del momento flector en la sección se ubica hacia arriba. Cuando el momento resultante exterior *de la izquierda* gira *en contra* de las manecillas del reloj, la ordenada del momento flector se ubica hacia abajo.

Para las fuerzas que se encuentran a la derecha de la sección, tiene lugar la regla inversa, es decir, cuando el momento resultante gira según las manecillas del reloj, la ordenada se sitúa hacia abajo y cuando gira en contra de las manecillas del reloj, hacia arriba. Esto se ilustra en el esquema de la figura 124.

Volviendo al ejemplo que veníamos analizando de la viga sobre dos apoyos, observamos que el momento de la fuerza P_A situada *a la izquierda* de la sección C gira *según las manecillas del reloj*, por lo que

situamos la ordenada del momento flector en la sección C hacia arriba.

Cuando z varía entre 0 y a, el momento flector será,

$$M_{flec} = +\frac{Pb}{a+b}z.$$

En el tramo de la derecha z varía entre a y $a+b$. El momento flector en la sección C' se determina con mayor facilidad como la suma de los momentos de las fuerzas exteriores situadas a la derecha de la sección, es decir

$$M_{flec} = +P_B(a+b-z) = +\frac{Pa}{a+b}(a+b-z).$$

La ordenada del momento está dirigida hacia arriba puesto que el momento de la fuerza exterior situada *a la derecha* de la sección C' está orientado *en contra de las manecillas del reloj.*

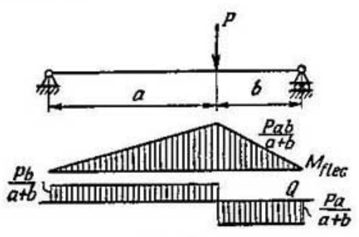


Fig. 125.

De acuerdo con las expresiones de los momentos flectores obtenidas, se puede construir el diagrama de los momentos flectores de la figura 125. El diagrama está constituido por segmentos rectos y, en toda la longitud de la viga, se sitúa sobre ella. Esto quiere decir que la concavidad del eje de la viga deformada, denominado línea elástica, está orientada en toda la longitud de la viga hacia arriba, lo que en este caso es evidente.

Calculemos ahora las fuerzas cortantes Q. De la condición de equilibrio de la parte derecha o de la parte izquierda de la barra seccionada (fig. 121) se deduce que

$$Q = P_A \quad \text{ó} \quad Q = P - P_B = P_A.$$

En todos los casos, la fuerza cortante en una barra recta es igual a la suma de las proyecciones de todas las fuerzas exteriores situadas a uno de los lados de la sección, sobre el plano de la sección. De aquí se deduce la regla de los signos de la fuerza cortante. Si la suma de las fuerzas exteriores que se encuentran a la izquierda de la sección origina una resultante dirigida hacia arriba, entonces la fuerza cortante

en la sección se considerará *positiva*, en caso contrario, *negativa*. Para la parte derecha de la viga se obtiene: si la resultante está dirigida hacia abajo la fuerza cortante será positiva y en caso contrario, negativa. Esta regla se ilustra en la figura 126.

En el caso que analizamos de la viga de dos apoyos, la fuerza P_A que se encuentra *a la izquierda* de la sección C, está dirigida *hacia arriba* y, por lo tanto,

$$Q = +P_A = +\frac{Pb}{a+b}.$$

a) + +

b) − −

Fig. 126.

En el tramo derecho de la viga, la fuerza P_B situada *a la derecha* de la sección C' está dirigida *hacia arriba* y, por lo tanto, la fuerza cortante en este tramo será negativa,

$$Q = -P_B = -\frac{Pb}{a+b}.$$

El diagrama de las fuerzas cortantes para la viga de dos apoyos en cuestión está constituida por dos rectángulos (fig. 125).

Veamos algunos ejemplos más de construcción de los diagramas del momento flector y de la fuerza cortante.

La viga de dos apoyos de longitud l está solicitada por una carga uniformemente distribuida que representa el peso propio de la viga. Estas fuerzas se caracterizan por su intensidad q en kgf/cm, es decir, por la fuerza correspondiente a la unidad de longitud de la barra (fig. 127). Determinemos las reacciones de apoyo,

$$P_A = P_B = \frac{ql}{2}.$$

En la figura 127 estas fuerzas están representadas convencionalmente en el sistema dado. Hablando en rigor, ellas deberían estar representadas en otro dibujo, en la viga sin ligaduras exteriores, puesto que estas fuerzas sustituyen a la acción de las ligaduras. En el ejemplo anterior (fig. 121), se obró precisamente de este modo. Pero, sin embargo, para simplificar el problema, las reacciones, convencionalmente, se representan como hemos hecho en este caso.

La suma de los momentos de las fuerzas exteriores que se encuentran a un lado de la sección, por ejemplo, a la izquierda de ésta, será

$$M_{\text{flec}} = +P_A z - qz\frac{z}{2},$$

siendo $P_A z$, el momento de la fuerza P_A, orientado según las manecillas del reloj (positivo), qz, la fuerza del peso propio correspondiente a la longitud z. La resultante de esta fuerza está aplicada en el centro del tramo de longitud z y tiene pues un brazo igual a $z/2$, y así pues, el momento de esta fuerza, situada a la izquierda de la sección C,

estará orientado contra las manecillas del reloj y es negativo. Es decir,

$$M_{flec} = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

El diagrama del momento flector está representado por una parábola (fig. 127). El valor máximo del momento flector tiene lugar

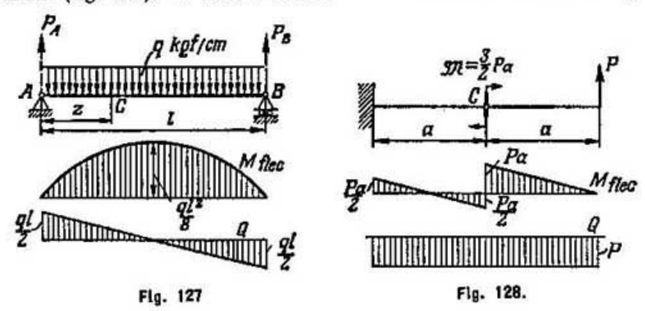


Fig. 127

Fig. 128.

en la sección media del tramo cuando $z = \frac{l}{2}$,

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}.$$

La fuerza cortante en la sección C es igual a la suma de las fuerzas situadas a uno de los lados de la sección.

$$Q = +P_A - qz = \frac{ql}{2} - qz.$$

El diagrama de la fuerza cortante está representado por una recta.

En la figura 128 se da la construcción de los diagramas de los momentos flectores y fuerzas cortantes para el caso de la viga empotrada en un extremo. Este tipo de viga se denomina generalmente *voladizo*. En este caso, la viga no tiene ligaduras en su extremo derecho y, por lo tanto, la determinación de los momentos flectores y las fuerzas cortantes en cualquier sección se puede llevar a cabo sin determinar previamente las reacciones de apoyo.

En la sección media del voladizo, mediante una traviesa, se transmite el momento del par de fuerzas. Como resultado de esto, en el diagrama de los momentos flectores surgirá un salto brusco. Al pasar por la sección C, la suma de los momentos de las fuerzas situadas a la derecha o a la izquierda de la sección, varía bruscamente en la magnitud $\mathfrak{M}$.

Analizando todos los diagramas construidos anteriormente, es fácil establecer cierta relación entre los diagramas de los momentos flectores y los diagramas de las fuerzas cortantes. Al juzgar por los

diagramas, la fuerza cortante Q es la derivada del momento flector M respecto a la longitud de la viga. Demostremos esta ley.

Supongamos una barra apoyada arbitrariamente y solicitada en el caso general por una carga distribuida de intensidad $q=f(z)$. Consideramos positiva la dirección admitida para q (fig. 129).

Separamos de la barra un elemento de longitud dz y, en las secciones, aplicamos los momentos M y $M+dM$, así como también las fuerzas cortantes Q y $Q+dQ$. Las direcciones de estos factores de fuerza se consideran positivas de acuerdo con la regla de los signos, dada anteriormente. Dentro de los límites del elemento pequeño dz, se puede considerar que la carga q está distribuida uniformemente.

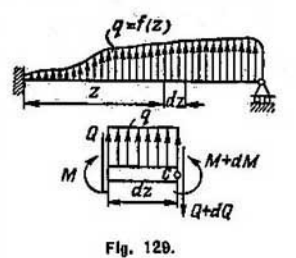


Fig. 129.

Igualamos a cero la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje vertical y la suma de los momentos respecto al eje transversal C (fig. 129),

$$Q+q\,dz-Q-dQ=0,$$
$$M+Q\,dz+q\,dz\frac{dz}{2}-M-dM=0.$$

Simplificando las expresiones obtenidas y prescindiendo de la magnitud pequeña de orden superior, hallaremos

$$\frac{dQ}{dz}=q, \quad \frac{dM}{dz}=Q. \tag{4.1}$$

Así pues, la fuerza cortante es, en efecto, la derivada del momento flector respecto a la longitud de la barra. La derivada de la fuerza cortante es igual a la intensidad de la carga distribuida exterior q.

De la expresión (4.1) se pueden obtener algunas conclusiones generales sobre el carácter de los diagramas de los momentos flectores y las fuerzas cortantes para el caso de una barra recta.

Si la barra se solicita por una carga uniformemente distribuida de intensidad $q=\text{const}$, entonces, obviamente, la función Q será lineal y la función M, cuadrática. Esto se puede observar en el ejemplo de los diagramas representados en la figura 127.

Si la barra se solicita por fuerzas o momentos concentrados, entonces en los tramos entre los puntos de su aplicación la intensidad $q=0$ y, por lo tanto, $Q=\text{const}$ y M resulta ser una función lineal de z. En los puntos de aplicación de las fuerzas concentradas el diagrama de Q sufrirá un salto brusco de magnitud igual a la fuerza exterior y en el diagrama de M aparecerá el vértice correspondiente (discontinuidad de la derivada).

§ 29. Tensiones en la barra sometida a flexión pura

Analicemos el caso más simple de flexión, la flexión pura. Como se indicó ya, se entiende por flexión pura el caso de solicitación de que en las secciones transversales de la barra aparecen solamente momentos flectores, siendo $Q=0$. En los tramos de la barra donde se cumple esta condición, el momento flector, según la segunda expresión de (4.1), permanece constante ($M=\text{const}$). La flexión pura puede surgir para diversas cargas exteriores. Algunos ejemplos característicos se dan en la figura 130.

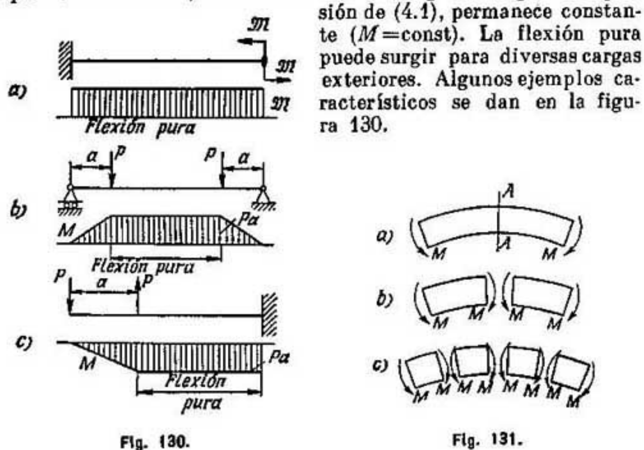


Fig. 130. Fig. 131.

Prescindiendo de las particularidades de aplicación de las fuerzas exteriores y de las particularidades de los apoyos, analicemos solamente el tramo donde $M=\text{const}$ y $Q=0$. En los extremos de este tramo actúan solamente los momentos M (fig. 131, *a*).

Debido a la acción de los momentos M la viga se flexiona. Como en todas las secciones aparece el mismo momento flector, en el caso de una barra homogénea, la variación de la curvatura en todos los tramos será la misma. Es decir, en el caso de la flexión pura el eje de la barra homogénea adquiere la forma del arco de una circunferencia.

Es fácil observar que el conjunto de puntos que, antes de la flexión, se encontraba en el plano de la sección transversal de la barra, formará después de la flexión también un plano, pero desplazado en el espacio. En efecto, veamos la sección transversal media AA (fig. 131, *a*). De la condición de simetría se deduce que los puntos de esta sección no pueden tener desplazamientos preferibles ni hacia la derecha ni hacia la izquierda, puesto que las dos partes se encuentran en las mismas condiciones. Es decir que esta sección permanece plana.

Dividiendo la barra en dos partes iguales mediante la sección AA, obtendremos dos tramos de longitud dos veces menor que se encuentran en las mismas condiciones que todo el tramo de la barra (fig. 131, *b*). Los razonamientos anteriores se pueden repetir para cada uno de los tramos obtenidos (fig. 131, *c*), lo que demuestra que las secciones medias de estos tramos también permanecen planas.

Este proceso de división se puede continuar. Así se demuestra que en las proximidades de cualquier sección fijada previamente existen cuantas se quiera secciones para las cuales se cumple la condición de las secciones planas expresada anteriormente. De hecho, esto demuestra que, en general, *todas* las secciones de la barra homogénea, en la flexión pura, no alabean, sino que solamente giran.

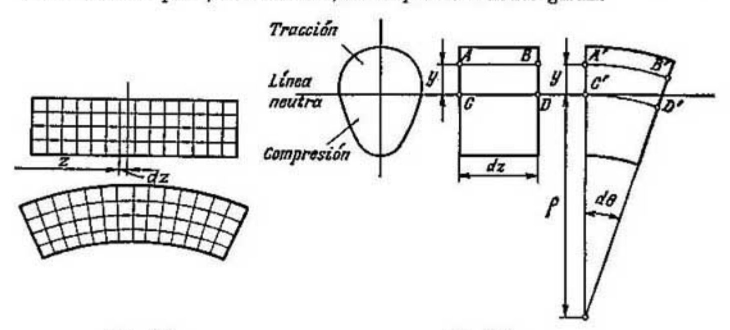


Fig. 132. Fig. 133.

Las deformaciones que acompañan a la flexión pura, se pueden considerar como el resultado del giro mutuo de las secciones transversales planas (fig. 132). Analicemos dos secciones contiguas a la distancia dz una de la otra (fig. 133) y consideremos convencionalmente que la sección de la izquierda es inmóvil. Entonces, como resultado del giro de la sección de la derecha un ángulo $d\theta$, las fibras superiores se alargarán y las inferiores se acortarán. Existe, claro está, una capa donde no existen alargamientos. Denominemos esta capa *neutra* y la representamos por el segmento CD. Como resultado del giro de las secciones la variación de la curvatura de la capa neutra será,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dz}.$$

El segmento arbitrario $AB=dz$ (fig. 133) recibirá el incremento $A'B'-AB$. Como las secciones permanecen planas,

$$A'B'-AB=(\rho+y)\,d\theta-\rho d\theta=y d\theta,$$

siendo y, la distancia desde el segmento AB que se analiza, hasta

la capa neutra CD La posición de esta última es por ahora desconocida.

El alargamiento unitario de la capa AB será,

$$\varepsilon = \frac{y\,d\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}, \tag{4.2}$$

y según la ley de Hooke,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}. \tag{4.3}$$

Así pues, en la flexión pura, las tensiones en la sección transversal varían linealmente. El lugar geométrico de los puntos de la sección que cumplen la condición $\sigma=0$ se denomina *línea neutra* de la sección. La línea neutra es, claro está, perpendicular al plano de la curvatura de la barra flexionada.

Hallemos ahora la relación que existe entre la tensión σ y los factores de fuerza interiores que aparecen en la sección transversal de la barra en la flexión pura.

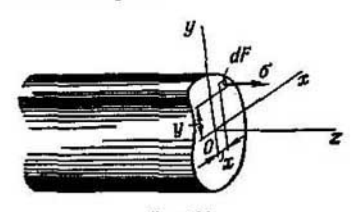


Fig. 134.

La suma de las fuerzas elementales $\sigma\,dF$ (fig. 134) es igual a la fuerza normal N en la sección, pero como en la flexión pura $N=0$, obtendremos,

$$N = \int_F \sigma\,dF = 0,$$

o de acuerdo con (4.3)

$$\frac{E}{\rho}\int_F y\,dF = 0,$$

es decir,

$$\int_F y\,dF = 0.$$

Esta integral representa el momento estático de la sección respecto a la línea neutra, ya conocido por nosotros en el capítulo anterior. Como este momento es igual a cero, la línea neutra pasará por el centro de gravedad de la sección. Así pues, la coordenada y en las expresiones (4.2) y (4.3) queda bien definida y se mide desde el eje central

perpendicular al plano de la curvatura. De la misma manera queda determinada la curvatura $\frac{1}{\rho}$ como la curvatura de la *capa neutra* o como la curvatura del eje de la barra.

Ubiquemos definitivamente el sistema de ejes x, y, z fijado a la sección (fig. 134). El origen del sistema de coordenadas 0 lo situamos en el centro de gravedad de la sección. El eje z lo orientamos según la normal a la sección y el eje x lo hacemos coincidir con la línea neutra. El eje y es perpendicular al eje x, y se encuentra, pues, en el plano de la variación de la curvatura. Este sistema constituye lo que se denomina *sistema móvil de ejes* cuya posición en el espacio varía de una sección a otra.

El momento flector en la sección transversal de la barra, al igual que la fuerza normal, se puede expresar de manera integral por las tensiones σ, es decir,

$$\int_F \sigma x \, dF = M_y; \quad \int_F \sigma y \, dF = M_x.$$

Observemos que, en el caso general, el plano del momento flector en la sección no coincide con el plano yz (fig. 134). Es decir, la variación de la curvatura de la barra no ocurre obligatoriamente en el plano del momento flector. Este caso general de flexión lo analizaremos posteriormente, limitándonos, por ahora, al caso particular más simple de que coinciden los planos del momento y de la curvatura.

Teniendo esto en cuenta, resulta que el momento de las fuerzas elementales $\sigma \, dF$ respecto al eje y es igual a cero y el momento de estas fuerzas respecto al eje x es igual al momento flector M. Obtenemos pues,

$$\frac{E}{\rho}\int_F yx \, dF = 0, \quad \frac{E}{\rho}\int_F y^2 \, dF = M. \tag{4.4}$$

De la primera expresión se obtiene,

$$I_{xy} = 0,$$

lo que quiere decir que la variación de la curvatura ocurre en el plano del momento, si este último pasa por uno de los ejes *principales* de la sección. Esta flexión se denomina *flexión recta*. En el caso general, cuando el plano del momento flector *no coincide* con el eje principal de la sección se obtiene la flexión *desviada*.

De la expresión (4.4) hallamos la relación entre la curvatura de la barra y el momento flector,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}, \tag{4.5}$$

siendo I_x, el momento de inercia de la sección respecto al eje central principal perpendicular al plano del momento flector.

EI_x, se denomina *rigidez de la barra* a la flexión. Como en el caso de la torsión, esta magnitud es proporcional a la cuarta potencia de las dimensiones lineales de la sección cuando éstos varían proporcionalmente.

Volviendo a la fórmula (4.3) y eliminando de ella la curvatura $1/\rho$, obtendremos para la tensión σ,

$$\sigma = \frac{My}{I_x}. \tag{4.6}$$

La tensión máxima en la flexión aparece en los puntos más alejados de la línea neutra (fig. 135),

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_x}.$$

La fracción $\frac{I_x}{y_{max}}$ se denomina *módulo de la sección* en la flexión y se designa por W_x,

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \text{ cm}^3. \tag{4.7}$$

Así pues,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{flec}}{W_x}. \tag{4.8}$$

Esta fórmula es básica para el cálculo de la resistencia de una barra a la flexión.

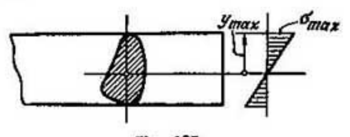


Fig. 135.

En el caso de una barra de sección rectangular de lados b y h,

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad y_{max} = \frac{h}{2}, \quad W_x = \frac{bh^2}{6} \tag{4.9}$$

En el caso de una sección circular,

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64}, \quad y_{max} = \frac{D}{2}, \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0{,}1D^3. \tag{4.10}$$

Así pues, las tensiones en la flexión son inversamente proporcionales a la tercera potencia de las dimensiones lineales de la sección.

Las formas más económicas de las secciones transversales son aquellas con las que, con un gasto mínimo de material, se obtiene el valor máximo posible del módulo de la sección W_x. Para que la forma de la sección sea racional es necesario ubicar el área de la sección lo más alejado posible de la línea neutra. Así surgieron los perfiles de paredes delgadas de sección doble T y canal de la figura 136. En el caso de la

flexión en el plano vertical, estos perfiles son muy ventajosos en comparación con otras formas de las secciones transversales.

El módulo de la sección W_x de los perfiles típicos está determinado para todos ellos y figura en las tablas correspondientes. Por eso, al calcular la resistencia de una barra no es necesario realizar cálculos complejos para la determinación de los momentos de inercia y los módulos de la sección. Al final de este libro se dan las tablas de los perfiles típicos. Aparte de los perfiles indicados en las tablas, existen

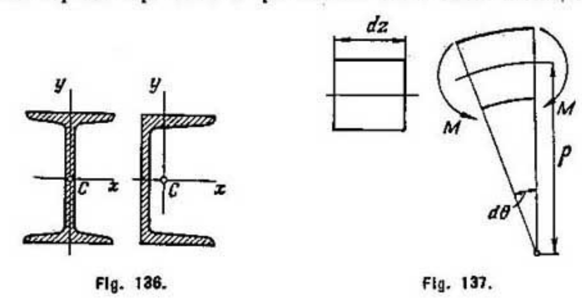


Fig. 136.

Fig. 137.

también otros perfiles que se emplean, por ejemplo, en la construcción de aviones y que se dan en surtidos especiales.

La energía de las deformaciones elásticas de la barra en la flexión se determina por el trabajo del momento M en el desplazamiento angular mutuo $d\,\theta$ de las dos secciones (fig. 137),

$$dU = \frac{1}{2} M\, d\theta.$$

Como

$$d\theta = \frac{dz}{\rho} = \frac{M}{EI_x}\, dz,$$

obtendremos,

$$U = \int\limits_l \frac{M^2\, dz}{2EI_x}. \tag{4.11}$$

Al deducir las fórmulas para la flexión pura de una barra recta no se admitió ninguna suposición arbitraria y, por lo tanto, la solución obtenida, en este sentido, se puede considerar exacta. Sin embargo, se debe tener en cuenta que en el problema que se analiza no se concretiza el carácter de la distribución de las fuerzas exteriores. Se considera solamente que en todos los casos estas fuerzas se reducen a momentos resultantes aplicados en los extremos de la barra. La solución resultará exacta solamente en el caso en que las fuerzas exteriores en los extremos se distribuyen linealmente como en todas las seccio-

nes transversales. Prácticamente, esta condición, claro está, nunca se cumple y en las proximidades de los extremos las leyes de distribución de las tensiones están lejos de ser iguales a las que se deducen de la flexión pura. Sin embargo, de acuerdo con el principio de Saint Venant se puede prescindir de la zona de los extremos como se indica,

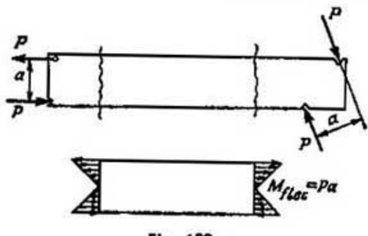


Fig. 138.

por ejemplo, en la figura 138. Entonces en la parte central de la barra todas las fórmulas deducidas anteriormente serán válidas y podrán considerarse exactas.

Veamos algunos ejemplos elementales de determinación de las tensiones en la barra sometida a flexión pura.

Ejemplo 4.1. Encontrar la posición más favorable de la viga de sección transversal cuadrada, en la flexión. Analizar dos posiciones de ella, en una el plano del momento flector es paralelo a los lados del cuadrado y en la otra coincide con su diagonal (fig. 139).

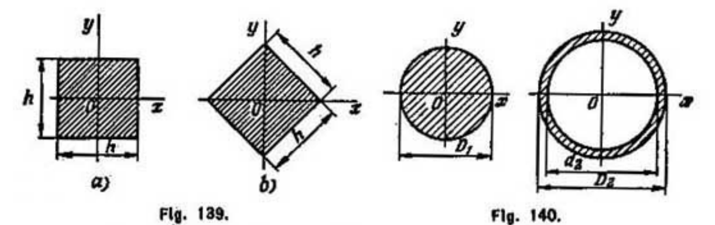


Fig. 139. Fig. 140.

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario calcular los módulos de la sección W_x en los dos casos. En el primero, según (4.9),

$$W_x=\frac{h^3}{6}$$

y en el segundo

$$I_x=\frac{h^4}{12}, \quad y_{max}=\frac{h\sqrt{2}}{2},$$

obteniendo

$$W_x=\frac{h^3}{6\sqrt{2}}.$$

Así pues, el primer caso resultó más ventajoso. En él, el módulo de la sección W_x resultó ser aproximadamente un 40% mayor.

Ejemplo 4.2. Determinar la economía de metal que se obtiene si en la estructura que trabaja a flexión se emplea, en lugar de la sección circular maciza, la sección hueca para la cual $\frac{d_2}{D_2}=0,9$ (fig. 140), si las condiciones de trabajo son las mismas.

El módulo de la sección, en caso de la sección circular maciza, se determina por la fórmula (4.10),

$$W_{x_1}=0,1D_1^3.$$

En el caso de la sección hueca W_x se determina por la diferencia de los momentos de inercia de los dos círculos, dividida por y_{max}, es decir,

$$W_{x_2}=\frac{\frac{\pi D_2^4}{64}-\frac{\pi d_2^4}{64}}{\frac{D_2}{2}}\approx 0,1D_2^3\left(1-\frac{d_2^4}{D_2^4}\right)\approx 0,1D_2^3 0,343.$$

De la condición de igualdad de resistencia,

$$W_{x_1}=W_{x_2} \quad \text{y} \quad \frac{D_1}{D_2}=\sqrt[3]{0,343}=0,7.$$

El gasto de material es proporcional al área de la sección,

$$F_1=\frac{\pi D_1^2}{4} \qquad F_2=\frac{\pi D_2^2}{4}\left(1-\frac{d_2^2}{D_2^2}\right)=\frac{\pi D_2^2}{4}0,19.$$

El porcentaje de economía del material se determina por la diferencia de las áreas referida al área del círculo macizo, es decir,

$$\frac{F_1-F_2}{F_1}100\%=\left(1-\frac{D_2^2}{D_1^2}0,19\right)100\%,$$

o sea,

$$\frac{F_1-F_2}{F_1}100\%=61\%.$$

Ejemplo 4.3. En la figura 141 está representado un voladizo solicitado por dos fuerzas P. La sección de la viga es de forma T y el material de la viga, hierro

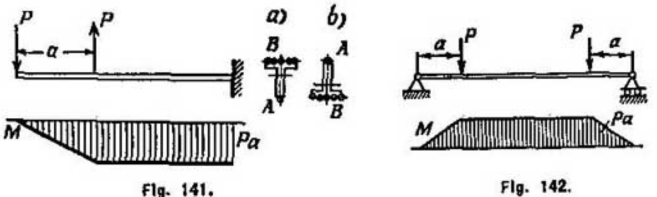


Fig. 141.

Fig. 142.

fundido. Se trata de hallar la posición más racional de esta viga, con el ala arriba (variante a) o con el ala abajo (variante b).

Puesto que el punto A está más lejos del centro de gravedad de la sección que el punto B, la tensión en el primero será siempre mayor, en valor absoluto, que en el segundo. Cuando las fuerzas P se orientan según se indica, las fibras comprimidas serán las de abajo. Como el hierro fundido trabaja a compresión

mejor que a tracción, conviene situar el punto A en la zona de abajo, es decir, que la sección debe colocarse con el ala en la parte superior lo que indica que es preferible la variante a.

Ejemplo 4.4. Calcúlese la sección doble T de la viga de dos apoyos (fig. 142), garantizando un coeficiente de seguridad igual a dos, si $P=2$ tf, $a=1$ m y $\sigma_{ft}=$ $=3\,000$ kgf/cm².

El momento flector máximo aparece en el tramo de la flexión pura y es igual a Pa. La tensión σ_{max} no deberá superar la mitad de σ_{ft}. Por lo tanto,

$$\frac{Pa}{W_x}\leqslant\frac{3\,000}{2},$$

de donde se obtiene,

$$W_x\geqslant\frac{2\,000\cdot 100\cdot 2}{3\,000}=133\ \text{cm}^3.$$

De la tabla del surtido de perfiles laminados (véase el apéndice del libro) escogemos el perfil doble T Nº18 para el cual,

$$W_x=148\ \text{cm}^3.$$

Ejemplo 4.5. Un alambre de diámetro d se enrolla en un tambor de diámetro D. Determinar la tensión originada, por la flexión, que aparece en las secciones transversales del alambre, si $d\ll D$.

La curvatura de alambre enrollado es,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2}{D}$$

Sin determinar el momento flector, por la fórmula 4.3), se obtiene directamente,

$$\sigma_{max}=E\,\frac{2y_{max}}{D}=E\,\frac{d}{D}$$

Es decir, que cuando la curvatura es constante, la tensión σ_{max} crece proporcionalmente al diámetro del alambre.

§ 30. Tensiones en el caso de flexión transversal

Hemos visto que durante la flexión pura, en las secciones transversales de la barra surgen solamente tensiones normales. Las fuerzas interiores correspondientes se reducen a un momento flector que actúa en la sección. En el caso de la flexión transversal, en la sección de la barra, surge no sólo el momento flector, sino también la fuerza cortante Q, que constituye la resultante de las fuerzas elementales distribuidas en el plano de la sección (fig. 143). Por lo tanto, en este caso, en las secciones transversales de la barra surgen no solamente tensiones normales, sino también tangenciales.

Las tensiones tangenciales τ van acompañadas de deformaciones angulares γ. Por lo tanto, aparte de los desplazamientos fundamentales, propios de la flexión pura, cada área elemental de la sección dF recibe también ciertos desplazamientos angulares elementales adicionales originados por el deslizamiento. Las tensiones tangenciales se distribuyen en la sección de manera no uniforme, es decir, que los

desplazamientos angulares tampoco se distribuyen de manera uniforme. Así pues, en la flexión transversal, a diferencia de la flexión pura, las secciones transversales de la barra no permanecen ya planas. En la figura 144 está representado el cuadro típico de alabeo de las secciones transversales de la barra.

Sin embargo, este alabeo del plano de las secciones transversales no influye sensiblemente sobre el valor de las tensiones normales.

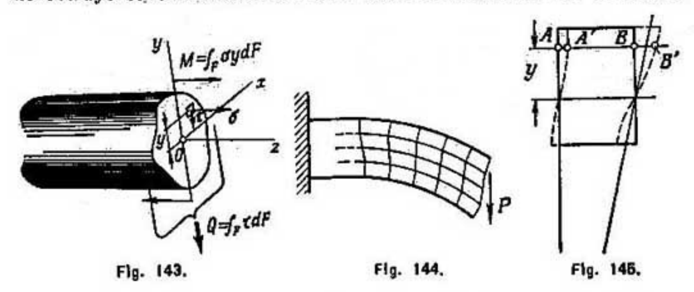


Fig. 143. Fig. 144. Fig. 145.

En el caso particular cuando la fuerza cortante Q no varía a lo largo de la barra, las fórmulas (4.6) y (4.8),

$$\sigma=\frac{My}{I_x} \text{ y } \sigma_{max}=\frac{M}{W_x},$$

que fueron obtenidas para el caso de flexión pura, en el caso de la flexión transversal son absolutamente exactas. En efecto, cuando $Q=$const., el alabeo de todas las secciones resulta ser igual (fig. 145) y, por lo tanto, durante el giro mutuo de dos secciones contiguas el alargamiento de la fibra longitudinal AB será el mismo, independientemente de que la sección permanezca plana o no.

Cuando la fuerza cortante varía a lo largo del eje de la barra, las fórmulas de la flexión pura conducen a cierto error en el valor de σ. Mediante un análisis no complicado, se puede demostrar que la magnitud de dicho error es del orden de $\frac{h}{l}$ en comparación con la unidad, siendo h, la dimensión de la sección transversal en el plano de la flexión y l, la longitud de la barra. Según la definición dada en el § 2, la barra se caracteriza por el hecho de que las dimensiones de su sección transversal son muy inferiores a la longitud. Por lo tanto, la magnitud de $\frac{h}{l}$ es relativamente pequeña, resultando pequeño también el error indicado.

Lo expuesto nos permite admitir la hipótesis de las secciones planas. En adelante, consideraremos que el conjunto de puntos que forman el plano de la sección transversal antes de la flexión, forma tam-

bién un plano después de la flexión, pero girado en el espacio. Esta suposición es admisible en la medida en que las deformaciones angulares γ de la sección se puede considerar sensiblemente inferiores que los desplazamientos angulares originados por la variación de la curvatura de la barra.

La segunda particularidad de la flexión transversal consiste en la existencia de tensiones normales en las secciones longitudinales de la barra, es decir, de tensiones que «presionan» las capas de la viga. Estas tensiones surgen solamente cuando la fuerza cortante Q es variable, y tienen una magnitud muy pequeña*).

Así pues, dentro de los límites fijados por estas suposiciones, las fórmulas (4.6) y (4.8) para la determinación de las tensiones normales, son aplicables no solamente en la flexión pura, sino también en la flexión transversal. En la misma medida es aplicable también la fórmula (4.5) que nos da la relación existente entre la curvatura de la barra y el momento flector.

Calculemos ahora aproximadamente la magnitud de las tensiones tangenciales τ en la flexión transversal. La manera más fácil de obtenerlas consiste en determinar las tensiones tangenciales recíprocas

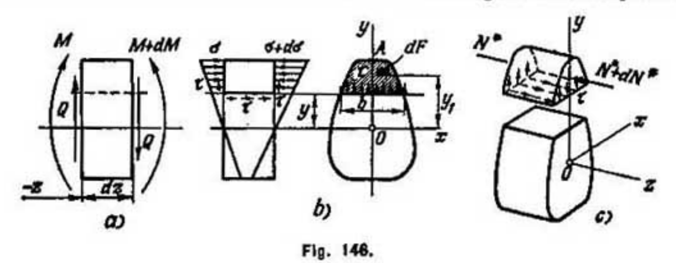


Fig. 146.

a estas que aparecen en los planos longitudinales de la barra. Separemos de la barra un elemento de longitud dz (fig. 146, *a*). En la flexión transversal, los momentos que aparecen en las secciones derecha e izquierda del elemento no son iguales, sino que se diferencian en la magnitud dM. Con una sección horizontal longitudinal, trazada a la distancia y de la capa neutra (fig. 146, *b*), dividimos el elemento en dos partes y analizamos las condiciones de equilibrio de la parte superior. La resultante de las fuerzas normales $\sigma\, dF$ en la sección izquierda correspondiente a la zona rayada F^* es,

$$N^* = \int_{F^*} dF$$

*) Las zonas especiales donde se aplican las fuerzas concentradas no se analizan.

o de acuerdo a (4.6),

$$N^* = \frac{M}{I_x} \int_{F^*} y_1 dF,$$

siendo y_1, a diferencia de y, la ordenada variable del área elemental dF (fig. 146, *b*). Esta integral representa el momento estático respecto al eje x de la parte del área que se encuentra por encima de la sección longitudinal (superior al nivel de y). Designando este momento estático por S_x^*, obtendremos

$$N^* = \frac{MS_x^*}{I_x}.$$

La fuerza que se desarrolla en la sección derecha será ya diferente,

$$N^* + dN^* = \frac{(M + dM)\, S_x^*}{I_x}.$$

La diferencia entre estas fuerzas

$$dN^* = \frac{dMS_x^*}{I_x}$$

deberá equilibrarse por las fuerzas tangenciales que aparecen en la sección longitudinal del elemento (fig. 146, *b* y *c*).

Admitimos como primera aproximación que las tensiones tangenciales se distribuyen uniformemente a lo ancho b de la sección. Entonces,

$$\frac{dMS_x^*}{I_x} = \tau b\, dz,$$

de donde se obtiene

$$\tau = \frac{QS_x^*}{I_x b}. \tag{4.12}$$

Esta fórmula se denomina *fórmula de Zhuravski*, científico ruso del siglo pasado que, por primera vez, investigó en forma general las tensiones tangenciales en la flexión transversal.

La expresión obtenida permite calcular la magnitud de las tensiones tangenciales que aparecen en las secciones longitudinales de la barra. Las tensiones que surgen en las secciones transversales son iguales a ellas por ser recíprocas. La relación entre τ e y dentro de la sección transversal se determina por el momento estático S_x^*. Al acercarnos al borde superior de la sección, el área de la parte rayada de la sección (fig. 146, *b*) disminuye hasta convertirse en cero. Aquí, por lo tanto, $S_x^*=0$. Cuando nos acercamos al borde inferior, la parte rayada ocupará ya *toda* la sección y, puesto que el eje x es central, aquí también $S_x^*=0$. Así pues, como se deduce de la fórmula (4.12), las tensiones tangenciales en los puntos superior e inferior de la sección son iguales a cero.

En el caso de una barra de sección rectangular de lados b y h (fig. 147,a) tendremos,

$$S_x^* = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \quad I_x = \frac{bh^3}{12}, \; b = b$$

y, por lo tanto,

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right),$$

resultando que el diagrama de las tensiones tangenciales varía, en la altura de la sección, según una parábola cuadrática. La tensión máxima ocurre cuando $y = 0$,

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}.$$

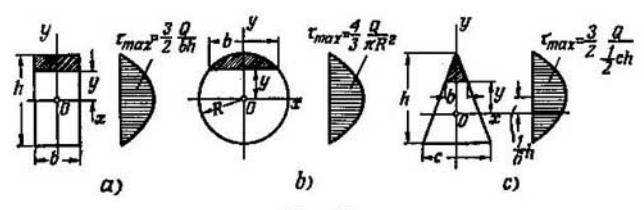


Fig. 147.

En el caso de una barra de sección circular (fig. 147, b) después de una integración elemental, se puede obtener,

$$S_x^* = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}.$$

Como

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}, \quad b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

obtendremos,

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4}(R^2 - y^2),$$

y

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}.$$

En el caso de una barra de sección triangular de base c y altura h (fig. 147, c) tendremos,

$$S_x^* = \frac{1}{3}b\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right), \quad I_x = \frac{ch^3}{36},$$

$$\tau = \frac{12Q}{ch^3}\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right).$$

La tensión máxima ocurre a la distancia $y = \frac{1}{6}h$ de la línea neutra,

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{\frac{1}{2}ch}.$$

En los dos ejemplos últimos se ve claramente el carácter aproximado de las operaciones realizadas. Esto se desprende del hecho de que, en la sección transversal, las tensiones tangenciales no solamente tienen componentes paralelas al eje y, sino también componentes paralelas al eje x. En efecto, supongamos cómo esto se hizo más arriba, que en los puntos A situados en el contorno de la sección (fig. 148), la tensión tangencial τ se orienta según el eje y. Descompongamos el vector τ en dos componentes, una según la normal al contorno τ_n y otra, tangencial a éste τ_t. Según las condiciones de solicitación, la superficie exterior de la barra está libre de tensiones tangenciales y, por lo tanto, las tensiones recíprocas a τ_n no existen. Es decir que $\tau_n=0$, resultando que la tensión tangencial completa en las proximidades del contorno se orienta según la tangente al contorno y, por lo tanto, la suposición según la cual τ está dirigida según el eje y resulta errónea. Así se establece la existencia de componentes de τ orientadas según el eje x. Para determinarlas se recurre a métodos más complicados que los expuestos. Por los métodos de la teoría de la elasticidad, se puede demostrar que en la mayoría de los casos las componentes de τ a lo largo del eje x juegan un papel muy inferior en comparación con las componentes paralelas al eje y.

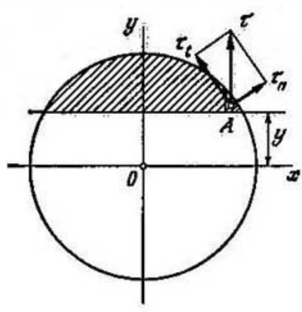


Fig. 148.

De los ejemplos analizados anteriormente se puede hacer la conclusión general de que la zona de las tensiones tangenciales máximas se encuentra aproximadamente en la parte central de la sección y que τ_{max}, en el caso de barras de paredes no delgadas, es del orden de Q/F.

Se pueden comparar los valores absolutos de las tensiones normales máximas con los de las tensiones tangenciales máximas que aparecen en las secciones transversales de la barra. Por ejemplo, en el caso de un voladizo de sección rectangular (fig. 149) obtendremos,

$$\sigma_{max}=\frac{M_{flec}}{W_x}=\frac{6Pl}{bh^2}, \quad \tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{P}{bh},$$

de donde se halla,

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}}=\frac{h}{4l},$$

lo que quiere decir que la relación entre las tensiones tangenciales máximas, en la sección transversal, y las tensiones normales máximas es aproximadamente igual a la relación entre la altura de la sección y la longitud de la barra, es decir, que las tensiones tangenciales son

muy inferiores a las normales. Esta apreciación, excepto algunas exclusiones posibles, es válida, en general, para todas las vigas que no sean de paredes delgadas. En lo que se refiere a las barras de paredes delgadas, este problema se analizará especialmente en el capítulo XI.

Debido a que la magnitud de τ_{max} es pequeña, el cálculo de la resistencia en la flexión transversal se realiza teniendo en consideración solamente las tensiones normales, de la misma forma que en el caso de la flexión pura. Las tensiones tangenciales no se tienen en cuenta. Esto resulta natural si se tiene en consideración que en los puntos de la sección más alejados de la línea neutra, es decir, en los

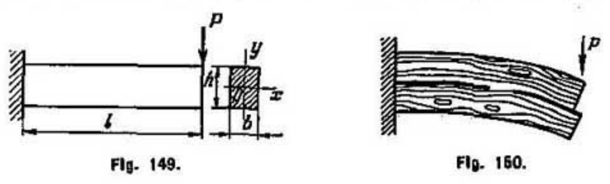


Fig. 149. Fig. 150.

puntos más peligrosos, las tensiones tangenciales en la sección transversal son iguales a cero.

Al analizar el fenómeno desde el punto de vista cualitativo, se debe tener en cuenta que las tensiones tangenciales en las secciones transversales y las tensiones recíprocas a éstas en los planos longitudinales, a pesar de ser pequeñas pueden, en algunos casos, influir considerablemente cuando se juzga sobre la resistencia de la barra. Por ejemplo, durante la flexión transversal de una barra corta de madera, puede ésta destruirse, no en la sección transversal del empotramiento, sino como consecuencia de la cortadura en el plano longitudinal situado cerca de la capa neutra, donde aparece τ_{max} (fig. 150).

Las tensiones tangenciales en los planos longitudinales son el reflejo de las ligaduras existentes entre las capas de la barra durante la flexión transversal. Si se destruyen estas ligaduras en algunas capas, entonces variará el carácter de la flexión de la barra. Por ejemplo, en la barra compuesta por n láminas (fig. 151, a) cada una de ellas, cuando no existen fuerzas de fricción, se flexiona independientemente de las otras. La fuerza exterior correspondiente a una lámina es P/n y la tensión normal máxima en la sección transversal de la lámina,

$$\sigma_{max}=\frac{M}{W_x}\frac{\frac{P}{n}l}{\frac{1}{6}b\left(\frac{h}{n}\right)^2}=\frac{6Pl}{bh^2}n.$$

Si las láminas se unen con pernos suficientemente rígidos (fig. 151, b), la barra trabajará como una unidad. En este caso, la

magnitud de la tensión normal máxima será n veces menor,

$$\sigma_{max} = \frac{6Pl}{bh^2}.$$

En otras palabras, el paquete de láminas unido es capaz, como primera aproximación, de resistir una carga n veces mayor que el paquete de láminas no unidas entre sí.

En las secciones transversales de los pernos, durante la flexión de la barra, aparecen fuerzas cortantes. La máxima de ellas ocurrirá

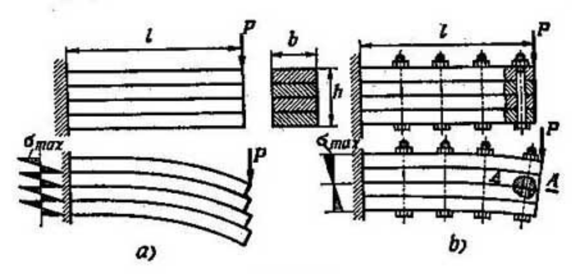


Fig. 151.

en la sección que coincide con el plano neutro de la barra flexionada (sección AA de la figura 151, b). Esta fuerza se determina, como primera aproximación, igualando la suma de las fuerzas cortantes en las secciones de los pernos a la resultante longitudinal de las tensiones tangenciales correspondiente a una barra monolítica,

$$mQ_{perno}^{max} = \tau_{max} bl = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}bl = \frac{3}{2}\frac{Pl}{h},$$

siendo m el número de pernos.

Es interesante comparar la variación de la curvatura de la barra en el empotramiento según la fórmula (4.5) en los dos casos cuando el paquete va unido y cuando está compuesto por láminas separadas. En el primer caso,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{flec}}{EI_x} = \frac{12Pl}{Ebh^3}$$

y en el segundo,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{flec}}{EI_x} = \frac{\frac{P}{n}l}{E\frac{1}{12}b\left(\frac{h}{n}\right)^3} = \frac{12Pl}{Ebh^3}n^2.$$

Las flechas varían proporcionalmente a la curvatura.

Así pues, en comparación con la barra monolítica, el conjunto de láminas libres resulta n^2 veces más flexible y solamente n veces menos

resistente. Esta diferencia entre los coeficientes de disminución de la rigidez y de la resistencia al pasar al paquete de láminas libres se usa en la práctica para la creación de ballestas flexibles. Las fuerzas de fricción entre las láminas aumentan la rigidez del paquete puesto que restablecen parcialmente las fuerzas tangenciales entre las capas de la barra que se pretendían eliminar al pasar al paquete de láminas libres. Las ballestas requieren pues, el engrase de sus láminas y deben mantenerse limpias.

Para determinar con la flexión transversal, analicemos un ejemplo que ilustra el orden en que se han de llevar los cálculos de la resistencia de una viga en el caso de la flexión.

Ejemplo 4.6. Determinar la dimensión a de la sección transversal T representada en la figura 152, para el caso de una viga de dos apoyos, solicitada por una

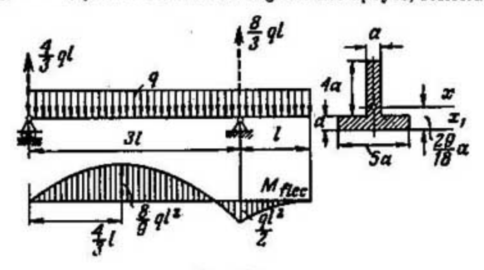


Fig. 152.

carga uniformememte distribuída de intensidad q. El coeficiente de seguridad referido al límite de fluencia no deberá ser inferior a dos. Se sabe que $l=1$ m, $q=10$ kgf/cm y $\sigma_{ft}=\sigma_{fc}=35$ kgf/mm².

Calculamos las reacciones de apoyos y construimos el diagrama de los momentos flectores (fig. 152). El momento flector es,

$$M_{\max}=\frac{8}{9}\,ql^2.$$

De la condición de resistencia se deduce,

$$\frac{8ql^2}{9W_x}\leqslant\frac{\sigma_{ft}}{n},$$

resultando para el módulo de la sección,

$$W_x\geqslant\frac{8\cdot 10\cdot 100^2\cdot 2}{9\cdot 3\,500}=50{,}7\ \text{cm}^3.$$

Al analizar la sección dada hallamos la distancia desde el eje x_1 hasta el centro de gravedad, que es $\frac{29}{18}a$. El momento de inercia respecto al eje x_1 será,

$$I_{x_1}=43a^4.$$

Pasando ahora al eje central x hallaremos,

$$I_x = \frac{707}{26} a^4.$$

Por último, el módulo de la sección resulta,

$$W_x = I_x : \left(5a - \frac{29}{18} a\right) = \frac{707}{122} a^3,$$

de donde se obtiene el tamaño a,

$$a^3 \geqslant 50{,}7 \frac{122}{707} \text{cm}^3, \quad a \geqslant 2{,}06 \text{ cm}.$$

§ 31. Ecuación diferencial de la línea elástica de la viga. Desplazamientos en la flexión

La forma del eje flexionado de la viga, o como se dice, la forma de la línea elástica se puede obtener de la expresión (4.5),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}.$$

En un sistema inmóvil de coordenadas yz (fig. 153)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \tag{4.13}$$

Nos limitamos al estudio del caso de desplazamientos pequeños. Entonces la tangente del ángulo θ entre la tangente a la línea elástica

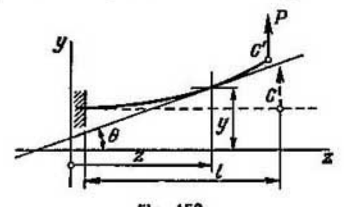


Fig. 153.

y el eje z (fig. 153) resultará muy pequeña. Por lo tanto, se puede prescindir del cuadrado de y' en comparación con la unidad, considerando que

$$\frac{1}{\rho} \approx y'',$$

de donde se obtiene

$$y'' = \frac{M}{EI_x}. \tag{4.14}$$

Comparando la expresión (4.14) con las fórmulas (4.1), se obtiene sin dificultad una cadena de relaciones diferenciales,

$$\left.\begin{array}{r}\theta=y',\\ M=EI_xy'',\\ Q=(EI_xy'')',\\ q=(EI_xy'')'',\end{array}\right\} \quad (4.15)$$

o en el caso de una barra de sección constante,

$$\left.\begin{array}{r}\theta=y',\\ M=EI_xy'',\\ Q=EI_xy''',\\ q=EI_xy^{(IV)},\end{array}\right\} \quad (4.16)$$

De estas fórmulas se deduce que en el caso de solicitación de una barra de sección constante por una carga uniforme distribuida (q=const.) resulta,

$$y^{(IV)}=\frac{q}{EI_x}=\text{const.},$$

lo que quiere decir que la forma de la barra flexionada se representa por una curva de cuarto orden. Si en cierto tramo de la barra la intensidad $q=0$ (Q=const) el eje de la barra se flexionará por una curva de tercer orden.

Está claro que las ecuaciones escritas más arriba son exactas en la medida en que se pueden considerar pequeños los desplazamientos. La inmensa mayoría de los problemas, relacionados con los cálculos de la resistencia y de la rigidez en la flexión, se resuelve partiendo de esta suposición. Como la magnitud de y'^2, de la cual se prescindió en la expresión (4.13), es en efecto infinitamente pequeña, la exactitud que se obtiene de esta manera resulta ser muy grande.

En algunos casos resulta necesario realizar el cálculo cuando los desplazamientos elásticos son grandes. Estos casos se encuentran fundamentalmente, cuando se estudian los resortes especiales de ciertos dispositivos.

Si el sistema elástico es capaz de mantener las propiedades elásticas en el caso de grandes desplazamientos, este sistema se denomina sistema flexible, independientemente de que se trate de flexión, torsión o tracción. En la flexión, la magnitud de los desplazamientos elásticos límites se determina, no sólo por las propiedades del material, sino también, en la misma medida, por la magnitud de la razón entre la longitud de la barra y la dimensión de la sección transversal en el plano de la flexión.

El alargamiento máximo en la flexión es, de acuerdo a la fórmula (4.2),

$$\varepsilon_{max}=\frac{y_{max}}{\rho}.$$

La tensión será,

$$\sigma_{max} = E\frac{y_{max}}{\rho}.$$

La barra puede recibir desplazamientos grandes cuando varía considerablemente la curvatura $1/\rho$. Esto resulta posible, en lo que se refiere a las tensiones menores que el límite de elasticidad, solamente cuando y_{max} es suficientemente pequeño, es decir, cuando la altura de la sección es pequeña. La barra flexible tiene, por lo tanto, generalmente, la forma de una banda fina o de un alambre, fino también, y frecuentemente se denomina *barra fina flexible*.

La ecuación diferencial de la línea elástica de la barra flexible es,

$$\frac{M_{flec}}{EI_x} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

La diferencia entre esta ecuación y la ecuación (4.14) consiste no solamente en que en ella se conserva el término no lineal y'^2 en el denominador, sino que, en el caso de la barra flexible, la expresión de M_{flec} se debe obtener, teniendo obligatoriamente en cuenta los desplazamientos que aparecen en la barra y que, en la construcción habitual de los diagramas de los momentos, no se tienen en cuenta. Esta particularidad de las barras flexibles se ilustra claramente en el ejemplo del voladizo (fig. 153). Se puede observar que, al crecer las flechas, la fuerza vertical P recibe un desplazamiento horizontal y como resultado de esto, el momento flector en cada punto de la barra varía en cierta magnitud que depende tanto del desplazamiento local horizontal como del desplazamiento horizontal del punto de aplicación de la fuerza P.

Los métodos generales para el estudio de los desplazamientos grandes de la barra en la flexión se estudian en la *teoría de las barras flexibles*. Esta teoría sale fuera de los marcos de la resistencia de materiales y, por lo tanto, no se estudiará en este curso.

Veamos algunos ejemplos de determinación de la forma de la línea elástica de la barra flexionada, cuando se trata de deformaciones pequeñas.

Ejemplo 4.7. Plantear la ecuación de la línea elástica del voladizo solicitado en su extremo por la fuerza concentrada P (fig. 154).

Ubicamos el origen de las coordenadas zy en el empotramiento. El momento flector en la sección z será entonces,

$$M = P(l-z).$$

Debido a que los desplazamientos son pequeños, consideramos que este momento no depende de las flechas.

Después de una doble integración hallaremos,

$$y = \frac{P}{EI_x}\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2\right),$$

siendo C_1 y C_2 las constantes de integración que se determinan de las condicio-

nes de borde. En nuestro caso, cuando $z=0$ se obtiene $y=0$ e $y'=0$ y, por lo tanto, $C_1=0$ y $C_2=0$. Así pues,

$$y=\frac{P}{EI_x}\left(l\,\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}\right).$$

La flecha máxima ocurre en el punto de aplicación de la fuerza P, es decir, cuando $z=l$,

$$y_{max}=\frac{Pl^3}{3EI_x}.$$

Ejemplo 4.8. La viga de dos apoyos de longitud l está solicitada por la fuerza P aplicada a una distancia a del apoyo izquierdo (fig. 155). Plantear la ecuación

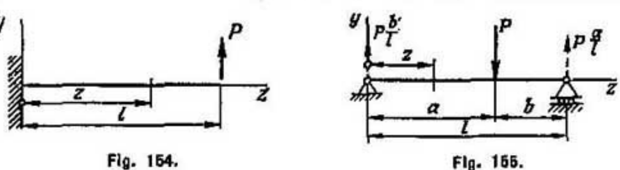


Fig. 154. Fig. 155.

de la línea elástica y determinar el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.

El origen de coordenadas lo situamos en el apoyo izquierdo. Los momentos flectores en el primer tramo y en el segundo serán,

$$M_1=P\frac{b}{l}z,\quad M_2=P\frac{b}{l}z-P(z-a).$$

Después de una doble integración hallaremos,

$$y_1=\frac{P}{EI_x}\left(\frac{b}{l}\,\frac{z^3}{6}+C_1z+C_2\right),$$

$$y_2=\frac{P}{EI_x}\left(\frac{b}{l}\,\frac{z^3}{6}-\frac{z^3}{6}+a\,\frac{z^2}{2}+C_3z+C_4\right).$$

Las constantes de integración se determinan de las condiciones de apoyo de la barra y de las condiciones de continuidad, al pasar del primer tramo al segundo, es decir,

cuando $z=0$ $y_1=0$,
cuando $z=a$ $y_1=y_2$ y $y_1'=y_2'$,
cuando $z=l$ $y_2=0$.

De estas ecuaciones hallamos,

$$C_1=\frac{a}{6l}(3al-2l^2-a^2),\quad C_2=0,$$

$$C_3=-\frac{a}{6l}(2l^2+a^2),\quad C_4=\frac{a^3}{6}$$

y, por lo tanto,

$$y_1=\frac{P}{EI_x}\left[\frac{b}{l}\,\frac{z^3}{6}\,\frac{az}{6l}(3al-2l^2-a^2)\right],$$

$$y_2=\frac{P}{EI_x}\left[\frac{z^3}{6}\left(\frac{b}{l}-1\right)+\frac{az^2}{2}-z\,\frac{a}{6l}(2l^2+a^2)+\frac{a^3}{6}\right].$$

En el punto de aplicación de la fuerza P,

$$y_1 = y_2 = -\frac{Pa^2}{3EI_x l}(l-a)^2.$$

Si la fuerza se aplica en el centro de la luz de la viga,

$$y_1 = y_{max} = -\frac{Pl^3}{48EI_x}.$$

La coordenada y del punto de aplicación de la fuerza después de la flexión de la barra resulta ser negativa, lo que indica que la barra se flexiona en dirección opuesta a la dirección positiva del eje y.

§ 32. Ecuación universal de la línea elástica de la viga

De los ejemplos analizados se ve que en el caso de una viga de varios tramos, la determinación de la forma de la línea elástica resulta dificultosa. La ecuación de cada tramo, una vez realizada la integración, contiene dos constantes arbitrarias. Si la viga tiene n tramos resulta entonces necesario resolver conjuntamente $2n$ ecuaciones para la determinación de $2n$ constantes de integración.

En el caso de una barra de rigidez constante EI_x es fácil vencer estas dificultades si, al plantear la ecuación de la línea elástica, nos atenemos a ciertas reglas* .

Veamos una barra solicitada por la carga que se encuentra con más frecuencia, digamos por un momento concentrado $\mathfrak{M}$, una fuerza

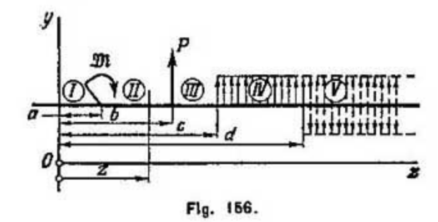


Fig. 156.

concentrada P y una carga de intensidad q distribuida uniformemente sobre cierto tramo de la barra (fig. 156). De estos tres tipos de factores de fuerza se pueden formar casi todas las cargas que se encuentran en la práctica. Consideramos positivas las direcciones de las cargas que se indican en la figura, es decir, para q y P hacia arriba y para el momento $\mathfrak{M}$, según las manecillas del reloj. El sistema indicado de factores de fuerza deberá satisfacer las condiciones de equilibrio.

*) El caso de la línea elástica de una barra de rigidez variable se analizará más abajo (capítulo XV, § 108) al determinar las frecuencias de las oscilaciones propias de la viga.

El problema consiste en establecer las particularidades que cada tipo de factores de fuerza exterior introduce en la ecuación de la línea elástica.

Escribamos las expresiones de los momentos flectores para cada uno de los cinco tramos indicados en la figura,

$$I)\ M=0 \qquad (z\leqslant a),$$
$$II)\ M=\mathfrak{M} \qquad (a\leqslant z\leqslant b),$$
$$III)\ M=\mathfrak{M}+P(z-b) \qquad (b\leqslant z\leqslant c),$$
$$IV)\ M=\mathfrak{M}+P(z-b)+q\frac{(z-c)^2}{2} \qquad (c\leqslant z\leqslant d),$$
$$V)\ M=\mathfrak{M}+P(z-b)+q\frac{(z-c)^2}{2}-q\frac{(z-d)^2}{2} \qquad (d\leqslant z).$$

Como se ve, la expresión del momento flector en cada tramo posterior incluye la expresión completa del momento flector en el tramo anterior y se diferencia de ella solamente por la aparición de un sumando nuevo. Al pasar del tramo cuatro al quinto, esta regla se ha conservado especialmente. Para ello la carga uniformemente distribuida del tramo cuatro fue prolongada, como se indica en el dibujo por la línea punteada, al quinto tramo. Al mismo tiempo, en el quinto tramo se aplicó una carga negativa uniformemente distribuida de intensidad q, la cual compensa a la anterior.

Integramos estas expresiones sin abrir los paréntesis. Para conservar el mismo tipo de estas expresiones, la integral de $\mathfrak{M}$ la escribimos en la forma $\mathfrak{M}(z-a)$, lo que afecta exclusivamente a la magnitud de la constante arbitraria C_i. Como resultado se obtiene la expresión siguiente para los ángulos de inclinación de la línea elástica y',

$$I)\ EI_xy'=C_1,$$
$$II)\ EI_xy'=C_2+\mathfrak{M}(z-a),$$
$$III)\ EI_xy'=C_3+\mathfrak{M}(z-a)+P\frac{(z-b)^2}{2},$$
$$IV)\ EI_xy'=C_4+\mathfrak{M}(z-a)+P\frac{(z-b)^2}{2}+q\frac{(z-c)^3}{6},$$
$$V)\ EI_xy'=C_5+\mathfrak{M}(z-a)+P\frac{(z-b)^2}{2}+q\frac{(z-c)^3}{6}-q\frac{(z-d)^3}{6}.$$

Las constantes C_i deberán escogerse de manera que al pasar de un tramo a otro la magnitud y' no sufra una discontinuidad. Es decir, cuando $z=a$ $y'_1=y'_2$, cuando $z=b$ $y'_2=y'_3$, etc. Puesto que la barra tiene rigidez constante,

$$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5,$$

El ángulo de inclinación θ_0 de la línea elástica en el origen del sistema de coordenadas se determina de la expresión correspondiente al primer tramo,

$$EI_x\theta_0=C_1.$$

Integrando las expresiones obtenidas otra vez, obtendremos

$$\left.\begin{aligned}
&I)\ EI_x y = D_1 + EI_x\theta_0 z,\\
&II)\ EI_x y = D_2 + EI_x\theta_0 z + \mathfrak{M}\frac{(z-a)^2}{2},\\
&III)\ EI_x y = D_3 + EI_x\theta_0 z + \mathfrak{M}\frac{(z-a)^2}{2} + P\frac{(z-b)^3}{6},\\
&IV)\ EI_x y = D_4 + EI_x\theta_0 z + \mathfrak{M}\frac{(z-a)^2}{2} + P\frac{(z-b)^3}{6} + q\frac{(z-c)^4}{24},\\
&V)\ EI_x y = D_5 + EI_x\theta_0 z + \mathfrak{M}\frac{(z-a)^2}{2} + P\frac{(z-b)^3}{6} +\\
&\qquad\qquad + q\frac{(z-c)^4}{24} - q\frac{(z-d)^4}{24}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.17)$$

Las constantes D_i deberán determinarse de la condición de continuidad de la función y en los bordes de cada tramo.

Está claro que,

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = EI_x y_0,$$

siendo y_0, la ordenada de la línea elástica en el origen del sistema de coordenadas.

Es conveniente escribir las ecuaciones (4.17) en la forma de una sola ecuación que se denomina *ecuación universal de la línea elástica de la viga*

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x\theta_0 z\Big|_{\rm I} + \mathfrak{M}\frac{(z-a)^2}{2}\Big|_{\rm II} + \\ + P\frac{(z-b)^3}{6}\Big|_{\rm III} + q\frac{(z-c)^4}{24}\Big|_{\rm IV} - q\frac{(z-d)^4}{24}\Big|_{\rm V}. \quad (4.18)$$

Para determinar las coordenadas de los puntos de la línea elástica en el primer tramo se deben utilizar los términos de la ecuación situados a la izquierda de la raya vertical de índice I. Para el segundo tramo se debe coger los sumandos a la izquierda de la raya de índice II, etc. Para obtener las ordenadas del quinto tramo debe emplearse la expresión completa (4.18).

La ventaja de la ecuación universal de la línea elástica consiste en que permite plantear la ecuación de la línea elástica, sin la necesidad de determinar las constantes arbitrarias lo que es bastante laborioso. Independientemente del número de tramos, es necesario determinar solamente dos constantes y_0 y θ_0.

Ejemplo 4.9. Escribir la ecuación de la línea elástica para el voladizo solicitado en el tramo central por una carga distribuida (fig. 157).

Comenzamos por determinar la reacción y el momento en el empotramiento,

$$P = ql, \quad \mathfrak{M} = -\frac{3}{2}ql^2.$$

El origen de las coordenadas lo situamos en el empotramiento. Entonces $\theta_0 = 0$ e $y_0 = 0$. De los términos de la ecuación (4.18) «componemos» la ecuación

correspondiente a la viga en cuestión,

$$EI_x y = ql\,\frac{z^3}{6} - \frac{3}{2}\,ql^2\,\frac{z^2}{2}\bigg|_{I} - q\,\frac{(z-l)^4}{24}\bigg|_{II} + q\,\frac{(z-2l)^4}{24}\bigg|_{III}$$

En el primer tramo figuran los sumandos correspondientes a la fuerza y momento en el empotramiento. En el segundo tramo a éstos se le agrega el sumando correspondiente a la carga distribuida. En el tercer tramo los desplazamientos

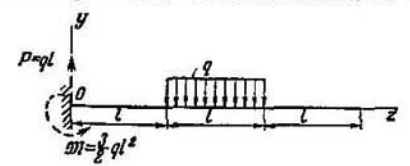


Fig. 157.

se determinan por todos los sumandos de la ecuación planteada. Si abrimos los paréntesis, obtendremos para el último tramo,

$$EI_x y = -\frac{7}{6}\,ql^3z + \frac{5}{8}\,ql^4.$$

Como era de esperar la línea elástica es aquí una recta, ya que el momento flector es igual a cero.

Ejemplo 4.10. Plantear la ecuación de la línea elástica para la viga de dos apoyos (fig. 158) y determinar los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas.

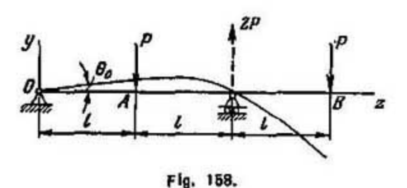


Fig. 158.

En el apoyo izquierdo la reacción es igual a cero, y en el derecho, $2P$. El origen de las coordenadas se ubica sobre el apoyo izquierdo. Por lo tanto, $y_0=0$. La ecuación de la línea elástica será

$$EI_x y = EI_x\theta_0 z\bigg|_{I} - P\,\frac{(z-l)^3}{6}\bigg|_{II} + 2P\,\frac{(z-2l)^3}{6}\bigg|_{III}.$$

De la condición

$$y=0 \text{ cuando } z=2l$$

se determina la magnitud

$$EI_x\theta_0 = \frac{Pl^2}{12}.$$

Definitivamente

$$EI_x y = \frac{Pl^2}{12}\,z\bigg|_{I} - P\,\frac{(z-l)^3}{6}\bigg|_{II} + 2P\,\frac{(z-2l)^3}{6}\bigg|_{III}.$$

Para determinar el desplazamiento del punto A recurrimos solamente al primer sumando, obteniendo para $z=l$,

$$y=+\frac{Pl^3}{12EI_x}.$$

El signo positivo indica que el punto A se desplaza hacia arriba.

Para determinar el desplazamiento del punto B suponemos $z=3l$ en todos los términos de la ecuación. Así obtendremos,

$$y=-\frac{3Pl^3}{4EI_x}.$$

El punto B se desplaza hacia abajo. En la figura 158 está indicado el carácter aproximado de la línea elástica de la viga.

§ 33. Viga sobre base elástica (viga flotante)

Veamos una viga recta que se apoya sobre un gran número de resortes, o elementos elásticos de otra índole (fig. 159), situados muy cerca el uno del otro y no relacionados entre sí.

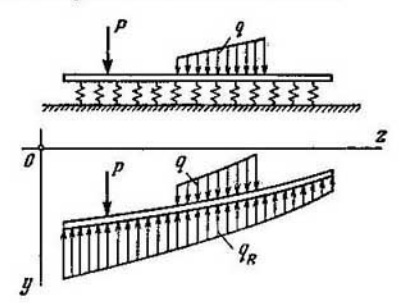


Fig. 159.

Si aplicamos a la viga fuerzas exteriores, en los resortes surgirán las reacciones correspondientes, cada una de las cuales será proporcional a la flecha local. Como la distancia entre los resortes es pequeña conviene interpretar las reacciones como fuerzas distribuidas cuya intensidad q_R será proporcional a la flecha y,

$$q_R=-\varkappa y, \tag{4.19}$$

siendo $\varkappa$, el coeficiente de proporcionalidad, que depende de la rigidez de los resortes y de la frecuencia con que éstos se ubican. El signo «menos» indica que las reacciones están dirigidas en dirección opuesta a la flecha.

Generalizando el problema, podemos suponernos que los apoyos de resortes constituyen un ambiente elástico continuo con la propiedad de que las reacciones, que en él surgen, se atienen a la ecuación (4.19) independientemente de las particularidades físicas y constructivas de la base.

La viga que se apoya sobre este tipo de base continua y deformable se denomina *viga sobre base elástica* (viga flotante). El coeficiente $\varkappa$ se denomina *coeficiente de la base elástica.*

En la ingeniería este esquema de cálculo está muy difundido y se emplea al analizar muchas estructuras. Aunque la relación (4.19) no siempre resulta válida, a menudo se la puede interpretar como aproximada. Por ejemplo, ella es exacta cuando, como en el ejemplo anterior, se trata de un gran número de apoyos elásticos no unidos entre sí. Será exacta también en el caso de la viga flotante de sección rectangular (fig. 160, *a*). Aquí, las reacciones del líquido en cada sección serán proporcionales a la magnitud de la inmersión de la viga. Sin embargo, en el caso de una traviesa (fig. 160, *b*) colocada sobre

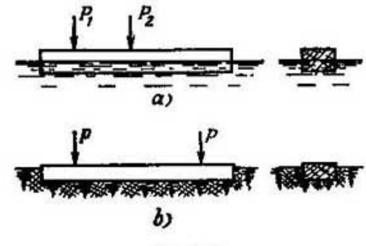


Fig. 160.

un terreno elástico, la relación (4.19) se puede interpretar como aproximada, puesto que la reacción en cada sección depende no sólo de la flecha local sino también del asiento del terreno en los puntos contiguos.

La ecuación diferencial de la flexión de la viga sobre base elástica se obtiene de la última de las fórmulas (4.16). En lugar de q se debe introducir $q - q_R$. Entenderemos por q, la carga distribuida exterior y por q_R, la reacción de la base elástica (4.19). En el caso de una viga de rigidez constante obtendremos definitivamente,

$$EIy^{(IV)} + \varkappa y = q,$$

o, introduciendo la notación,

$$\frac{\varkappa}{EI} = 4k^4, \tag{4.20}$$

hallaremos,

$$y^{(IV)}+4k^4y=\frac{q}{EI}. \qquad (4.21)$$

Si no existe la carga distribuida exterior, entonces el segundo miembro de la ecuación será igual a cero. Las fuerzas y momentos concentrados se tienen en cuenta, determinando las constantes de integración de las correspondientes condiciones de borde.

La solución de la ecuación (4.21) se puede escribir así,

$$y=e^{-kz}(C_1 \operatorname{sen} kz+C_2 \cos kz)+e^{+kz}(C_3 \operatorname{sen} kz+ \\ +C_4 \cos kz)+y^*, \qquad (4.22)$$

siendo y^*, la solución particular de la ecuación (4.21).

En muchos casos es preferible otra forma de la solución, que se obtiene de la primera (4.22), reagrupando los sumandos,

$$y=C_1 \operatorname{sen} kz \operatorname{sh} kz+C_2 \operatorname{sen} kz \operatorname{ch} kz+C_3 \cos kz \operatorname{sh} kz+ \\ +C_4 \cos kz \operatorname{ch} kz+y^*, \qquad (4.23)$$

siendo sh kz y ch kz, el seno y coseno hiperbólicos. Una vez determinada la función y, de (4.16) sin dificultad se obtienen los momentos flectores y las fuerzas cortantes.

Ejemplo 4.11. La barra de madera de sección rectangular (fig. 161) flota sobre el agua y sostiene una fuerza concentrada P en el centro. Determinar el

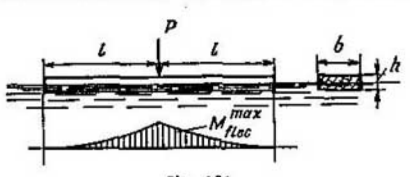


Fig. 161.

momento flector máximo, suponiendo que la fuerza P no es muy grande y que la barra no se hunde.

Si en cierta sección de la viga el desplazamiento de ésta hacia abajo es y, entonces la presión del agua aumentará en γy, siendo γ, el peso específico del agua. La intensidad de las fuerzas de reacción será,

$$q_R=-\gamma b y,$$

siendo b, la anchura de la sección rectangular. Así pues,

$$\varkappa=\gamma b$$

y, de acuerdo a la expresión (4.20),

$$k=\sqrt[4]{\frac{\gamma b}{4EI}}. \qquad (4.24)$$

El peso propio de la viga se equilibra con la reacción del líquido y, por lo tanto, suponemos en la ecuación (4.21) que $q=0$. Entonces entenderemos por

y el desplazamiento que se mide a partir de la posición de equilibrio que la viga ocupaba cuando $P=0$.

Como $y^*=0$, de (4.23) obtendremos,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{sen} kz \operatorname{ch} kz + C_3 \cos kz \operatorname{sh} kz + C_4 \cos kz \operatorname{ch} kz.$$

Derivando consecutivamente esta expresión hallaremos,

$$y' = (C_2 - C_3)\, k \operatorname{sen} kz \operatorname{sh} kz + (C_1 - C_4)\, k \operatorname{sen} kz \operatorname{ch} kz + \\ + (C_1 + C_4)\, k \cos kz \operatorname{sh} kz + (C_2 + C_3)\, k \cos kz \operatorname{ch} kz,$$

$$y'' = 2C_1k^2 \cos kz \operatorname{ch} kz + 2C_2k^2 \cos kz \operatorname{sh} kz - 2C_3k^2 \operatorname{sen} kz \operatorname{ch} kz - \\ - 2C_4k^2 \operatorname{sen} kz \operatorname{sh} kz,$$

$$y''' = 2(C_2 - C_3)\, k^3 \cos kz \operatorname{ch} kz + 2(C_1 - C_4)\, k^3 \cos kz \operatorname{sh} kz - \\ - 2(C_1 - C_4)\, k^3 \operatorname{sen} kz \operatorname{ch} kz - 2(C_2 + C_3)\, k^3 \operatorname{sen} kz \operatorname{sh} kz.$$

Colocamos el origen de z en el punto de aplicación de la fuerza P. De la condición de simetría se deduce que cuando $z=0$ $y'=0$ y que la fuerza cortante, a la derecha de la sección central, es $-\dfrac{P}{2}$. Así pues,

$$EIy'''|_{z=0} = -\frac{P}{2},$$

cuando $z=l$, $M=EIy''=0$ y $Q=EIy'''=0$. Se obtienen así cuatro ecuaciones para la determinación de las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4:

$$C_2 + C_3 = 0,$$

$$C_2 - C_3 = -\frac{P}{4EIk^3},$$

$$C_1 \cos kl \operatorname{ch} kl + C_2 \cos kl \operatorname{sh} kl - C_3 \operatorname{sen} kl \operatorname{ch} kl - C_4 \operatorname{sen} kl \operatorname{sh} kl = 0,$$

$$C_1 (\cos kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{sen} kl \operatorname{ch} kl) + C_2 (\cos kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sen} kl \operatorname{sh} kl) + \\ + C_3 (-\cos kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sen} kl \operatorname{sh} kl) + C_4 (-\cos kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{sen} kl \operatorname{ch} kl) = 0,$$

de donde hallamos,

$$C_1 = \frac{P}{8EIk^3} \frac{\operatorname{sh}^2 kl + \operatorname{sen}^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \operatorname{sen} kl \cos kl},$$

$$C_2 = -\frac{P}{8EIk^3}, \qquad C_3 = +\frac{P}{8EIk^3},$$

$$C_4 = -\frac{P}{8EIk^3} \frac{\operatorname{ch}^2 kl + \cos^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \operatorname{sen} kl \cos kl}.$$

El momento flector en la viga se determina de la segunda derivada de la función y,

$$M_{\text{flec}} = EIy'',$$

o sea,

$$M_{\text{flec}} = \frac{P}{4k}\left[\frac{\operatorname{sh}^2 kl + \operatorname{sen}^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \operatorname{sen} kl \cos kl} \cos kz \operatorname{ch} kz - \cos kz \operatorname{sh} kz - \right. \\ \left. - \operatorname{sen} kz \operatorname{ch} kz + \frac{\operatorname{ch}^2 kl + \cos^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \operatorname{sen} kl \cos kl} \operatorname{sen} kz \operatorname{sh} kz\right].$$

El momento flector máximo ocurre en la sección $z=0$,

$$M_{\text{flec}}^{\max} = \frac{P}{4k} \frac{\operatorname{sh}^2 kl + \operatorname{sen}^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \operatorname{sen} kl \cos kl}.$$

Al aumentar la longitud de l, aumenta el momento flector, pero no de forma ilimitada, puesto que cuando la longitud es muy grande

$$M_{flec}^{max} = \frac{P}{4k},$$

donde k se determina por la fórmula (4.24). El aspecto del diagrama de los momentos flectores cambia en función de la longitud l.

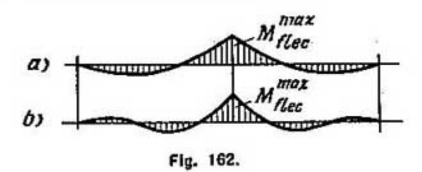


Fig. 162.

Cuando la longitud es pequeña, el diagrama de los momentos tiene la configuración de la curva de la figura 161, mientras que en el caso de mayor longitud de la viga el diagrama del momento flector cambia de signo y adquiere la configuración de las curvas de las figuras 162, *a* y *b*.

§ 34. Flexión desviada

Se entiende por flexión desviada, como sabemos ya, el caso de flexión cuando el plano del momento flector no coincide con el eje principal de la sección. Conviene interpretar la flexión desviada como una flexión simultánea de la barra en los dos planos principales zx

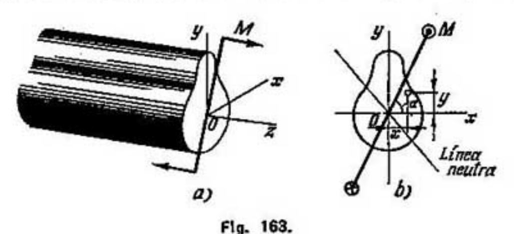


Fig. 163.

y zy (fig. 163). Para ello, descomponemos el momento flector M_{flec} en dos momentos componentes respecto a los ejes x e y,

$$M_x = M_{flec} \operatorname{sen} \alpha, \quad M_y = M_{flec} \cos \alpha.$$

La tensión normal en el punto de coordenadas x e y se determina como la suma de las tensiones originadas por los momentos M_x y M_y, es decir,

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}, \qquad (4.25)$$

ó

$$\sigma = M_{\text{flec}} \left(\frac{y}{I_x} \operatorname{sen} \alpha + \frac{x}{I_y} \cos \alpha \right).$$

Es decir, si en cada punto de la sección se ubica, en la dirección de la normal, el vector σ, entonces los extremos de los vectores, como en el caso de la flexión simple, formarán un plano. La ecuación de la línea neutra en la sección se obtiene suponiendo $\sigma = 0$,

$$y = -x \frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha. \tag{4.26}$$

Es fácil demostrar, que en la flexión desviada la línea neutra no es perpendicular al plano del momento flector. En efecto, el coeficiente angular k_1 de la línea de intersección del plano del momento con el de la sección (fig. 163, *b*) es la tangente del ángulo α,

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha,$$

mientras que el coeficiente angular de la línea neutra (fórmula 4.26) es,

$$k_2 = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Como en el caso general $I_x \neq I_y$, la condición de ortogonalidad de las rectas dada por la geometría analítica, no se cumple puesto que $k_1 \neq -\frac{1}{k_2}$. Se puede decir que la viga «prefiere» flexionarse, no en el plano del momento flector, sino en otro plano, donde la rigidez a la flexión es menor. Por eso, la línea neutra no es perpendicular al plano del momento, sino que está girada hacia el eje del momento de inercia mínimo (fig. 163, *b*).

Como el diagrama de las tensiones normales en la sección es lineal, la tensión máxima surgirá en el punto más alejado de la línea neutra. Sean las coordenadas de este punto $x_1 y_1$. Entonces de la expresión (4.25) obtendremos,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_1}{I_x} + \frac{M_y x_1}{I_y}. \tag{4.27}$$

Cuando la sección es de forma simple (círculo, rectángulo), el punto más peligroso se determina sin dificultad. En el caso de una forma compleja de la sección conviene recurrir al método gráfico. Para ello, se dibuja la sección a cierta escala y se trazan los ejes principales x e y. Después, por la fórmula (4.26), se construye la línea neutra. Mediante la regla y el cartabón (fig. 164) se halla el punto más alejado de la línea neutra y sus coordenadas x_1 e y_1 se miden directamente del dibujo.

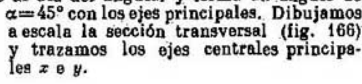
Ejemplo 4.12. La viga angular de alas iguales (fig. 165) está empotrada en un extremo y sometida a la acción del peso propio. Determinar la tensión máxi-

ma en el empotramiento. La longitud de la viga es $l=3$m, el número del perfil angular de la sección, N° 10 y el espesor del ala, $\delta=10$ mm.

De la tabla del surtido (véase el apéndice), se determina el peso propio por unidad de longitud: $q=0{,}151$ kgf/cm. El momento flector máximo será,

$$M \frac{ql^2}{2}=6\,790 \text{ kgf cm}.$$

El plano de este momento es paralelo al ala del angular y forma un ángulo de



$\alpha=45°$ con los ejes principales. Dibujamos a escala la sección transversal (fig. 166) y trazamos los ejes centrales principales x e y.

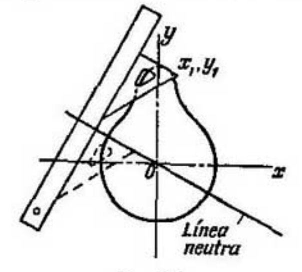


Fig. 164.

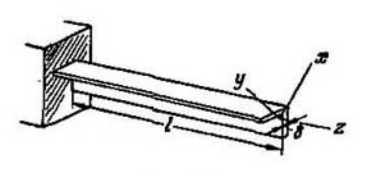


Fig. 165.

De las tablas del surtido hallamos

$$I_x=I_{max}=284 \text{ cm}^4, \quad I_y=I_{min}=74{,}1 \text{ cm}^4.$$

Por la fórmula (4.26) se obtiene la ecuación de la línea neutra,

$$y=-x\frac{284}{74{,}1}\operatorname{ctg} 45°=-3{,}83\ x.$$

Trazamos en el dibujo esta recta y hallamos el punto A más alejado de ella (fig. 166). Las coordenadas del punto son

$$x_1=-3{,}6 \text{ cm}, \ y_1=-6{,}4 \text{ cm}.$$

De la fórmula (4.27) obtendremos,

$$M_x=M_y=M\frac{\sqrt{2}}{2}=4\,790 \text{ kgf cm}.$$

$$\sigma_{max}=-\frac{4\,790\cdot 6{,}4}{284}-\frac{4\,790\cdot 3{,}6}{74{,}1}=-341 \text{ kgf/cm}^2.$$

Ejemplo 4.13. La viga de dos apoyos (fig. 167, *a*) está solicitada por las fuerzas P y $2P$. Determinar la tensión máxima, si la viga es de sección rectangular de lados b y $2b$ (fig. 167, *b*).

En este caso las fuerzas exteriores están aplicadas según los ejes principales de la sección y lo más cómodo es analizar por separado los diagramas de los momentos flectores de cada fuerza. Los puntos más peligrosos serán aquellos que están situados sobre la arista AB, donde se suman las tensiones máximas de compresión y sobre la arista CD donde se suman las tensiones máximas de tracción.

Veamos el tramo central. En la sección que dista z del apoyo izquierdo (fig. 167, *c*) obtendremos

$$M_x=\frac{2P}{3}(3l-z), \ M_y=\frac{P}{3}z.$$

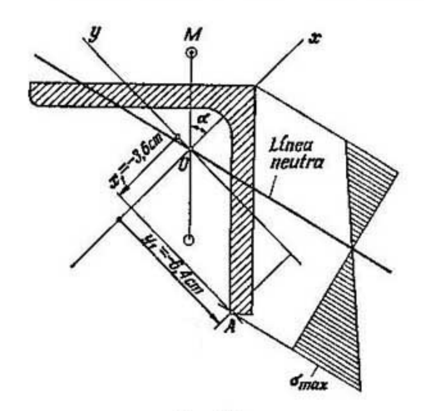


Fig. 166.

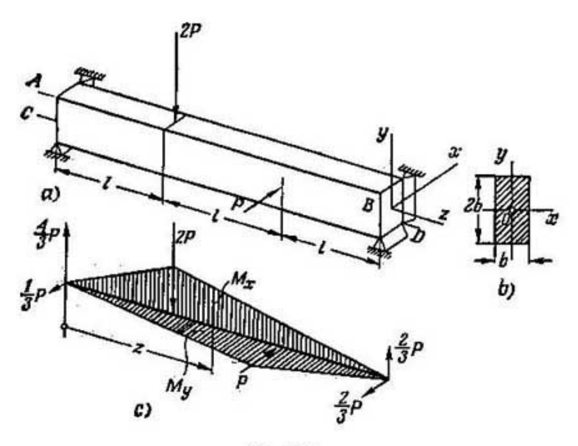


Fig. 167.

Para el punto de la arista CD

$$\sigma_{max}=\frac{2P}{3}\frac{3l-z}{W_x}+\frac{P}{3}\frac{z}{W_y}.$$

Como

$$W_x=\frac{b(2b)^2}{6} \text{ y } W_y=\frac{2bb^2}{6},$$

resulta que en el tramo central σ_{max} no depende de z y es igual a

$$\sigma_{max}=\frac{3Pl}{b^3}.$$

En los tramos primero y tercero las tensiones serán menores.

§ 35. Tracción y compresión excéntricas

En el caso de tracción excéntrica, la resultante de las fuerzas exteriores no coincide con el eje de la barra, como en el caso de tracción simple, sino que está desplazada respecto al eje z permaneciendo paralela a éste (fig. 168).

Supongamos que el punto A de aplicación de la resultante de las fuerzas exteriores tiene en la sección las coordenadas x_0 e y_0 (fig. 168). Entonces, respecto a los ejes principales, la resultante P originará los momentos siguientes:

$$M_x=Py_0 \text{ y } M_y=Px_0.$$

Así pues, la tracción o compresión excéntricas es similar a la flexión desviada con la diferencia de que en este caso, en la sección transversal de la barra, aparecen no sólo momentos flectores, sino también una fuerza axial $N=P$.

En un punto arbitrario B de coordenadas x, y la tensión normal σ se determinará por la expresión,

$$\sigma=\frac{P}{F}+\frac{Py_0y}{I_x}+\frac{Px_0x}{I_y}. \qquad (4.28)$$

El diagrama estéreo de las tensiones forma un plano. Igualando σ a cero se obtiene la ecuación de la línea neutra,

$$\frac{1}{F}+\frac{y_0y}{I_x}+\frac{x_0x}{I_y}=0. \qquad (4.29)$$

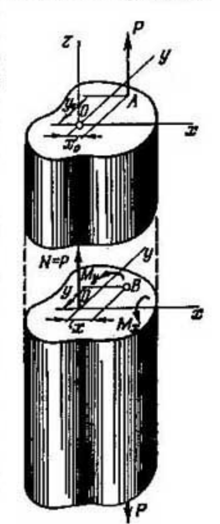


Fig. 168.

La máxima tensión, como en el caso de la flexión desviada, ocurrirá en el punto de coordenadas x_1 e y_1 más alejado de la línea neutra

$$\sigma_{max}=P\left(\frac{1}{F}+\frac{y_0y_1}{I_x}+\frac{x_0x_1}{I_y}\right).$$

En el caso de tracción o compresión excéntricas, a diferencia de flexión desviada, la línea neutra no pasa por centro de gravedad de la

sección. Cuando x_0 e y_0 son positivos, por lo menos una de las magnitudes x e y que figuran en la ecuación (4.29) será negativa. Por lo tanto, si el punto de aplicación de la fuerza P se encuentra en el primer cuadrante, la línea neutra se encontrará al otro lado del centro de gravedad y pasará por los cuadrantes *2, 3* y *4* (fig. 169).

Fig. 169.

La distancia desde el origen de coordenadas a cierta recta

$$ay + bx + c = 0,$$

como se demuestra en la geometría analítica, es

$$OC = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En nuestro caso (fig. 169)

$$OC = \frac{\frac{1}{F}}{\sqrt{\frac{y_0^2}{I_x^2} + \frac{x_0^2}{I_y^2}}}. \qquad (4.30)$$

Es decir, a medida que el punto de aplicación de la fuerza se acerca al centro de gravedad de la sección, la línea neutra se alejará de él.

En el caso límite, cuando $x_0 = y_0 = 0$, es decir, cuando la fuerza P está aplicada en el centro de gravedad, la línea neutra se alejará al infinito. En este caso las tensiones se distribuyen en la sección de manera uniforme. A medida que el punto de aplicación de la fuerza se aleja del centro de gravedad, el segmento OC disminuye y la línea neutra, por lo tanto, se acercará al centro de gravedad.

De lo expuesto se deduce que en la tracción o compresión excéntricas, la línea neutra puede cruzar la sección o encontrarse fuera de ella. En el primer caso en la sección aparecerán tensiones de tracción y de compresión. En el segundo caso, en todos los puntos de la sección, las tensiones serán del mismo signo.

Esto tiene importancia, por ejemplo, para el cálculo de columnas de fábrica de ladrillo. La fábrica de ladrillo resiste mal la tracción y, por lo tanto, es deseable que las tensiones en el caso de compresión excéntrica sean en toda la sección de compresión y que la línea neutra pase fuera de la sección. Para ello es necesario aplicar la fuerza exterior suficientemente cerca del centro de gravedad.

Alrededor del centro de gravedad existe una zona denominada *núcleo central* que, si el punto donde se cruza la línea de acción de la fuerza P con la sección se encuentra dentro del núcleo central, las tensiones en todos los puntos de la sección serán del mismo signo, mientras que si se encuentra fuera del núcleo central, la línea neutra cruzará la sección y las tensiones en la sección serán tanto de compre-

sión como de tracción. Cuando el punto de aplicación de la fuerza se encuentra en el contorno del núcleo central, la línea neutra será tangente al contorno de la sección. Para obtener el núcleo central es necesario imaginarse que la línea neutra recorre el contorno de la sección. El punto de aplicación de la fuerza recorrerá en este caso el contorno del núcleo central.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.14. Determinar cual de las barras de la figura 170 puede resistir mayor carga sin la aparición de deformaciones plásticas. En el caso a) cuando la fuerza P es para la sección debilitada una fuerza excéntrica con un brazo respecto al eje y igual a $\frac{a}{4}$, la tensión máxima de tracción será,

$$\sigma_{max} = \frac{P}{a\frac{3}{2}a} + \frac{6P\frac{a}{4}}{a\left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{4}{3}\frac{P}{a^2}.$$

En el caso b) la fuerza P es central y, por lo tanto,

$$\sigma_{max} = \frac{P}{a^2}.$$

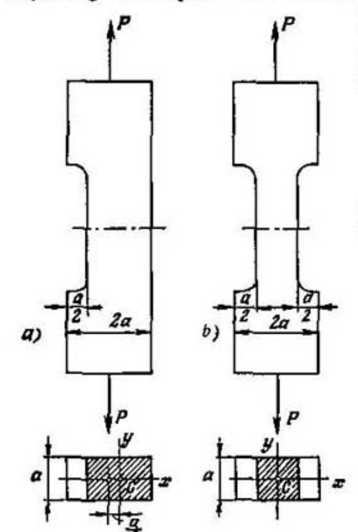


Fig. 170.

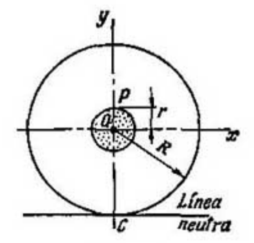


Fig. 171.

Así pues, en la barra debilitada por las dos partes la tensión será menor.

Ejemplo 4.15. Determinar las dimensiones del núcleo central para la barra de sección circular de radio R. De la condición de simetría, se deduce que el núcleo central deberá ser de configuración circular. Supongamos que el punto de aplicación de la fuerza se encuentra sobre el eje y y que la línea neutra es tangente al contorno de la sección (fig. 171). Entonces $OC = R$, $y_0 = r$, $x_0 = 0$.

Teniendo en cuenta que $F = \pi R^2$ e $I_x = \frac{\pi R^4}{4}$, de la fórmula (4.30), se obtendrá el radio del núcleo central,

$$r = \frac{R}{4}.$$

Ejemplo 4.16. Hallar el núcleo central para la barra de sección rectangular de lados b y h (fig. 172).

Determinamos primeramente por la fórmula (4.30) la ordenada y_0 del punto A de intersección del contorno del núcleo central con el eje y. Cuando el punto de aplicación de la fuerza axial se encuentra en la posición A, la línea neutra coincidirá con la base inferior del rectángulo y entonces,

$$OC=\frac{h}{2};\quad x_0=0;\quad F=bh;\quad I_x=\frac{bh^3}{12}.$$

Por la fórmula (4.30) se obtiene,

$$y_0=\frac{h}{6}.$$

Fig. 172.

Cuando la resultante de las fuerzas se desplaza al punto B situado a la distancia $\frac{b}{6}$ del centro de gravedad la línea neutra coincidirá con el lado derecho del rectángulo. Simétricamente a A y B se sitúan los puntos A' y B' (fig. 172).

Queda por establecer la curva de la trayectoria del punto de aplicación de la fuerza P al desplazarse del punto A al punto B, si la línea neutra gira alrededor del ángulo inferior derecho de la sección (fig. 172). La fórmula (4.29) expresa la condición de igualdad a cero de la tensión normal en cierto punto de la sección. Si en el punto derecho inferior de la sección, es decir, en el punto de coordenadas

$$y=-\frac{h}{2}\quad \text{y}\quad x=+\frac{b}{2},$$

la tensión es igual a cero, entonces de la ecuación (4.29), obtendremos,

$$\frac{1}{bh}-\frac{y_0\,\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}}+\frac{x_0\,\frac{b}{2}}{\frac{bh^3}{12}}=0,$$

o sea

$$1-\frac{6y_0}{h}+\frac{6x_0}{b}=0.$$

Supongamos ahora que x_0 e y_0 son variables. Está claro que entonces, al girar la línea neutra alrededor de un punto fijo, el punto de aplicación de la fuerza P se desplazará por una línea recta. En nuestro caso concreto esta recta pasará por los puntos A y B. Uniendo los puntos A, B, A', y B' con líneas rectas se obtiene el núcleo central que, en este caso, resulta ser un rombo.

§ 36. Flexión de barras de curvatura grande

Hasta aquí se analizaron problemas relacionados con la flexión de la barra recta. Veamos ahora la flexión de la barra curva suponiendo que las fuerzas exteriores actúan en el plano de curvatura de aquella.

Se suelen distinguir barras de pequeña y barras de gran curvatura. Lo fundamental para tal división es la relación entre la altura de la sección h en el plano de la curvatura y el radio de curvatura del eje de la barra ρ_0. Si esta relación es muy inferior a la unidad ($h/\rho_0 = 0,2$ y menor), entonces se considera que la barra es de curvatura pequeña. En el caso de la barra de curvatura grande, $\frac{h}{\rho_0}$ resulta comparable con la unidad. Así pues, esta división es convencional y no tiene un límite bien definido.

Las fórmulas que fueron obtenidas anteriormente para el caso de la barra recta son aplicables también al caso de barras de pequeña curvatura. Lo único que varía es la fórmula (4.5) que determina la curvatura de la barra solicitada. En su lugar, en el caso de la barra de pequeña curvatura se debe considerar la fórmula,

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI_x}, \tag{4.31}$$

siendo $\frac{1}{\rho_0}$, la curvatura de la barra sin carga. Así pues, los problemas que están relacionados con el cálculo de barras de pequeña curvatura no contienen ninguna particularidad específica. El problema de los desplazamientos se analizará en el capítulo V.

Pasemos ahora a la barra de curvatura grande. Al esquema de esta barra se reduce, por ejemplo, el cálculo de la resistencia del gancho de una grúa o de los elementos de una cadena metálica (fig. 173).

Supongamos un tramo de la barra de curvatura grande de sección constante solicitado en sus extremos por los momentos $\mathfrak{M}$ (fig. 174). Como en el caso de la barra recta (§ 29) se puede demostrar que el conjunto de puntos que antes de la flexión constituían el plano de la sección transversal, después de la flexión, también formarán una sección plana, pero girada en el espacio. Es decir, que las secciones transversales de la barra de gran curvatura, en la flexión pura, permanecen planas.

Separemos de la barra curva, por dos secciones normales próximas, un tramo elemental (fig. 174). Durante la flexión, las secciones contiguas girarán una respecto a la otra un ángulo $\Delta\, d\varphi$ lo que conduce a que en las capas de la barra aparecerán ciertos alargamientos.

Introduzcamos las notaciones necesarias. Llamaremos ρ_0 (fig. 174, *a*) al radio de curvatura del eje de la barra (lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones) y r_0, al radio de curvatura de la capa neutra. La magnitud r_0 queda por ahora desconocida. En adelante veremos que r_0 es siempre menor que ρ_0 y que, por lo tanto, la línea neutra de la barra de curvatura grande resulta desplazada respecto al centro de gravedad hacia el centro de curvatura. La ordenada y la mediremos desde la línea neutra.

El alargamiento de la capa AB (fig. 174, b) será,

$$\varepsilon=\frac{BB'}{AB}=\frac{y\Delta\, d\varphi}{(r_0+y)\,d\varphi}.$$

Aquí se supone que durante el proceso de la flexión de la barra, la magnitud y no varía. Hablando con rigor, esto no es así, pues si analizamos las condiciones de equilibrio de la franja elemental AB

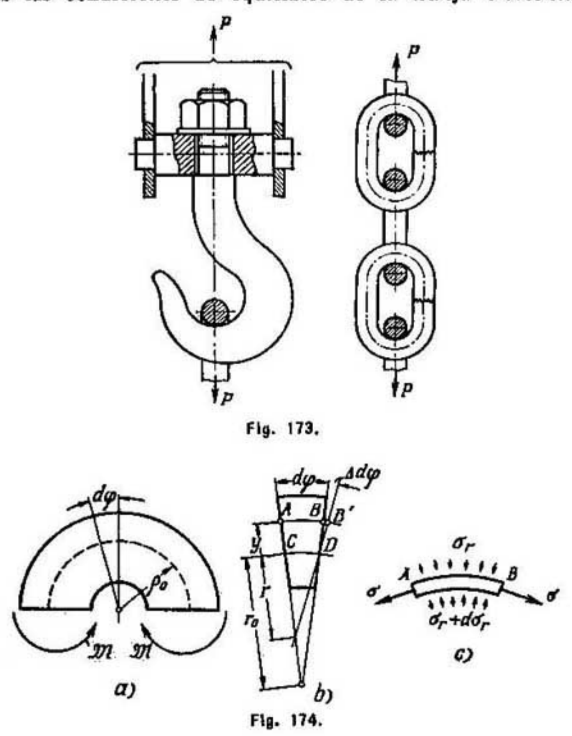


Fig. 173.

Fig. 174.

(fig. 174, c) resultará evidente que entre las fibras contiguas deberá existir una acción mutua en forma de fuerzas dirigidas radialmente y, como resultado, variará la forma de la sección transversal de la barra y la magnitud de y. En el caso de secciones macizas estas variaciones son insignificantes. En el caso de barras de paredes delgadas los desplazamientos radiales de las fibras serán bastante grandes y pueden

conducir a una variación significante del cuadro de distribución de las tensiones en la sección.

La fracción $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ es proporcional a la variación de la curvatura de la barra. De la figura 174 se deduce que el segmento

$$CD=(d\varphi+\Delta\, d\varphi)\, r,$$

siendo r, el radio de curvatura de la capa neutra después de la deformación. Por otra parte

$$CD=r_0\, d\varphi.$$

Igualando estas magnitudes, obtendremos,

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi}=r_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right).$$

Así pues, podemos afirmar que

$$\varepsilon=\frac{y}{r_0+y}\, r_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

y, entonces,

$$\sigma=E\frac{y}{r_0+y}\, r_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (4.32)$$

En estas expresiones se ve claramente la particularidad principal de la barra de curvatura grande. Como en este caso las dimensiones de la sección transversal son comparables con el radio r_0 la magnitud de y que figura en el denominador adquiere un valor importante y las tensiones, por lo tanto, se distribuyen de manera no lineal. En el caso de la barra de pequeña curvatura y es pequeña en comparación con r_0 y

$$\sigma=Ey\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right).$$

Cuando $\frac{1}{r_0}=0$ esta expresión coincide con la expresión (4.3) correspondiente a la barra recta.

Supongamos para mayor simplicidad que la sección de la barra es simétrica respecto al plano de la curvatura. Entonces el eje y de la sección será el eje de simetría (fig. 175) y el momento de las fuerzas elementales $\sigma\, dF$ respecto a este eje será igual a cero. Escribamos ahora la expresión de la fuerza normal N y la del momento flector M_{flec},

$$N=\int_F \sigma\, dF, \quad M_{flec}=\int_F \sigma y\, dF.$$

Después de introducir la expresión de σ según (4.32) hallaremos

$$N=Er_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\int_F \frac{y\, dF}{r_0+y},$$

$$M_{flec}=Er_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\int_F \frac{y^2\, dF}{r_0+y}.$$

Como la fuerza axial es igual a cero,

$$\int_F \frac{y\,dF}{r_0+y}=0. \qquad (4.33)$$

Transformamos ahora la expresión de M_{flec} descomponiendo la expresión subintegral en dos sumandos, es decir,

$$M_{flec}=Er_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\left[\int_F y\,dF-r_0\int_F \frac{y\,dF}{r_0+y}\right].$$

La primera de estas integrales representa el momento estático de la sección respecto a la línea neutra y es igual al producto Fe, siendo e,

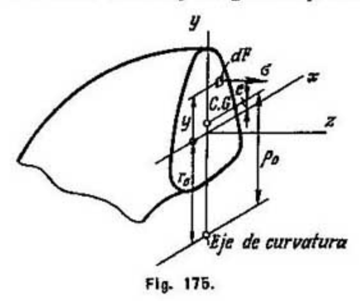


Fig. 175.

la distancia de la línea neutra al centro de gravedad,

$$e=\rho_0-r_0. \qquad (4.34)$$

La segunda integral es según (4.33) igual a cero. Así pues,

$$M_{flec}=Er_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)Fe. \qquad (4.35)$$

Eliminando con esta expresión la diferencia de las curvaturas de la expresión de σ (4.32) se obtiene la fórmula para la determinación de las tensiones normales,

$$\sigma=\frac{M_{flec}}{Fe}\,\frac{y}{r_0+y}. \qquad (4.36)$$

Como vemos, las tensiones varían con la altura de la sección de forma no lineal. El diagrama de las tensiones está constituido por una hipérbola, una de las asíntotas de la cual coincide con el eje de curvatura (fig. 176). Según sea la configuración de la sección la tensión máxima ocurrirá en el punto superior o en el punto inferior de la sección.

Para poder emplear la expresión (4.36) es necesario determinar previamente el valor de r_0. Para ello, veamos la integral (4.33).

Introducimos la nueva variable u,

$$u = r_0 + y$$

(fig. 177). Entonces la expresión (4.33) se escribirá así,

$$\int_F \frac{u - r_0}{u}\, dF = 0,$$

de donde se obtiene

$$r_0 = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}}. \tag{4.37}$$

La integral que figura en el denominador constituye una característica geométrica de la sección como, por ejemplo, el momento

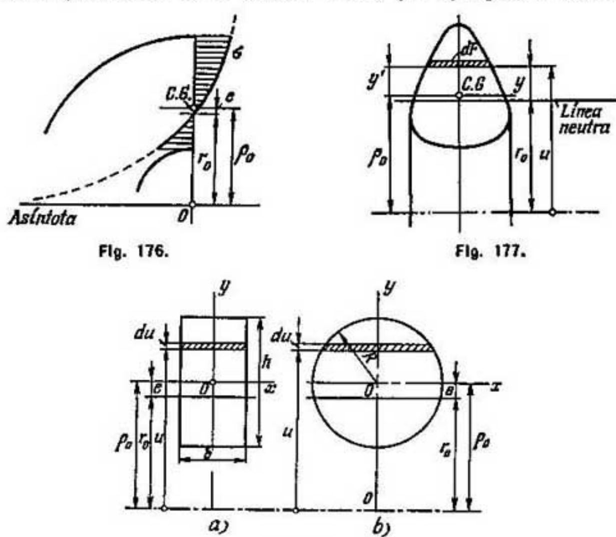


Fig. 176.

Fig. 177.

Fig. 178.

estático o el momento de inercia. En el caso particular de una sección rectangular (fig. 178, a),

$$\int_F \frac{dF}{u} = b \int_{\rho_0 - h/2}^{\rho_0 + h/2} \frac{du}{u} = b \ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}$$

y de acuerdo con la fórmula (4.37),

$$r_0=\frac{h}{\ln\dfrac{\rho_0+h/2}{\rho_0-h_02}}.$$

El desplazamiento de la línea neutra respecto al centro de gravedad es

$$e=\rho_0-\frac{h}{\ln\dfrac{\rho_0+h/2}{\rho_0-h/2}}. \qquad (4.38)$$

De manera análoga, en el caso de una sección transversal circular (fig. 178, *b*), después de ciertas integraciones obtendremos,

$$e=\frac{1}{2}\left(\rho_0-\sqrt{\rho_0^2-R^2}\right). \qquad (4.39)$$

La determinación de e como la diferencia entre ρ_0 y r_0 resulta bastante incómoda, sobre todo cuando se trata de barras de curvatura relativamente pequeña. Resulta que la diferencia entre las magnitudes grandes ρ_0 y r_0 es muy pequeña, pero deberá calcularse con gran exactitud, puesto que de esto depende el resultado de los cálculos de la tensión σ por la fórmula (4.36). Por lo tanto es necesario obtener el valor de r_0 con un número grande de cifras significativas.

Para estos casos se ha elaborado el método de descomposición en series de las magnitudes que se restan, que tiene la ventaja de que luego los primeros términos de las series se eliminan. Por ejemplo, en el caso de la sección rectangular en cuestión esto ocurre como sigue,

$$\ln\frac{\rho_0+h/2}{\rho_0-h/2}=\ln\frac{1+h/2\rho_0}{1-h/2\rho_0}=2\left[\frac{h}{2\rho_0}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^5+\dots\right],$$

de donde se obtiene,

$$\frac{h}{\ln\dfrac{\rho_0+h/2}{\rho_0-h/2}}=\rho_0\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^2-\frac{4}{45}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^4-\frac{44}{945}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^6-\dots\right].$$

Volviendo a la expresión (4.38), observamos que las magnitudes ρ_0 se eliminan mutuamente y el desplazamiento e se obtiene, sin perder exactitud, por la serie siguiente,

$$e=\frac{1}{3}\rho_0\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^2\left[1+\frac{4}{15}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^2+\frac{44}{315}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^4+\dots\right].$$

Cuando $\dfrac{h}{\rho_0}<\dfrac{1}{2}$ es suficiente retener un solo término de la serie para conseguir la exactitud suficiente,

$$e\approx\frac{1}{3}\rho_0\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)^2.$$

De manera análoga se transforma la expresión (4.39)

$$\sqrt{\rho_0^2-R^2}=\rho_0\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho_0}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\left(\frac{R}{\rho_0}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{6}\left(\frac{R}{\rho_0}\right)^6-\dots\right],$$

$$e=\frac{R^2}{4\rho_0}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{\rho_0}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{R}{\rho_0}\right)^4+\dots\right].$$

Todo lo expuesto puede ser extendido fácilmente también al caso de una sección arbitraria. Escribimos la expresión (4.33) en la forma siguiente

$$\int_F \frac{y\,dF}{r_0+y}=\int_F \frac{y-e+e}{r_0+e+y-e}dF=\int_F \frac{y_1+e}{\rho_0+y_1}\,dF=0,$$

siendo $y_1=y-e$, la distancia desde el área elemental dF hasta el eje central. De aquí determinamos la magnitud de e,

$$e=-\frac{\int_F \frac{y_1}{\rho_0+y_1}\,dF}{\int_F \frac{1}{\rho_0+y_1}\,dF}.$$

Aprovechando la descomposición en serie

$$\left(1+\frac{y_1}{\rho_0}\right)^{-1}=1-\frac{y_1}{\rho_0}+\left(\frac{y_1}{\rho_0}\right)^2-\ldots$$

y limitándonos a los dos primeros términos de la serie, obtendremos,

$$e\approx-\frac{\int_F y_1\left(1-\frac{y_1}{\rho_0}\right)dF}{\int_F \left(1-\frac{y_1}{\rho_0}\right)dF}.$$

Como y_1 se mide desde el eje central,

$$\int_F y_1\,dF=0.$$

Entonces,

$$e\approx\frac{I_x}{\rho_0 F}, \qquad (4.40)$$

siendo I_x, como en el caso de la flexión de la barra recta, el momento de inercia de la sección respecto al eje central.

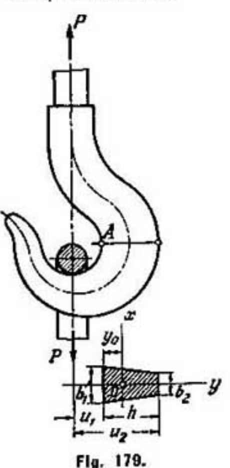


Fig. 179.

Ejemplo 4.17. Determinar la tensión en el punto A del gancho de sección trapezoidal (fig. 179) de dimensiones: $b_1=4$ cm, $b_2=1$ cm, $u_1=3$ cm, $u_2=10$ cm y $h=7$ cm. La fuerza $P=2000$ kgf.

Comenzamos por determinar la posición del centro de gravedad de la sección. El momento estático de ésta respecto a la base mayor es

$$\frac{b_2h^2}{2}+\frac{b_1-b_2}{6}h^2.$$

El área de la sección será,

$$F=\frac{b_1+b_2}{2}h=17{,}5\ \text{cm}^2.$$

Dividiendo el momento estático por el área de la sección se obtiene la distancia de la base del trapecio al centro de gravedad y_0,

$$y_0=\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2}\frac{h}{3}=2,8\text{ cm}.$$

El radio $\rho_0=y_0+u_1=5,8$ cm. El momento de inercia de la sección respecto a la base será,

$$\frac{b_2h^3}{3}+\frac{(b_1-b_2)\,h^3}{12}=200,1\text{ cm}^4,$$

y pasando al eje central x,

$$I_x=200,1-2,8^2\cdot 17,5=62,9\text{ cm}^4.$$

Determinando e por la fórmula aproximada (4.40) obtendremos,

$$e=0,620\text{ cm}.$$

La tensión originada por la flexión en el punto A se determina por la fórmula (4.36), que en este caso se escribe así,

$$\sigma=\frac{P\rho_0}{Fe}\frac{y_0-e}{u_1}=\frac{2\,000\cdot 5,8}{17,5\cdot 0,620}\cdot\frac{2,18}{3}=777\text{ kgf/cm}^2.$$

A esta tensión se la debe agregar la tensión originada por la tracción

$$\sigma_{\text{trac}}=\frac{P}{F}=114\text{ kgf/cm}^2.$$

Así pues,

$$\sigma_A=891\text{ kgf/cm}^2.$$

Si se obtiene e por la fórmula más exacta (4.38) hallaremos,

$$e=\rho_0\frac{F}{\left(b_2+u_2\dfrac{b_1-b_2}{u_2-u_1}\right)\ln\dfrac{u_2}{u_1}-(b_1-b_2)}=0,598\text{ cm},$$

$$\sigma_A=920\text{ kgf/cm}^2,$$

Capítulo V

DESPLAZAMIENTOS EN BARRAS ORIGINADOS POR CARGAS ARBITRARIAS

§ 37. Energía potencial de la barra en el caso general de solicitación

Anteriormente se estudiaron los desplazamientos en barras rectas en los casos de tracción, torsión y flexión. Veamos ahora el caso general de solicitación de la barra, cuando en las secciones transversales pueden surgir fuerzas normales y cortantes, momentos torsores y flectores simultáneamente. Para ampliar el círculo de problemas a analizar, consideremos también que la barra puede ser no sólo recta, sino también de pequeña curvatura, o estar constituida por tramos rectos que forman un sistema plano o estéreo.

La solución de este problema es necesario, no solamente para la determinación de los valores de los desplazamientos y para juzgar sobre la rigidez de la estructura. Sobre la base de los desplazamientos obtenidos se crean los métodos generales de determinación de los factores de fuerza interiores en los sistemas hiperestáticos, de lo que hablaremos en el capítulo siguiente. La determinación de los desplazamientos resulta necesaria también para investigar el problema de las oscilaciones en sistemas elásticos (véase el capítulo XV).

La manera más fácil de determinar los desplazamientos es por las relaciones energéticas basadas sobre la expresión general de la energía potencial de la barra solicitada.

Antes de determinar la energía potencial se realiza el análisis de los factores de fuerza interiores que aparecen en la barra. Este análisis se lleva a cabo, como se sabe, por el método de las secciones y termina con la construcción de los diagramas de los momentos flectores y torsores y, cuando resulta necesario, con la construcción de los diagramas de las fuerzas normales y cortantes.

En todos los casos, los diagramas de los factores de fuerza interiores se construyen sobre el eje de la barra. La magnitud de la fuerza interior se sitúa normalmente al eje como se indica, por ejemplo, en la figura 180. En el caso de una barra estérea el eje se dibuja en perspectiva y los diagramas de los momentos flectores se representan en los planos de flexión correspondientes (fig. 181). El diagrama de los momentos torsores no se relaciona con un plano determinado y, a diferencia del diagrama de los momentos flectores, se raya con líneas helicoidales.

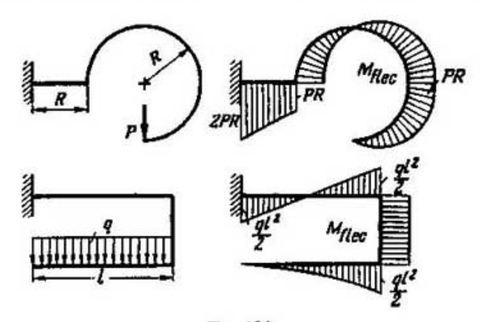


Fig. 180.

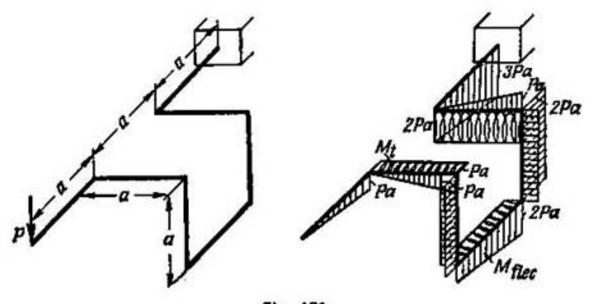


Fig. 181.

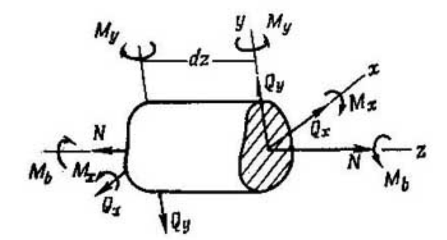


Fig. 182.

Para determinar la energía potencial, separamos de la barra un tramo elemental de longitud dz (fig. 182). La barra puede ser recta o tener una curvatura inicial pequeña. En cada una de las secciones transversales, en el caso general, de solicitación, aparecen seis factores de fuerza interiores: tres momentos y tres fuerzas. Consideramos que estos factores son exteriores respecto al tramo elemental separado y determinamos el trabajo que ellos realizan al deformarse el elemento. Este trabajo se transforma en energía potencial acumulada en el tramo elemental de la barra.

La sección izquierda del elemento (fig. 182) la consideraremos convencionalmente inmóvil, para que el trabajo de todas las fuerzas que se aplican a la sección extrema izquierda, sea igual a cero. El punto de aplicación de las fuerzas de la sección derecha recibe, al deformarse el elemento, ciertos desplazamientos pequeños sobre los que se realiza el trabajo en cuestión. Es muy importante el hecho de que a cada uno de los seis factores de fuerza interiores la corresponde su desplazamiento, sobre el cual, ninguno de los cinco factores de fuerza interiores restantes realiza ningún trabajo. Así, por ejemplo, el momento M_t origina el giro de la sección respecto al eje z. En este desplazamiento angular realiza trabajo solamente este momento M_t. El desplazamiento lineal según el eje y surge como consecuencia de la fuerza cortante Q_y, y solamente esta fuerza realiza trabajo en este desplazamiento. Por lo tanto, la energía potencial del elemento se puede interpretar como la suma de los trabajos *independientes* de cada uno de los seis factores de fuerza, es decir, como la suma de las energías correspondientes a la torsión, flexión, tracción y distorsión respectivamente,

$$dU = dU(M_t) + dU(M_x) + dU(M_y) + dU(N) + \\ + dU(Q_x) + dU(Q_y). \tag{5.1}$$

Las expresiones de los cuatro primeros sumandos ya las conocemos,

$$dU(M_t) = \frac{M_t^2\,dz}{2GI_t}, \quad dU(M_x) = \frac{M_x^2\,dz}{2EI_x},$$
$$dU(M_y) = \frac{M_y^2\,dz}{2EI_y}, \quad dU(N) = \frac{N^2\,dz}{2EF}.$$

Queda por determinar la energía de la distorsión $dU(Q_x)$ y $dU(Q_y)$.

Para calcular la magnitud de $dU(Q_y)$, analicemos un prisma elemental de área de la base dF y de longitud dz (fig. 183). La energía acumulada en este volumen es $U_0 dF\,dz$, siendo U_0, la energía potencial unitaria de la distorsión. De acuerdo a (2.3) del § 20, obtendremos,

$$U_0 = \frac{\tau_y^2}{2G}.$$

Así pues,

$$U_0\, dF\, dz = \frac{\tau_y^2}{2G}\, dF\, dz.$$

Integrando sobre el área F, hallaremos,

$$dU(Q_y) = \frac{dz}{2G} \int_F \tau_y^2\, dF.$$

Según la fórmula de Zhuravski (4.12) del § 30,

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b}$$

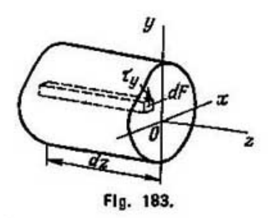


Fig. 183.

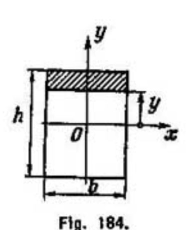


Fig. 184.

y por lo tanto,

$$dU(Q_y) = \frac{Q_y^2\, dz}{2GI_x^2} \int_F \frac{S_x^{*2}\, dF}{b^2}, \text{ ó}$$

$$dU(Q_y) = \frac{Q_y^2\, dz}{2GF} \frac{F}{I_x^2} \int_F \frac{S_x^{*2}\, dF}{b^2}.$$

Introduciendo la notación,

$$\frac{F}{I_x^2} \int_F \frac{S_x^{*2}\, dF}{b^2} = k_y, \tag{5.2}$$

obtendremos,

$$dU(Q_y) = k_y \frac{Q_y^2\, dz}{2GF}$$

y de manera análoga,

$$dU(Q_x) = k_x \frac{Q_x^2\, dz}{2GF}.$$

Los coeficientes k_x y k_y son magnitudes adimensionales que dependen de la configuración geométrica de la sección. Por ejemplo, en el caso de una sección rectangular de dimensiones b y h (fig. 184) el momento estático del área rayada S_x^* respecto al eje x será,

$$S_x^* = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Como

$$dF = b\,dy,$$
$$F = bh,$$
$$I_x = \frac{bh^3}{12},$$

después de ciertas transformaciones, por la fórmula (5.2), obtendremos,

$$k = k_x = k_y = \frac{6}{5}.$$

En el caso de una sección circular maciza $k = \frac{10}{9}$. En el de una sección circular de paredes delgadas $k = 2$, etc.

La expresión (5.1) adquirirá ahora el aspecto siguiente

$$dU = \frac{M_t^2\,dz}{2GI_t} + \frac{M_x^2\,dz}{2EI_x} + \frac{M_y^2\,dz}{2EI_y} + \frac{N^2\,dz}{2EF} + k_x\frac{Q_x^2\,dz}{2GF} + k_y\frac{Q_y^2\,dz}{2GF}.$$

Para obtener la energía potencial de toda la barra falta solamente integrar la expresión obtenida sobre la longitud de la barra, es decir,

$$U = \int_l \frac{M_t^2\,dz}{2GI_t} + \int_l \frac{M_x^2\,dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_y^2\,dz}{2EI_y} + \int_l \frac{N^2\,dz}{2EF} + \int_l \frac{k_xQ_x^2\,dz}{2GF} + \int_l \frac{k_yQ_y^2\,dz}{2GF}. \quad (5.3)$$

Si la estructura es complicada y consta de varios elementos en forma de barras, entonces una vez realizada la integración sobre cada

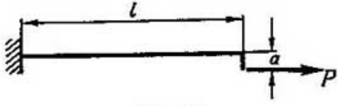


Fig. 185.

una de las barras se deben sumar las energías de todos los elementos que constituyen la estructura.

No siempre todos los sumandos de la expresión (5.3) tienen la misma importancia. En la mayoría de los sistemas que se encuentran en la práctica, donde los elementos que constituyen la estructura, trabajan a flexión o torsión, los tres últimos sumandos de (5.3) resultan ser mucho menores que los tres primeros. Es decir, la energía correspondiente a la tracción y distorsión, como norma general, resulta muy inferior a la energía de la flexión y torsión.

Al mismo tiempo pueden ocurrir casos cuando todos los sumandos son del mismo orden. Así, por ejemplo, en el caso de una barra traccionada excéntricamente (fig. 185), cuando el brazo a es pequeño, la energía de la flexión y la de la tracción son magnitudes del mismo orden.

§ 38. Teorema de Castigliano

Como base para la determinación de los desplazamientos de una barra puede servir el teorema de Castigliano cuyo enunciado es:

La derivada parcial de la energía potencial de un sistema respecto a la fuerza es igual al desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza en dirección a ella.

Este enunciado requiere una aclaración. Entenderemos por desplazamiento en una dirección dada la proyección del desplazamiento completo sobre dicha dirección, es decir, que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza en dirección a ésta se debe interpretar como la proyección del desplazamiento completo del punto sobre la dirección de esta fuerza.

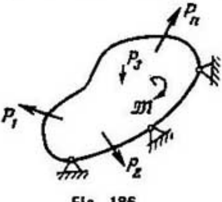


Fig. 186.

Veamos un sólido elástico solicitado por un sistema arbitrario de fuerzas y fijado de tal manera que queden eliminados los desplazamientos del sólido como un cuerpo rígido (fig. 186). Sea U la energía potencial de la deformación acumulada en el volumen del sólido como resultado del trabajo realizado de las fuerzas exteriores. Demos a una de estas fuerzas, por ejemplo a P_n, un incremento dP_n. Entonces la energía potencial U recibirá el incremento correspondiente

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \text{ y será igual a}$$

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \tag{5.4}$$

Variemos ahora el orden de aplicación de las fuerzas, aplicando primero la fuerza dP_n. En el punto de aplicación de esta fuerza ocurrirá el desplazamiento pequeño correspondiente, cuya proyección sobre la dirección de la fuerza dP_n será $d\delta_n$. Entonces, el trabajo de la fuerza dP_n resultará igual a $\frac{dP_n d\delta_n}{2}$. Apliquemos ahora todo el sistema de fuerzas exteriores. Si no existiese la fuerza dP_n, la energía potencial del sistema sería de nuevo U. Pero ahora esta energía variará en una magnitud igual al trabajo complementario $dP_n\delta_n$ que realiza la fuerza dP_n en el desplazamiento δ_n originado por todo el sistema de fuerzas exteriores. La magnitud δ_n es de nuevo la proyección del desplazamiento completo sobre la dirección de la fuerza P_n. El coeficiente 1/2 ante el producto $dP_n\delta_n$ en este caso no figura puesto que la fuerza dP_n permanece constante durante el desplazamiento δ_n.

Como resultado, en el caso de que las fuerzas se apliquen en orden inverso, la expresión de la energía potencial será,

$$U + dP_n\delta_n + \frac{1}{2} dP_n d\delta_n. \tag{5.5}$$

Igualando esta expresión a (5.4) y prescindiendo del producto $\frac{dP_n d\delta_n}{2}$ que es una magnitud pequeña de orden superior, obtendremos,

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}. \tag{5.6}$$

Así pues, derivando la energía potencial respecto a una de las fuerzas exteriores (permaneciendo las otras constantes) se obtiene el desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza en la dirección de ella.

Si analizamos otra vez detalladamente la demostración anterior, veremos fácilmente que en la expresión (5.6) la fuerza P_n se puede interpretar como una fuerza generalizada, es decir, como un factor de fuerza. Entonces δ_n se deberá interpretar como un desplazamiento generalizado, es decir, como cierto parámetro geométrico en el cual realiza trabajo la fuerza generalizada P_n. Por ejemplo, si se entiende por P_n el momento exterior $\mathfrak{M}$ (fig. 186), entonces δ_n será el desplazamiento angular en el punto de aplicación del momento y en dirección a éste. Si el sólido se solicita por las fuerzas de la presión hidrostática, entonces al derivar la energía potencial respecto a la presión, obtendremos la variación del volumen del cuerpo.

Al demostrar el teorema de Castigliano, no se impuso ninguna limitación, ni sobre la forma del cuerpo, ni sobre el sistema de fuerzas exteriores. Incluso ni se planteó la condición de que el material siga la ley de Hooke. Pero de una manera indirecta estas limitaciones existen.

Si entre las fuerzas y los desplazamientos existe relación no lineal, entonces el trabajo realizado por el sistema de fuerzas exteriores será distinto según sea el orden de aplicación de las fuerzas, es decir, según se aplique el sistema de fuerzas antes o después de la fuerza dP_n. En otras palabras, el sumando U de las expresiones (5.4) y (5.5) no será el mismo. En este caso el teorema de Castigliano no sería aplicable.

En la mayoría de los problemas con los que nos encontramos en la práctica, la relación entre las fuerzas y los desplazamientos es lineal y es aplicable completamente el teorema de Castigliano, al resolver estos problemas. Se deben excluir los sistemas en los cuales no se puede aplicar el principio de invariabilidad de las dimensiones originales y el principio de superposición de las fuerzas. Ejemplos de estos sistemas ya fueron expuestos anteriormente (véase el § 6). Al determinar los desplazamientos en estos sistemas es inadmisible aplicar el teorema de Castigliano en la forma que se hizo aquí.

En el caso de dependencia no lineal entre las fuerzas y los desplazamientos, se emplea otra relación energética, más general, que se obtiene sobre la base del principio de los desplazamientos posibles. Recibe un enunciado más general, en

este caso, el teorema de Castigliano que se interpreta aquí como el teorema del mínimo del así denominado, trabajo suplementario.

Veamos los ejemplos más simples de determinación de los desplazamientos por el teorema de Castigliano.

Ejemplo 5.1. Determinar, por el teorema de Castigliano, el ángulo de giro del extremo derecho de la barra (fig. 187) solicitada por el momento $\mathfrak{M}$.

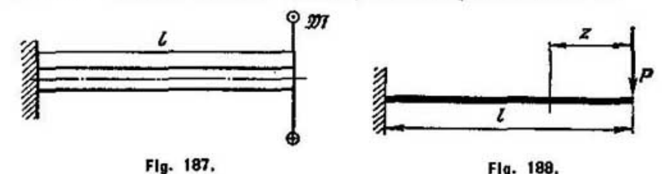


Fig. 187. Fig. 188.

La energía potencial interior de la barra en la torsión se obtiene de la expresión (5.3)

$$U=\int_0^l \frac{M_t^2\,dz}{2GI_t}.$$

Como $M_t=\mathfrak{M}$ y la rigidez se considera constante,

$$U=\frac{\mathfrak{M}^2 l}{2GI_t}.$$

Derivando respecto a $\mathfrak{M}$, obtendremos

$$\varphi=\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{M}}=\frac{\mathfrak{M}l}{GI_t},$$

resultado que coincide con la expresión conocida para el ángulo de torsión.

Ejemplo 5.2. Determinar la flecha del voladizo (fig. 188) solicitado por la fuerza P en el extremo.

La energía potencial de la barra en la flexión se obtiene de la expresión,

$$U=\int_0^l \frac{M_x^2\,dz}{2EI_x}.$$

A una distancia z del extremo de la viga,

$$M_x=-Pz.$$

Cuando EI_x es constante,

$$U=\frac{P^2l^3}{6EI_x}.$$

El desplazamiento del extremo de la viga será,

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

El valor de la flecha obtenida se calculó ya anteriormente integrando la línea elástica de la viga.

Ejemplo 5.3. Determinar el desplazamiento vertical del punto A en el caso de la estructura de la figura 189. Las rigideces de las barras son iguales, EF.

De no emplear el teorema de Castigliano, este problema sería difícil de resolver. Sería necesario determinar los alargamientos de todas las barras y después, mediante ciertas transformaciones geométricas, determinar las posiciones de los nudos de la armadura deformada. Este método de resolución conduciría, sin duda, a cálculos complicados. Mediante el teorema de Castigliano este problema se resuelve con mayor facilidad.

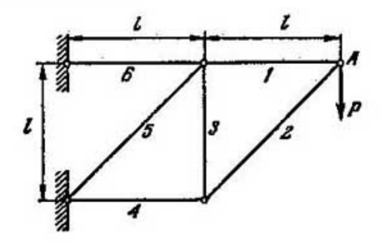


Fig. 189.

Seccionando los nudos obtenemos los esfuerzos en cada barra y ubicamos los valores de N en la tabla 4.

Tabla 4

	N_i	l_i	U_i		N_i	l_i	U_i
1	P	l	$\frac{P^2l}{2EF}$	4	$-P$	l	$\frac{P^2l}{2EF}$
2	$-P\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{2P^2l\sqrt{2}}{2EF}$	5	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{2P^2l\sqrt{2}}{2EF}$
3	P	l	$\frac{P^2l}{2EF}$	6	$2P$	l	$\frac{4P^2l}{2EF}$

Calculamos después el valor de la energía potencial para cada barra,

$$U_i = \frac{N_i^2 l_i}{2EF}$$

y llenamos la última columna de la tabla. Sumando obtendremos,

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}(7 + 4\sqrt{2}).$$

El desplazamiento del punto A será entonces

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl}{EF}(7 + 4\sqrt{2}).$$

§ 39. Integral de Mohr

La determinación de los desplazamientos por el teorema de Castigliano, como se pudo observar de los ejemplos anteriores, tiene el inconveniente de que permite calcular solamente los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores y, solamente, en la dirección de estas fuerzas. En la práctica, surge también la necesidad de determinar los desplazamientos de puntos cualesquiera y en dirección cualquiera.

El método para vencer esta dificultad resulta bastante simple. Si se requiere determinar el desplazamiento de un punto donde no está aplicada ninguna fuerza exterior, aplicamos una fuerza exterior en este punto Φ y en la dirección que nos interesa. Planteamos después la expresión de la energía potencial del sistema, considerando también la fuerza Φ, calculamos la derivada de la energía respecto a Φ y hallamos así el desplazamiento del punto en cuestión en la dirección de la fuerza aplicada Φ. Falta solamente tener en cuenta que la fuerza Φ en realidad no existe y considerarla igual a cero. Así se determina el desplazamiento.

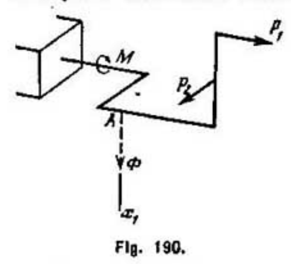


Fig. 190.

Hallemos el desplazamiento del punto A en dirección al eje x_1 en el caso de la barra solicitada por un sistema arbitrario de fuerzas exteriores (fig. 190).

Apliquemos al punto A en dirección de x_1 la fuerza Φ. Los factores de fuerza interiores en cada sección transversal de la barra, en el caso general, variarán en ciertas magnitudes que dependen de la fuerza Φ. Así, por ejemplo, el momento torsor en cierta sección transversal será

$$M_{tP} = M_{t\Phi},$$

donde el primer sumando representa el momento originado por el sistema de fuerzas exteriores dado y el segundo, el momento adicional originado por la fuerza Φ. Está claro que M_{tP} y $M_{t\Phi}$ son funciones de z, es decir, varían a lo largo de la barra. De manera análoga aparecerán sumandos adicionales en el caso de los otros factores de fuerza interiores,

$$M_x = M_{xP} + M_{x\Phi}, \quad M_y + M_{yP} + M_{y\Phi}, \text{ etc.}$$

Está absolutamente claro, que los factores de fuerza adicionales $M_{t\Phi}$, $M_{x\Phi}$ y otros son proporcionales a la fuerza Φ. Si, por ejemplo, duplicamos la fuerza Φ entonces se duplicarán respectivamente los facto-

res de fuerza adicionales. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} M_t &= M_{tP} + M_{t1}\Phi,\\ M_x &= M_{xP} + M_{x1}\Phi,\\ M_y &= M_{yP} + M_{y1}\Phi,\\ N &= N_P + N_1\Phi,\\ Q_x &= Q_{xP} + Q_{x1}\Phi,\\ Q_y &= Q_{yP} + Q_{y1}\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

siendo M_{t1}, M_{x1}, etc., ciertos coeficientes de proporcionalidad que dependen de la posición de la sección en cuestión, es decir, que varían a lo largo de la barra. Si retiramos el sistema de fuerzas exteriores y sustituimos la fuerza Φ por otra unitaria, entonces

$$M_t = M_{t1}, \quad M_x = M_{x1}, \text{ etc.}$$

Es decir que M_{t1}, M_{x1}, M_{y1}, N_1, Q_{x1} y Q_{y1} representan los factores de fuerza interiores que aparecen en la sección transversal cuando actúa la fuerza unitaria aplicada en el punto que se considera y en la dirección dada.

Volvamos ahora a la expresión de la energía (5.3) y sustituyamos, en ella, los factores de fuerza interiores por sus nuevos valores (5.7). Entonces obtendremos,

$$U = \int_l \frac{(M_{tP} + M_{t1}\Phi)^2\, dz}{2GI_t} + \int_l \frac{(M_{xP} + M_{x1}\Phi)^2\, dz}{2EI_x} + \int_l \frac{(M_{yP} + M_{y1}\Phi)^2\, dz}{2EI_y} + \int_l \frac{(N_P + N_1\Phi)^2\, dz}{2EF} + \int_l \frac{k_x (Q_{xP} + Q_{x1}\Phi)^2 dz}{2GF} + \int_l \frac{k_y (Q_{yP} + Q_{y1}\Phi)^2\, dz}{2GF}.$$

Derivando esta expresión respecto a Φ y suponiendo después que $\Phi = 0$, determinaremos así el desplazamiento del punto A.

$$\delta_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = \int_l \frac{M_{tP} M_{t1}\, dz}{GI_t} + \int_l \frac{M_{xP} M_{x1}\, dz}{EI_x} + \int_l \frac{M_{yP} M_{y1}\, dz}{EI_y} + \int_l \frac{N_P N_1\, dz}{EF} + \int_l \frac{k_x Q_{xP} Q_{x1}\, dz}{GF} + \int_l \frac{k_y Q_{yP} Q_{y1}\, dz}{GF}. \tag{5.8}$$

Las integrales obtenidas se denominan *integrales de Mohr*.

Observemos que las integrales de Mohr se pueden obtener también, sin recurrir al teorema de Castigliano, de razonamientos geométricos elementales. Veamos, por ejemplo, una barra plana (fig. 191) y determinemos el desplazamiento del punto A en dirección a x_1. Para simplificar el problema consideremos que este desplazamiento está originado exclusivamente por la flexión.

En el tramo elemental de la barra, de longitud dz, ocurrirá una variación de la curvatura de la barra y entonces la sección derecha girará respecto a la izquierda un ángulo,

$$d\theta=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)dz,$$

siendo $\frac{1}{\rho}$, la curvatura nueva de la barra y $\frac{1}{\rho_0}$, la vieja.

Como consecuencia de la aparición del ángulo de giro local, la parte derecha de la barra girará, como un todo rígido, y entonces el punto A se desplazará en dirección a x_1 en la magnitud

$$d\delta_A=AA''=AA'\ \text{sen}\ \alpha=OA\ \text{sen}\ \alpha\ d\theta.$$

Pero como OA sen $\alpha=OB$, resultará que $d\delta_A=OB\,d\theta$. El segmento OB representa el momento de la fuerza unitaria, respecto al punto O, aplicada en el

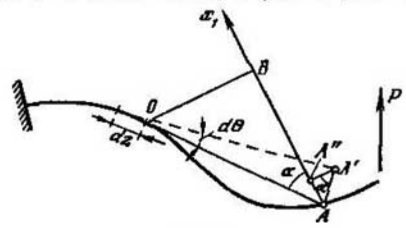


Fig. 191.

punto A y en dirección de x_1. Así pues, $d\delta_A=M_1\,d\theta$ ó

$$d\delta_A=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)M_1\,dz,$$

de donde se obtiene

$$\delta_A=\int\limits_l\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)M_1\,dz.$$

De manera análoga se pueden plantear las expresiones de los desplazamientos para los casos de torsión, tracción y distorsión. En el caso general,

$$\delta_A=\int\limits_l\theta_P M_{t1}\,dz+\int\limits_l\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)_{xP}M_{x1}\,dz+\int\limits_l\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)_{yP}M_{y1}\,dz+$$
$$+\int\limits_l\varepsilon_P N_1\,dz+\int\limits_l\gamma_{xP}Q_{x1}\,dz+\int\limits_l\gamma_{yP}Q_{y1}\,dz. \qquad (5.9)$$

La expresión (5.9) es más general que (5.8) puesto que en ella no se sobreentiende la dependencia lineal entre θ, $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)$, ε, etc., por una parte, y los factores de fuerza interiores, por otra. Ella es aplicable, por ejemplo, también en el caso de la flexión o torsión no elásticas de la barra.

Si el material sigue la ley de Hooke, entonces

$$\theta=\frac{M_t}{GI_t},\quad \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{M_{flec}}{EI},\quad \varepsilon=\frac{N}{EF},\quad \gamma=\frac{kQ}{GF},$$

resultando que la expresión (5.9) se transforma en (5.8).

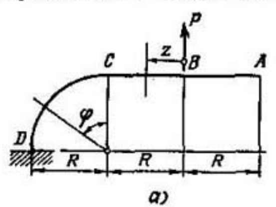
Ejemplo 5.4. Determinar el desplazamiento horizontal del punto A de la barra de la figura 192, *a* si la rigidez EI de todos los tramos es constante.

En esta barra, el papel principal lo juegan los desplazamientos originados por la flexión. Los que se deben a la tracción y distorsión son tan pequeños, en comparación con los primeros, como lo es la energía de la tracción y distorsión en comparación con la energía de la flexión. Por lo tanto, de las seis integrales de Mohr (5.8) mantenemos solamente una, la de la flexión,

$$\delta_A=\int_l \frac{M_P M_1}{EI}\,dz,$$

(la flexión en el otro plano y la torsión no existen).

El momento flector originado por la fuerza P en el tramo AB



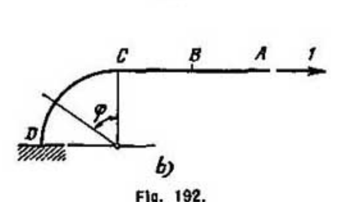


Fig. 192.

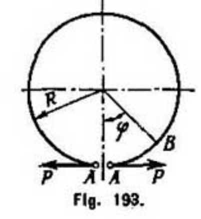


Fig. 193.

será igual a cero. En el tramo BC,

$$M_P=Pz$$

y en el tramo CD

$$M_P=PR\,(1+\operatorname{sen}\varphi).$$

El momento originado por la fuerza unitaria en el tramo AC es nulo, mientras que en el tramo CD será

$$M_1=-1\cdot R\,(1-\cos\varphi).$$

El signo negativo indica que el momento flector unitario está orientado en dirección opuesta a M_P.

El producto $M_P M_1$ en el tramo AC es igual a cero. Por lo tanto, la integración se lleva a cabo solamente sobre el tramo CD. Sustituyendo dz por $R\,d\varphi$, obtendremos,

$$\delta_A=\frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi/2}(1+\operatorname{sen} q)\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi,$$

de donde hallamos,

$$\delta_A=-\frac{\pi-1}{2}\,\frac{PR^3}{EI}.$$

El signo negativo indica que el desplazamiento horizontal del punto A está dirigido en dirección contraria a la fuerza unitaria, es decir, hacia la izquierda (fig. 192, *b*).

Ejemplo 5.5. Determinar la apertura de la holgura del anillo seccionado (fig. 193) bajo la acción de las fuerzas P. La rigidez del anillo es EI.

En el punto B (fig. 193) el momento flector de las fuerzas dadas P es

$$M_P=PR\,(1-\cos\varphi),$$

siendo φ, el ángulo central. Suponiendo que el extremo izquierdo del anillo está empotrado, aplicamos al derecho una fuerza unitaria para determinar el desplazamiento de un extremo respecto al otro (fig. 194, *a*). La reacción de apoyo será igual a la unidad y, por lo tanto, serán equivalentes los dos dibujos 194, *a* y 194, *b*. De esto, entre otras cosas, se deduce que, en general, cuando se requiere determinar el desplazamiento *mutuo* de dos puntos, se debe aplicar, en estos puntos, dos

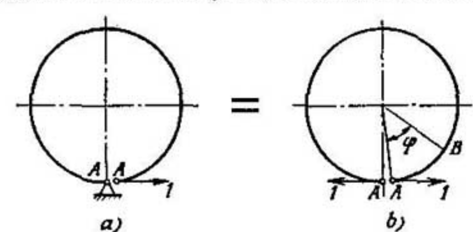


Fig. 194.

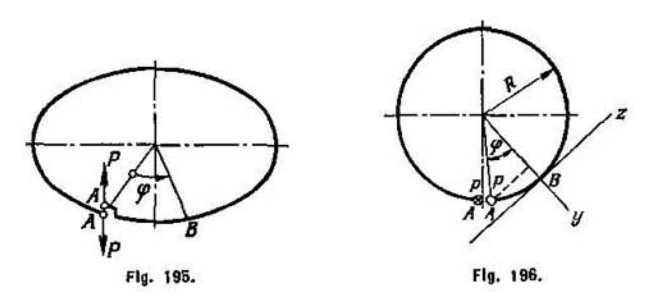


Fig. 195. Fig. 196.

fuerzas unitarias iguales, pero de sentido opuesto, que actúen en la recta que une estos puntos.

El momento de la fuerza unitaria es,

$$M_1 = R\,(1-\cos\varphi).$$

El desplazamiento mutuo de las secciones A será

$$\delta_A = \int\limits_l \frac{M_P M_1\,dz}{EI} = \frac{PR^3}{EI}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

ó

$$\delta_A = 3\pi\,\frac{PR^3}{EI}.$$

Ejemplo 5.6. Determinar el desplazamiento mutuo de las secciones AA en el mismo anillo (véase el ejemplo anterior), pero solicitado por fuerzas que actúan perpendicularmente al plano del anillo (fig. 195).

Veamos el anillo en su plano (fig. 196). En la sección B surge no sólo un momento flector, sino también un momento torsor. El primero de ellos es igual

al momento de la fuerza P respecto al eje y, el segundo, al momento de la misma fuerza respecto al eje z (fig. 196). Está claro que

$$M_y = PR \operatorname{sen} \varphi, \quad M_t = PR(1-\cos\varphi).$$

Aplicamos en los puntos AA fuerzas unitarias en lugar de P. Entonces obtendremos,

$$M_{y1} = R \operatorname{sen} \varphi, \quad M_{t1} = R(1-\cos\varphi).$$

Volviendo a la expresión (5.8) y considerando las dos primeras integrales, hallaremos,

$$\delta_A = \frac{PR^3}{GI_t}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\, d\varphi + \frac{PR^3}{EI}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi,$$

ó

$$\delta_A = \pi PR^3\left(\frac{3}{GI_t}+\frac{1}{EI}\right).$$

El desplazamiento en cuestión depende aquí de la rigidez del anillo a la torsión y de la rigidez a la flexión.

Tabla 5

N°	$f(\varphi)$	$\int_0^{\varphi} f(\varphi)\, d\varphi$	$\int_0^{\pi/2} f(\varphi)\, d\varphi$	$\int_0^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi$	$\int_0^{3\pi/2} f(\varphi)\, d\varphi$	$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi$
1	$\operatorname{sen}\varphi$	$1-\cos\varphi$	1	2	1	0
2	$\cos\varphi$	$\operatorname{sen}\varphi$	1	0	-1	0
3	$\operatorname{sen}^2\varphi$	$\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi\right)$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\frac{3}{4}\pi$	π
4	$\cos^2\varphi$	$\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi\right)$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\frac{3}{4}\pi$	π
5	$\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi$	$1/2$	0	$\frac{1}{2}$	0
6	$1-\cos\varphi$	$\varphi-\operatorname{sen}\varphi$	$\frac{\pi}{2}-1$	π	$\frac{3}{2}\pi+1$	2π
7	$(1-\cos\varphi)^2$	$\frac{3}{2}\varphi-2\operatorname{sen}\varphi+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\varphi$	$\frac{3}{4}\pi-2$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{9\pi}{4}+2$	3π
8	$(1-\cos\varphi)\times\operatorname{sen}\varphi$	$1-\cos\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0
9	$(1-\cos\varphi)\times\cos\varphi$	$\operatorname{sen}\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

De los ejemplos analizados se deduce que al determinar los desplazamientos de la barra, cuya configuración coincide con el arco de una circunferencia, resulta necesario calcular las integrales de diversas combinaciones de las funciones trigonométricas más simples. Como estas combinaciones son bastante típicas, conviene tabular (tabla 5) las integrales más frecuentes en los problemas de este tipo.

§ 40. Método de Vereschaguin

El defecto principal de la determinación de los desplazamientos por la fórmula de Mohr consiste en la necesidad de plantear las expresiones analíticas de las funciones integrando. Esta incomodidad se agrava cuando se determinan los desplazamientos en barras de muchos tramos. Sin embargo, cuando la barra consta de tramos rectos de rigidez constante en cada uno de ellos, la operación de integración se puede simplificar. Esta simplificación se basa en el hecho de que los gráficos de los factores de fuerza unitarios en los tramos rectos de la barra, resultan ser lineales.

Supongamos que en tramo de longitud l se necesita calcular la integral del producto de dos funciones $f_1(z)\cdot f_2(z)$,

$$I=\int_0^l f_1(z)\cdot f_2(z)\,dz. \qquad (5.10)$$

con la condición de que, por lo menos, una de las funciones es lineal. Supongamos que

$$f_2(z)=b+kz.$$

Entonces la expresión (5.10) será,

$$I=b\int_0^l f_1(z)\,dz+k\int_0^l zf_1(z)\,dz.$$

La primera de estas dos integrales constituye el área limitada por la curva $f_1(z)$ (fig. 197), es decir, el área del diagrama de $f_1(z)$,

$$\int_0^l f_1(z)\,dz=\Omega_1$$

La segunda integral constituye el momento estático de esta área respecto al eje y_1, es decir,

$$\int_0^l zf_1(z)\,dz=\Omega_1 z_{c.g.},$$

siendo $z_{c.g.}$ la coordenada del centro de gravedad del primer diagrama. Así pues, obtenemos

$$I=\Omega_1(b+kz_{c.g.}).$$

Pero

$$b + kz_{c.g.} = f_2(z_{c.g.}),$$

por lo tanto,

$$I = \Omega_1 f_2(z_{c.g.}).$$

Así pues, en el método de Vereschaguin, la integración se sustituye por el producto del área del primer diagrama por la ordenada del segundo (lineal) bajo el centro de gravedad del primer diagrama.

Cuando las dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son lineales, el producto de los diagramas resulta ser conmutativo. En este caso, el resultado no

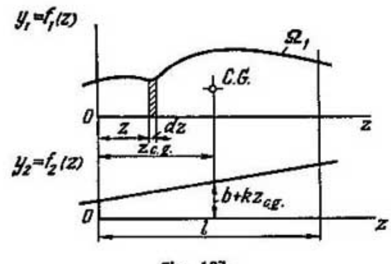


Fig. 197.

altera, si se multiplica el área del primer diagrama por la ordenada del segundo o el área del segundo por la ordenada del primero.

En cada una de las integrales del Mohr (5.8) figura el producto de las funciones $M_{xP}M_{x1}$, $M_{tP}M_{t1}$, etc. El método de Vereschaguin se puede aplicar a cada una de las seis integrales y la multiplicación de los gráficos se realiza de la misma forma, independientemente de que estos diagramas se hayan construido para los momentos flectores, para los momentos torsores o para las fuerzas normales o transversales. La diferencia consiste solamente en que el «producto» de los diagramas no se divide por la rigidez EI como en el caso de la flexión, sino por GI_t en el caso de la torsión, por EF en el de tracción y por GF, en el de la distorsión.

A primera vista puede parecer que el método de Vereschaguin no proporciona grandes simplificaciones, puesto que para aplicarlo es necesario determinar el área de los diagramas de los momentos y la posición del centro de gravedad, lo que, en el caso de diagramas complejos, exige, de todas formas, integración como en el método de Mohr. Pero, sin embargo, los diagramas de los momentos flectores que se dan en la práctica, como regla general, se pueden descomponer en figuras elementales como el rectángulo, el triángulo y el triángulo parabólico (fig. 198), para los cuales, tanto el área Ω, como la posición del centro de gravedad son bien conocidos. En los casos de torsión,

tracción y distorsión los diagramas resultan más simples aún, pues son generalmente lineales y están constituidos por rectángulos y triángulos en diversas combinaciones.

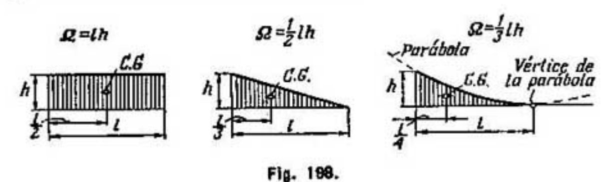


Fig. 198.

Ejemplo 5.7. Por el método de Vereschaguin, calcúlese el desplazamiento del punto A para el caso de la viga de la figura 199, a.

Construimos el diagrama de los momentos flectores correspondientes a las fuerzas dadas P (fig. 199, b). Retiramos después las fuerzas exteriores, aplicamos en el punto A una fuerza unitaria y construimos el diagrama correspondiente

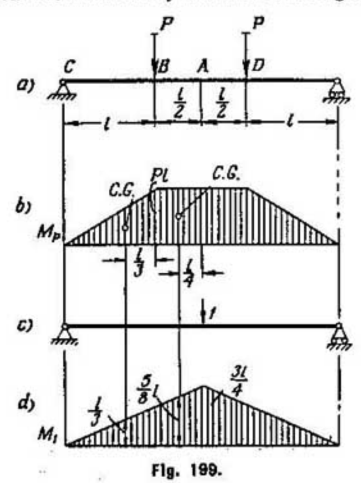


Fig. 199.

(fig. 199, c y d). Hallamos ahora el producto de los diagramas. En el tramo BC, el área del diagrama de los momentos de las fuerzas dadas es,

$$\Omega = \frac{Pl^2}{2}.$$

La ordenada del diagrama unitario, bajo el centro de gravedad del diagrama de los momentos de las fuerzas dadas, será en este tramo,

$$M_{1c.g.} = \frac{l}{3}.$$

Multiplicando estas magnitudes, hallaremos,

$$\Omega M_{1\,c.g.}=\frac{Pl^3}{6}.$$

El tramo BD no se puede considerar enteramente puesto que, en él, el diagrama de los momentos de la fuerza unitaria está constituido por una línea quebrada. Tomamos solamente la mitad del tramo, es decir, el segmento AB. Aquí,

$$\Omega=\frac{Pl^2}{2},$$

$$M_{1\,c.g.}=\frac{5}{8}l,$$

$$\Omega M_{1\,c.g.}=\frac{5Pl^3}{16}.$$

Sumando los resultados de las multiplicaciones $\Omega M_{1\,c.g.}$, obtendremos,

$$(\Omega M_{1\,c.g.})_{AC}=\frac{23Pl^3}{48}.$$

En los tramos situados a la derecha del punto A, de la condición de simetría, se obtiene el mismo resultado. Duplicamos pues la expresión hallada y, una vez dividida por EI, obtendremos el desplazamiento que se busca,

$$\delta_A=\frac{23Pl^3}{24EI}.$$

Ejemplo 5.8. En el sistema de la figura 200, *a* determinar la separación de los puntos A originada por la fuerza P.

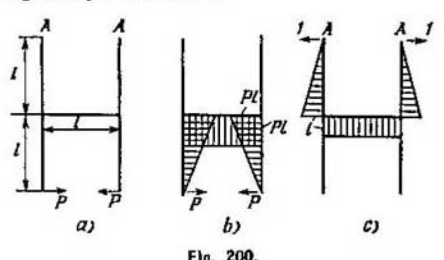


Fig. 200.

Construimos los diagramas de los momentos de las fuerzas dadas P y de las fuerzas unitarias aplicadas en los puntos A (fig. 200, *b* y *c*). Está claro que el producto de los diagramas en los tramos verticales será igual a cero. En el tramo horizontal hallaremos,

$$\Omega=Pl^2,\quad M_{1\,c.g.}=l,$$

y por lo tanto,

$$\delta_A=\frac{Pl^3}{EI}.$$

Ejemplo 5.9. Determinar el desplazamiento del punto A del voladizo solicitado por una carga uniformemente distribuida de intensidad q (fig. 201, *a*).

Construimos los diagramas de los momentos de las fuerzas dadas y de la fuerza unitaria aplicada al punto A (fig. 201, *b* y *c*). La multiplicación de los

diagramas se debe realizar por tramos, o sea, para la parte derecha y para la parte izquierda de la barra por separado. En la parte izquierda, el diagrama de los momentos de las fuerzas dadas está constituido por un trapecio parabólico cuya área y posición del centro de gravedad son desconocidos. Por ello *descomponemos el diagrama*. En lugar del diagrama de la figura 201, *b* construimos, por separado, el diagrama correspondiente a la carga que se encuentra a la derecha y el diagrama correspondiente a la carga ubicada a la izquierda del punto A (fig. 201, *d*).

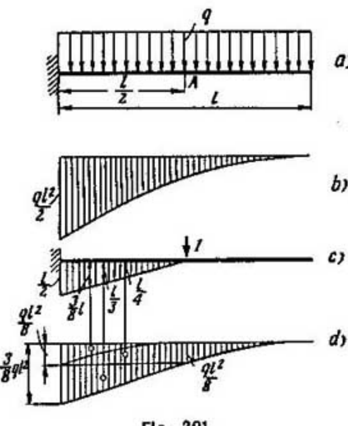


Fig. 201.

Ahora, en el tramo izquierdo, en lugar del trapecio parabólico, figuran un triángulo, un rectángulo y un triángulo parabólico. Las áreas y las posiciones de los centros de gravedad de estas figuras son conocidas.

El producto de los diagramas en el tramo derecho es igual a cero. En el tramo izquierdo, se obtienen los siguientes sumandos correspondientes al rectángulo, triángulo y triángulo parabólico respectivamente,

$$\frac{ql^3}{16}\cdot\frac{l}{4},\quad \frac{ql^3}{16}\cdot\frac{l}{3},\quad \frac{ql^3}{48}\cdot\frac{3l}{8},$$

de donde hallamos,

$$\delta_A=\frac{17}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}.$$

Ejemplo 5.10. Veamos el ejemplo de un sistema estéreo. Determinemos el desplazamiento del punto A en la dirección k en el caso de la barra estérea de la figura 202, *a*. La rigidez de los elementos a la flexión en los dos planos es igual a EI. La rigidez a la torsión es GI_t.

Los desplazamientos fundamentales en el sistema son los relacionados con la flexión y la torsión de las barras. Construimos los diagramas de los momentos flectores y torsores correspondientes a las fuerzas dadas y a la fuerza unitaria (fig. 202, *b* y *c*). Multiplicamos los diagramas de los momentos flectores. Se multiplican solamente los diagramas que se encuentran en un mismo plano. Esto se deduce de la expresión (5.8) donde, dentro de las integrales, se multiplican

solamente los momentos M_{xP} M_{x1} y $M_{yP}M_{y1}$, pero no los momentos M_{xP} M_{y1} y M_{yP} M_{x1}.

El resultado de la multiplicación de los diagramas de los momentos flectores en los tramos AB, BC, CD y DE respectivamente es,

$$0;\quad \frac{Pl^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l;\quad -\frac{Pl^2}{2}\cdot\frac{l}{3};\quad \frac{Pl^2}{2}\cdot l.$$

Como la rigidez a la flexión en los dos planos y en todos los tramos es la misma, todas estas magnitudes deberán sumarse y dividirse por EI.

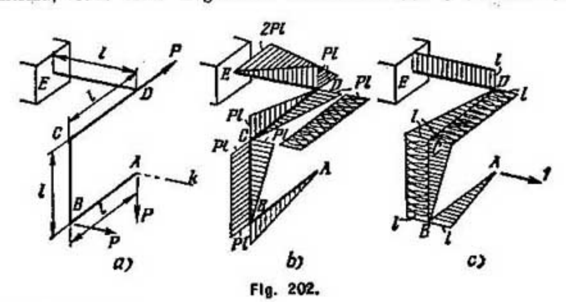


Fig. 202.

Entonces obtendremos,

$$\frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI}.$$

Los diagramas de los momentos torsores se multiplican solamente en el tramo CD. Como los momentos tienen el mismo signo, hallaremos,

$$+\frac{Pl^2}{GI_t}\cdot l.$$

El desplazamiento en cuestión será,

$$\delta_A = Pl^3\left(\frac{2}{3EI}+\frac{1}{GI_t}\right).$$

En el caso de una barra de sección circular,

$$GI_t = \frac{E}{2(1+\mu)}2I \approx 0{,}77\ EI$$

y por lo tanto,

$$\delta_A \approx 2\frac{Pl^3}{EI}.$$

§ 41. Determinación de los desplazamientos y las tensiones en muelles espirales

Los muelles espirales son unos de los elementos elásticos más difundidos en la construcción de máquinas. Se emplean en las más diversas estructuras como acumuladores de energía elástica en los dispositivos de amortiguación, de avance y retroceso y en otros muchos dispositivos.

El cálculo y diseño de muelles espirales se estudia en los cursos de piezas de máquinas e instrumentos. Sin embargo, debido a las tradiciones establecidas, las fórmulas principales para el cálculo se deducen generalmente en el curso de resistencia de materiales, puesto que el cálculo de los muelles ilustra claramente los métodos de determinación de los desplazamientos.

El muelle espiral se puede interpretar como una barra alabeada en el espacio, cuya línea axial, en el caso más simple, es una línea

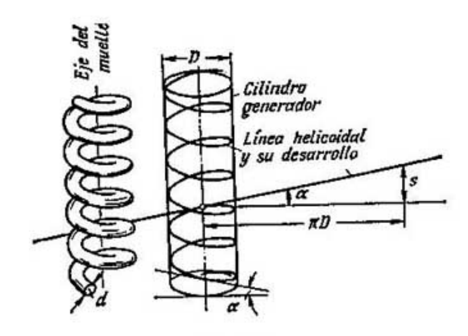


Fig. 203.

helicoidal. La forma geométrica de la línea axial se determina por el diámetro de la espira D, por el número de espiras n y por el ángulo de elevación α (véase el desarrollo de la figura 203). La elevación de la espira se puede caracterizar también por el paso s del resorte,

$$s = \pi D \operatorname{tg} \alpha.$$

En todos los muelles que se encuentran en la práctica, el paso s es muy inferior a πD y el ángulo de elevación α se puede considerar como una magnitud pequeña. Generalmente $\alpha < 5°$. Las propiedades del resorte dependen también de la forma de la sección transversal de la espira. Generalmente se hacen de alambre redondo cuyo diámetro se denota por d (fig. 203). Según sea el tipo de las cargas de trabajo que actúan los muelles espirales se dividen en *muelles de tracción* (fig. 204, *a*), *muelles de compresión* (fig. 204, *b*) y *muelles de torsión* (fig. 204, *c*). En los dos primeros casos, los muelles se cargan por fuerzas, cuyas resultantes están orientadas según el eje del muelle. El muelle de torsión se solicita por dos momentos situados en los planos perpendiculares al eje del muelle.

La particularidad constructiva de los muelles citados consiste en la terminación de los extremos. Las espiras extremas de los muelles de tracción y torsión se doblan de tal manera que sea factible, en cada caso, la fijación del muelle con las piezas adyacentes. En el caso de muelles de compresión, las espiras extremas se comprimen y se esmerilan en los extremos para conseguir así los planos de apoyo.

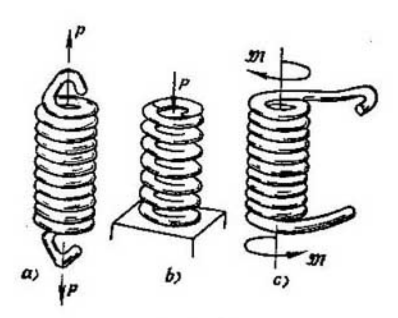


Fig. 204.

Al determinar los desplazamientos y las tensiones estas particularidades de los muelles no se tienen en consideración y se prescinde generalmente de las espiras extremas.

Hallemos la dependencia entre la variación de la altura del muelle de tracción — compresión y la fuerza axial P. En toda sección transversal arbitraria de la espira del muelle de tracción aparece la fuerza interior resultante P (fig. 205, *a*) y un momento $M=P\frac{D}{2}$. La fuerza completa en la sección es paralela al eje del muelle y el plano del momento M coincide con el plano del par de las fuerzas P. La sección transversal normal de la espira está girada respecto a este plano un ángulo α. Descomponiendo el momento y la fuerza sobre los ejes relacionados con la sección (fig. 205, *b*), hallaremos,

$$\left.\begin{aligned} &M_t=P\frac{D}{2}\cos\alpha; \quad M_{flec}=P\frac{D}{2}\operatorname{sen}\alpha; \\ &Q=P\cos\alpha; \quad N=P\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Para hallar el desplazamiento axial λ, aplicamos a los extremos del muelle fuerzas unitarias y calculamos los factores de fuerza interiores que en este caso surgen. Estos factores se determinan, claro

está, por la expresión (5.11) considerando que $P=1$,

$$M_{t1}=\frac{D}{2}\cos\alpha;\quad M_{flec\,1}=\frac{D}{2}\operatorname{sen}\alpha;\quad Q_1=\cos\alpha;\quad N_1=\operatorname{sen}\alpha.$$

Para determinar los desplazamientos en el muelle helicoidal es necesario, pues, plantear cuatro integrales de Mohr de las seis que figuran en la fórmula (fórmula 5.8). Sin embargo, resulta que los desplazamientos originados por las fuerzas normal y cortante, como en el caso de cualquier otra barra, son pequeños y debido a que α es

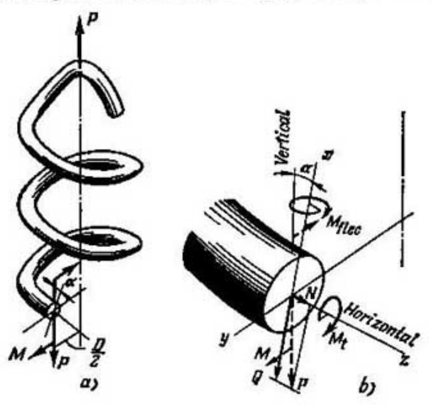


Fig. 205.

pequeño será pequeño también el desplazamiento axial relacionado con la flexión de las espiras. Por lo tanto,

$$\lambda=\int_l \frac{M_t M_{t1}\,dz}{GI_t},$$

siendo GI_t la rigidez de la espira a la torsión, suponiendo que $\cos\alpha\approx 1$, obtendremos,

$$\lambda=\frac{PD^2}{4GI_t}\,l,$$

siendo l, la longitud total de la parte de trabajo de las espiras que es,

$$l\approx\pi Dn.$$

Así pues,

$$\lambda=\frac{P\pi D^3 n}{4GI_t}. \tag{5.12}$$

Al determinar la magnitud de n, en el caso del muelle de tracción, la parte doblada de las espiras en los extremos no se tiene en consideración. En el caso de los muelles de compresión, del número total de espiras se resta 3/4 de espira en cada extremo, puesto que estas espiras están en contacto con las espiras adyacentes y no pueden deformarse libremente. Así pues, se supone que espira y media no trabajan.

Si el muelle se forma de un alambre redondo,

$$I_t = I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

y entonces, la fórmula (5.12) se escribirá así,

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \qquad (5.13)$$

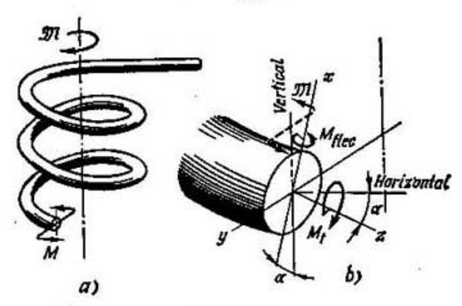


Fig. 206.

Como las espiras del muelle de tracción — compresión trabajan principalmente a torsión,

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{PD}{2W_t}.$$

Cuando la sección transversal es circular,

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3}.$$

Pasando a los muelles de torsión conviene señalar que al calcularlos, el máximo interés presenta la determinación del desplazamiento angular de un extremo respecto al otro.

En las secciones transversales de la espira del muelle de torsión surge el momento total $M = \mathfrak{M}$ (fig. 206). Descomponiéndolo según los ejes obtendremos,

$$M_{flec} = \mathfrak{M} \cos \alpha; \quad M_t = \mathfrak{M} \operatorname{sen} \alpha.$$

Una vez aplicados a los extremos del muelle los momentos unitarios hallaremos,

$$M_{flec\,1}=\cos\alpha;\quad M_{t1}=\operatorname{sen}\alpha.$$

Como el ángulo α es pequeño, prescindimos del desplazamiento relacionado con la torsión de las espiras y consideramos que $\cos\alpha$ es igual a la unidad. Entonces obtendremos,

$$\varphi=\int_l \frac{M_{flec}M_{flec\,1}\,dz}{EI_x}=\frac{\mathfrak{M}l}{EI_x}$$

ó

$$\varphi=\frac{\mathfrak{M}\pi Dn}{EI_x}.$$

La tensión máxima originada por la flexión será,

$$\sigma_{max}=\frac{\mathfrak{M}}{W_x}.$$

Los problemas que surgen en el cálculo de los muelles espirales no se limitan a lo expuesto. Cuando el diámetro del alambre d es comparable con el de la espira D resulta necesario introducir ciertas correcciones debidas a que la curvatura es grande. En algunos casos es necesario determinar los desplazamientos denominados secundarios, por ejemplo, la variación del diámetro o la variación del número de espiras del muelle de tracción. En toda una serie de casos presenta cierto interés la creación de muelles con dependencia no lineal entre el asiento λ y la fuerza P. Esto se consigue con el hecho de que, al deformarse el muelle, parte de las espiras deja de trabajar. Se encuentran también problemas relacionados con el cálculo de muelles no cilíndricos y otros muchos. Todos ellos, sin embargo, salen fuera de los marcos de curso de resistencia de materiales y, por lo tanto, aquí no se analizan.

§ 42. Teoremas de reciprocidad de los trabajos y los desplazamientos

El teorema de reciprocidad de los trabajos, así como el teorema de Castigliano, figura entre los teoremas generales de la resistencia de materiales. Se deduce directamente del principio de superposición de fuerzas y se aplica a todos los sistemas que se atienen a este principio.

Veamos un cuerpo elástico con una fuerza P_1 aplicada en el punto A y otra P_2, en el punto B (fig. 207). Suponiendo que se puede aplicar al sistema el principio de superposición de las fuerzas, determinemos el trabajo que realizan las fuerzas P_1 y P_2, al aplicarlas en orden directo e inverso.

Aplicamos primeramente en el punto A la fuerza P_1 que realizará entonces el trabajo $\frac{1}{2}P_1\delta_{A1}$ siendo δ_{A1}, el desplazamiento del punto

A en dirección a la fuerza P_1 originado por la misma fuerza P_1. Aplicamos después en el punto B la fuerza P_2 que realizará un trabajo, cuya expresión será análoga a la anterior, es decir $\frac{1}{2}P_2\delta_{B2}$. Simultáneamente a este trabajo, realizará cierto trabajo también la fuerza P_1 puesto que al aplicar la fuerza P_2 se desplaza el punto A. El trabajo de la fuerza P_1 será $P_1\delta_{A2}$, siendo δ_{A2} el desplazamiento del punto

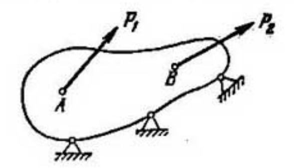


Fig. 207.

A en dirección a la fuerza P_1 originado por la fuerza P_2 aplicada al punto B.

Como resultado se obtiene la siguiente suma de los trabajos correspondiente al orden directo de aplicación de las fuerzas,

$$\frac{1}{2}P_1\delta_{A1}+\frac{1}{2}P_2\delta_{B2}+P_1\delta_{A2}.$$

Invertimos ahora el orden de aplicación, aplicando primero P_2 y después P_1. Entonces la expresión del trabajo realizado será,

$$\frac{1}{2}P_2\delta_{B2}+\frac{1}{2}P_1\delta_{A1}+P_2\delta_{B1}.$$

Igualando estos trabajos obtendremos,

$$P_1\delta_{A2}=P_2\delta_{B1}. \tag{5.14}$$

El resultado obtenido se puede resumir de la forma siguiente. *El trabajo de la primera fuerza en el desplazamiento del punto de su aplicación y debido a la acción de la segunda fuerza es igual al trabajo realizado por la segunda fuerza en el desplazamiento del punto de su aplicación y originado por la primera fuerza.*

En esto consiste *el teorema de reciprocidad de los trabajos.*

Este teorema adquiere mayor generalidad si se tiene en consideración que, en este caso, como cuando se deducía el teorema de Castigliano, por P_1 y P_2 se puede entender no simplemente fuerzas, sino fuerzas generalizadas y por δ_{A2} y δ_{B1}, desplazamientos generalizados.

Algunas veces el teorema de reciprocidad de los trabajos se le atribuye un contenido mucho más estrecho y se interpreta como el *teorema de reciprocidad de los desplazamientos.* Si $P_1=P_2$ la expresión (5.14) será la siguiente,

$$\delta_{A2}=\delta_{B1}. \tag{5.15}$$

El desplazamiento del punto A originado por la fuerza aplicada en el punto B es igual al desplazamiento del punto B originado por la misma fuerza, pero aplicada en el punto A.

Esto puede ser ilustrado en el ejemplo de una viga solicitada por la fuerza P que se aplica consecutivamente en los puntos A y B (fig. 208). Según el teorema de reciprocidad de los desplazamientos, los segmentos δ_{A2} y δ_{B1}, representados en la figura, deberán ser iguales.

Los teoremas de reciprocidad de los trabajos y los desplazamientos resultan ser muy útiles, puesto que permiten, en muchos casos, simplificar considerablemente la solución de muchos problemas de la

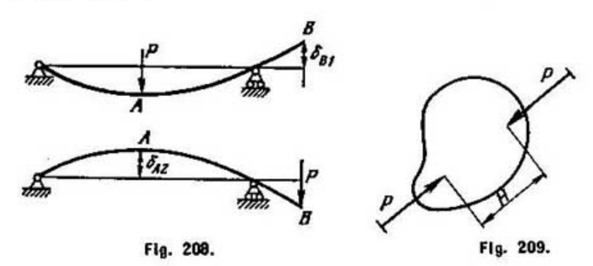


Fig. 208. Fig. 209.

resistencia de materiales. Esto se comprobará particularmente en el capítulo siguiente, donde se analizarán los problemas generales relacionados con el cálculo de sistemas hiperestáticos.

En algunos casos, el teorema de reciprocidad de los trabajos permite, de manera muy simple, resolver, en forma general, problemas, que, por otros métodos, se pueden resolver solamente después de vencer serias dificultades.

Ejemplo 5.11. Determinar la variación del volumen del cuerpo elástico de configuración arbitraria, solicitado por dos fuerzas iguales y de dirección opuesta P (fig. 209). La distancia entre los puntos de aplicación es H. Las constantes de elasticidad del material se consideran dadas.

Está claro que obtener la solución del problema planteado en forma tan general resulta difícil. Sin embargo, si recurrimos al teorema de reciprocidad de los trabajos el problema se simplifica. Analizamos simultáneamente a la carga dada, el caso de solicitación del cuerpo por una carga uniformemente distribuida p que actúa sobre la superficie. Obtendremos entonces dos fuerzas generalizadas: el sistema de dos fuerzas P, por una parte, y la presión p, por otra.

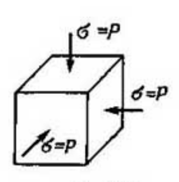
Según el teorema generalizado de reciprocidad de los trabajos podemos afirmar que,

$$P\Delta H_p = p\Delta V_P, \qquad (5.16)$$

siendo ΔH_p, el desplazamiento mutuo de los puntos de aplicación de las fuerzas originado por la presión p y ΔV_P, la variación que se busca del volumen del cuerpo originada por las fuerzas P.

Al cargar el cuerpo con una presión uniformemente distribuida, en cada área de éste aparece una tensión igual a la presión p. Para el volumen elemental de la figura 210, la compresión unitaria en cualquier dirección es, según la ley de Hooke,

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}-\mu\frac{\sigma}{E}-\mu\frac{\sigma}{E}=\frac{p}{E}(1-2\mu).$$



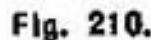


Fig. 210.

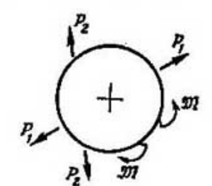


Fig. 211.

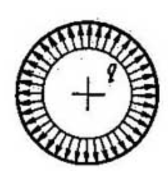


Fig. 212.

Los puntos de aplicación de las fuerzas P (fig. 209) se acercarán bajo la acción de la presión p en la magnitud siguiente,

$$\Delta H_p=\frac{p}{E}(1-2\mu)H.$$

Introduciendo ΔH_p en la expresión (5.16) obtendremos,

$$\Delta V_p=\frac{PH}{E}(1-2\mu).$$

Ejemplo 5.12. El anillo de rigidez absoluta a la tracción está solicitado en su plano por un sistema arbitrario de fuerzas (fig. 211). Demostrar que el área limitada por el anillo no varía durante la flexión.

La variación del área se considera como el desplazamiento generalizado. La fuerza generalizada que corresponde a este desplazamiento es una carga distribuida de intensidad q constante. Por lo tanto, analizamos, simultáneamente a esta carga, la solicitación del mismo anillo por una carga uniformemente distribuida de intensidad q (fig. 212). Entonces, según el teorema de reciprocidad de los trabajos obtendremos,

$$q\Delta F_P^*=\sum P_i\delta_{iq}, \tag{5.17}$$

siendo ΔF_P^* la variación que se busca del área, originada por la carga arbitraria y $\Sigma P_i\delta_{iq}$, la suma de los trabajos de estas fuerzas en los desplazamientos originados por las fuerzas distribuidas q.

Bajo la acción de las fuerzas q no surgirán desplazamientos en el anillo, puesto que éste es absolutamente rígido a la tracción y por lo tanto $\delta_{iq}=0$. Es decir, el segundo miembro de la ecuación (5.17) resulta igual a cero y $\Delta F_P^*=0$, lo que se pretendía demostrar.

Está claro que el resultado obtenido es justo solamente en el caso de desplazamientos pequeños, cuando resulta aplicable al sistema el principio de superposición de las fuerzas.

Capítulo VI

CALCULO POR EL METODO DE LAS FUERZAS DE SISTEMAS HIPERESTATICOS COMPUESTOS POR BARRAS

§ 43. Ligaduras impuestas al sistema. Grado de hiperestaticidad

En los capítulos I y II fueron tratados ya, parcialmente, los problemas relacionados con el concepto de hiperestaticidad. Para resolver la mayoría de los problemas que se encuentran en la práctica, los métodos expuestos resultan, sin embargo, insuficientes. Es necesario, por lo tanto, entrar en posesión de métodos más generales para vencer la hiperestaticidad de sistemas compuestos por barras.

Se entiende por *sistema compuesto por barras*, en el sentido amplio de la palabra, toda estructura constituida por elementos en forma de barra. Si los elementos de la estructura trabajan esencialmente a

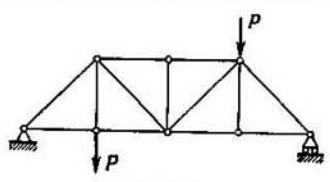


Fig. 213.

tracción o compresión, el sistema de barras se denomina *armadura* (fig. 213). La armadura está compuesta por barras rectas que forman triángulos. La aplicación de las fuerzas en los nudos es característico de la armadura.

Si los elementos del sistema de barras trabajan principalmente a flexión o torsión se le denomina pórtico (fig. 214).

Un grupo especial de los sistemas de barras, el más simple de investigar, lo constituyen los sistemas *planos*. En estos sistemas, pórtico o armadura planas, los ejes de todos los elementos se encuentran en un mismo plano que, al mismo tiempo, es el plano principal de las secciones. En este mismo plano se encuentran las fuerzas exteriores, incluyendo las reacciones de apoyo (fig. 214, *a*).

Simultáneamente a los sistemas planos se analizan también los así llamados *sistemas plano-espaciales*. En estos sistemas los ejes

de los elementos que lo constituyen se encuentran, antes de la deformación, como en el caso de los sistemas planos, en un mismo plano. Los factores de fuerzas exteriores actúan en planos que son perpendiculares a éste. (fig. 214, *b*). Los sistemas de barras que no se encuentran entre los tipos indicados, se denominan sistemas *espaciales* o estéreos (fig. 214, *c*).

Los pórticos y armaduras se dividen en *isostáticos* y *hiperestáticos*. Se entiende por sistema isostático, todo sistema en el cual todas las reacciones de los apoyos se pueden obtener de las ecuaciones de equilibrio y una vez obtenidas éstas, por el método de las secciones, se pueden obtener también los factores de fuerzas interiores en cualquier sección transversal. Se entiende por sistema hiperestático el sistema en el cual la determinación de las reacciones exteriores y de todos los factores de fuerza interiores no se puede realizar por el método de las secciones y por las ecuaciones de equilibrio.

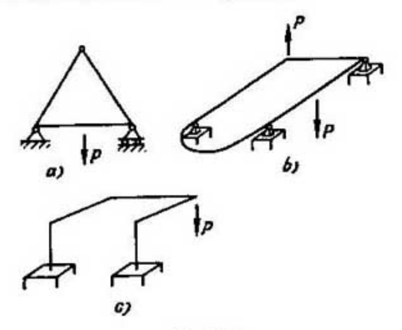


Fig. 214.

La diferencia entre el número de incógnitas (reacciones de apoyo y factores de fuerzas interiores) y el número de ecuaciones independientes de la estática que se pueden plantear para el sistema dado, se denomina grado *de hiperestaticidad*. Según sea esta diferencia, los sistemas se dividen en sistemas de un grado de hiperestaticidad, de grado doble, triple, . . ., de grado *n*. Se dice, a veces, que el grado de hiperestaticidad es igual al número de ligaduras adicionales que se imponen al sistema. Veamos esta cuestión con más detalles.

La posición de la barra rígida en el espacio se determina por seis coordenadas independientes, es decir, que la barra rígida tiene seis grados de libertad. A la barra le pueden ser impuestas ligaduras, es decir, limitaciones que determinan su posición en el espacio. Las ligaduras más simples son aquellas que anulan tal o cual desplazamiento general de ciertas secciones de la barra. La imposición de una

ligadura liquida un grado de libertad de la barra, interpretada como un todo rígido. Es decir, si a la barra rígida libre se le imponen seis ligaduras, entonces su posición en el espacio, interpretando el sólido como un cuerpo rígido, quedará, salvo ciertas exclusiones, fijado en el espacio y el sistema de un mecanismo de seis grados de libertad que era, se convertirá en un sistema cinemáticamente invariable.

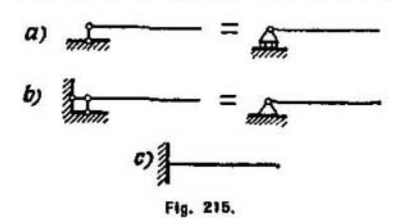


Fig. 215.

El número de ligaduras que se necesita para obtener la invariabilidad cinemática se denomina *número necesario de ligaduras*. Toda ligadura impuesta al sistema además de las necesarias se denomina ligadura *adicional* o superflua. El número de ligaduras adicionales es igual al grado de hiperestaticidad del sistema.

Las ligaduras en los pórticos y sistemas de barras se dividen generalmente en ligaduras exteriores y ligaduras interiores o mutuas.

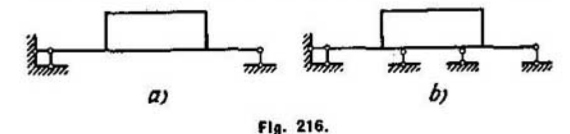


Fig. 216.

Se entiende por ligaduras exteriores las limitaciones impuestas a los desplazamientos absolutos de ciertos puntos del sistema. Si, por ejemplo, al extremo izquierdo de la barra (fig. 215, *a*) se le impone la limitación que impide el desplazamiento vertical, se dice entonces que en este punto existe una ligadura exterior. Convencionalmente esta ligadura se representa por dos articulaciones o un rodillo. Si se impide tanto el desplazamiento vertical como el horizontal, se dice que se imponen dos ligaduras exteriores (fig. 215, *b*). El empotramiento en un sistema plano nos da tres ligaduras exteriores. El empotramiento estéreo corresponde a seis ligaduras exteriores (fig. 215, *c*). Como se dijo ya, las ligaduras exteriores, con frecuencia, se dividen en necesarias y adicionales. Por ejemplo, en la figura 216, *a* y *b* está representado un pórtico plano que tiene, en el primer caso, tres ligaduras exteriores y en el segundo, cinco ligaduras exteriores. Para fijar la

posición del pórtico en el plano, como un sólido rígido, se necesita imponer tres ligaduras. Por lo tanto, en el primer caso, el pórtico tiene las ligaduras exteriores necesarias y en el segundo, además, dos ligaduras exteriores adicionales.

Se entiende por ligaduras interiores o mutuas, las limitaciones impuestas a los desplazamientos mutuos de los elementos del pórtico. Aquí se puede hablar también de ligaduras necesarias y de ligaduras adicionales. Así, por ejemplo, el pórtico plano de la figura 217, *a*

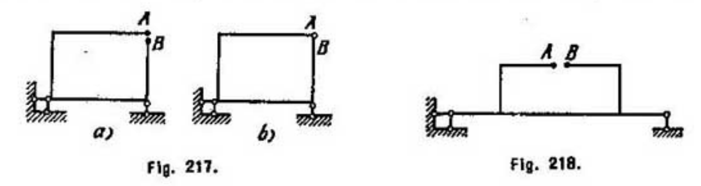


Fig. 217. Fig. 218.

tiene el número suficiente de ligaduras tanto exteriores como interiores entre los elementos. Este sistema es cinemáticamente invariable. Si se dan las fuerzas exteriores que actúan sobre este sistema, estaremos en condiciones de calcular tanto las reacciones de apoyo, como los factores de fuerzas interiores en cualquier sección transversal del pórtico. En el mismo pórtico, indicado en la figura 217, *b*, aparte de las ligaduras exteriores se han impuesto dos ligaduras interiores adicionales más que impiden los desplazamientos horizontales y verticales mutuos de los puntos A y B. Este sistema, en el caso dado, es de hiperestaticidad doble (a veces se dice de hiperestaticidad interna).

En el pórtico de la figura 216, *a* y *b* también existen ligaduras internas adicionales. El contorno del pórtico es cerrado. Seccionándolo en cualquier lugar (fig. 218), sin alterar la invariabilidad cinemática del sistema, se hace posible, dadas las fuerzas exteriores, obtener los factores de fuerza interiores en cualquier sección del pórtico. Por eso, al seccionar un pórtico cerrado, se eliminan las ligaduras adicionales, es decir, se permite a las secciones A y B girar y desplazarse mutuamente en dos direcciones. Generalizando, se puede afirmar que el contorno plano cerrado tiene tres ligaduras adicionales mutuas, es decir, es de hiperestaticidad triple. Así pues, el pórtico de la figura 216, *a* tiene el grado de hiperestaticidad igual a tres. El grado de hiperestaticidad del pórtico de la figura 216, *b* es igual a cinco (tres interiormente y dos de forma exterior).

Veamos ahora algunos ejemplos de determinación del grado de hiperestaticidad de los sistemas compuestos por barras y de los sistemas aporticados. En la figura 219 están representados varios pórticos. Analicémoslos sucesivamente.

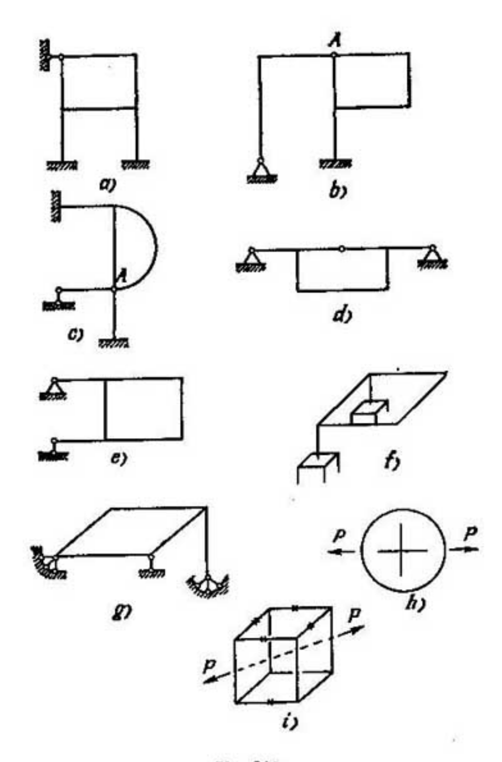


Fig. 219.



Fig. 220.

a) El pórtico tiene cuatro ligaduras exteriores adicionales y tres interiores, es decir, el grado de hiperestaticidad es siete.

b) Supongamos primero que la articulación *A* no existe. Entonces tendremos dos ligaduras exteriores suplementarias y tres interiores suplementarias, resultando que el grado de hiperestaticidad del sistema sin la articulación *A* sería igual a cinco.

La articulación *A* pertenece al mismo tiempo a tres barras y se puede interpretar como dos articulaciones que coinciden (fig. 220). Como cada articulación anula una ligadura, es decir, permite el giro de una sección respecto a la otra, se puede afirmar que la articulación *A* elimina dos ligaduras. El grado de hiperestaticidad resulta ser igual a tres y no a cinco.

Generalizando lo dicho, se puede llegar a la conclusión de que la articulación liquida un número de ligaduras igual al número de barras concurrentes en ese nudo menos una. En nuestro caso en la articulación *A* se juntan tres barras y, por lo tanto, ésta elimina dos ligaduras.

c) Si no existiese la articulación *A* el grado de hiperestaticidad del sistema sería igual a siete, cuatro grados de hiperestaticidad externa y tres, de hiperestaticidad interna. La articulación *A* elimina un número de ligaduras igual al número de barras que afluyen a él menos una, es decir, en total tres ligaduras. El grado de hiperestaticidad es cuatro.

d) El grado de hiperestaticidad es tres.

e) Las ligaduras exteriores no satisfacen las condiciones de invariabilidad cinemática y el sistema es, por lo tanto, un mecanismo, mejor dicho, es un mecanismo instantáneo. El sistema tiene la posibilidad de girar respecto al apoyo superior sin deformarse. Está claro que el ángulo de giro será pequeño. La ligadura inferior se inclina hasta que no se consiga cierta posición de equilibrio, pero la nueva posición de las ligaduras dependerá de la rigidez del sistema. A este pórtico no se le pueden aplicar los principios fundamentales de la resistencia de materiales: el principio de invariabilidad de las dimensiones originales y el principio de superposición de las fuerzas.

f) El pórtico es estéreo. Tiene seis ligaduras adicionales exteriores (un empotramiento superfluo) y seis ligaduras mutuas adicionales (el contorno cerrado). El grado de hiperestaticidad es doce.

g) El grado de hiperestaticidad es siete (un grado de hiperestaticidad exterior y seis de hiperestaticidad interior).

h) En el caso de este pórtico plano no se indican las ligaduras exteriores, pero se da un sistema de fuerzas exteriores que se encuentra en equilibrio. En este caso se acuerda considerar que no existen ligaduras adicionales exteriores, y que la posición del pórtico en el espacio está determinada. Se analizan solamente las ligaduras interiores. El grado de hiperestaticidad es tres.

i) En este caso también se consideran solamente las ligaduras interiores puesto que el sistema de fuerzas exteriores satisface las condiciones de equilibrio. Se necesita determinar el número necesario de secciones para que, por una parte, no se desintegre el pórtico y, por otra, no quede ningún contorno cerrado. Para ello son necesarias cinco secciones (fig. 219, *i*). El grado de hiperestaticidad del sistema es 30.

§ 44. Elección del sistema base. Método de las fuerzas

El método de cálculo de sistemas compuestos por barras y pórticos hiperestáticos más difundido en la construcción de máquinas es el *método de las fuerzas.* Consiste en que el sistema hiperestático dado se libra de las ligaduras adicionales exteriores y mutuas y se sustituyen

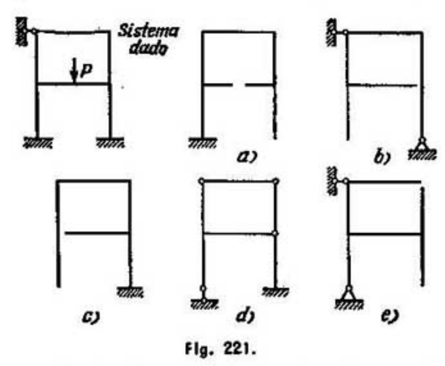


Fig. 221.

por las correspondientes fuerzas y momentos. La magnitud de estas fuerzas y momentos se escoge de tal manera, que los desplazamientos correspondan a las limitaciones que las ligaduras retiradas imponen al sistema dado. Así pues, en este método de cálculo las incógnitas son fuerzas. Por eso se denomina «método de las fuerzas». Este procedimiento no es el único posible. En la Teoría de las estructuras se emplean también otros métodos, por ejemplo, el de las deformaciones, en el cual se consideran incógnitas, ya no los factores de fuerza, sino los desplazamientos en los elementos del sistema de barras.

Es decir, el cálculo de cualquier pórtico hiperestático por el método de las fuerzas comienza por la liquidación de las ligaduras adicionales. El sistema libre de estas ligaduras se convierte en isostático y se denomina *sistema base.* Para cualquier sistema hiperestático se pueden elegir, como norma general, un número infinito de sistemas base. Por ejemplo, en el caso del pórtico indicado en la figura 221

se pueden proponer los sistemas base a), b), ..., que se obtuvieron liquidando siete ligaduras adicionales en diversas combinaciones. Al mismo tiempo es necesario tener en cuenta también que no cualquier sistema libre de siete ligaduras puede ser admitido como sistema base. En la figura 222 se indican tres ejemplos correspondientes al mismo pórtico en los cuales también se eliminaron siete ligaduras, pero se hizo esto de manera incorrecta, puesto que las ligaduras

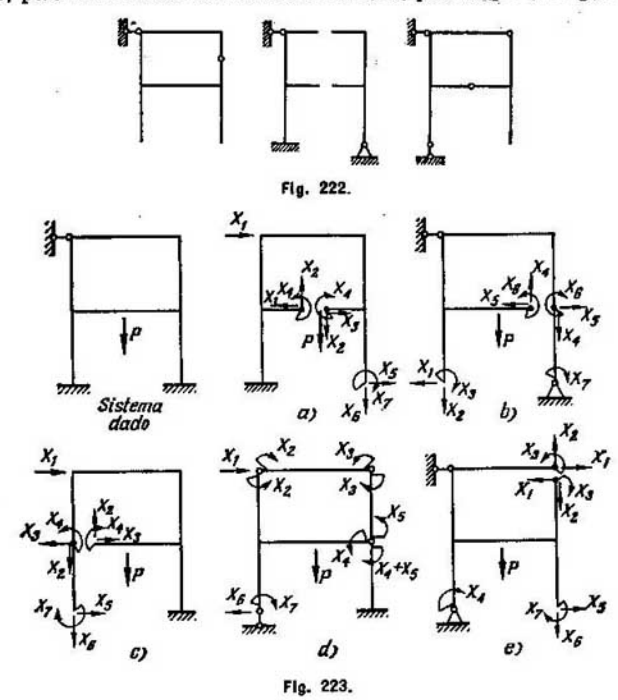


Fig. 222.

Fig. 223.

restantes no garantizan la invariabilidad cinemática del sistema, por una parte, y la isostaticidad de todos los nudos por otra.

Una vez liquidadas las ligaduras adicionales y convertido el sistema en isostático es necesario, como se dijo anteriormente, introducir en el lugar de las ligaduras los factores de fuerza desconocidos. En las secciones en que no existen desplazamientos lineales se introducen fuerzas y donde no existen desplazamientos angulares, momen-

tos. Tanto en un caso como en el otro, los factores de fuerza desconocidos los designaremos por X_i, siendo i el número de la incógnita. El valor máximo de i coincide con el grado de hiperestaticidad del sistema. Observemos que en el caso de las ligaduras interiores las fuerzas X_i son mutuas. Si se secciona el pórtico en cierto lugar, entonces se aplican fuerzas y momentos iguales, pero de dirección opuesta, tanto a la parte izquierda, como a la parte derecha del sistema.

En la figura 223 están representadas cinco maneras posibles de aplicar de las fuerzas desconocidas, correspondientes a los sistemas base anteriores (fig. 221). El principio de aplicación de los factores de fuerza desconocidos queda así claro y no necesita más aclaraciones.

No queda más que plantear las ecuaciones para la determinación de las incógnitas.

§ 45. Ecuaciones canónicas del método de las fuerzas

Veamos un ejemplo concreto. Examinemos, por ejemplo, el primer sistema de los indicados en la figura 223 y repetido en la figura 224. La generalidad de los razonamientos no queda afectada, al analizar un sistema concreto de grado de hiperestaticidad igual a siete.

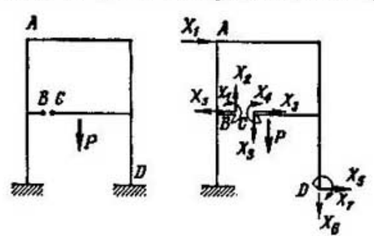


Fig. 224.

Pasemos ahora al planteamiento de las ecuaciones para la determinación de los factores de fuerza desconocidos. Anotamos por δ_{ik} el desplazamiento mutuo de los puntos del sistema. El primer subíndice de δ corresponde a la dirección del desplazamiento y el segundo, a la fuerza que lo origina.

En el pórtico en cuestión, en el punto A, se eliminó un apoyo. Por lo tanto, el desplazamiento horizontal de este punto será igual a cero, es decir,

$$\delta_{1\,[X_1,\,X_2,\,\ldots,\,P]}=0.$$

El subíndice 1 indica que se trata del desplazamiento en dirección a la fuerza X_1 y el subíndice $[X_1, X_2, \ldots, P]$ indica que el desplaza-

miento está determinado por todas las fuerzas, tanto dadas como desconocidas.

De manera análoga podremos escribir,

$$\delta_{2[X_1,\ X_2,\ \ldots,\ P]}=0;\quad \delta_{3\,[X_1,\ X_2\ \ldots,\ P]}=0,\ \text{etc.}$$

Como por δ_{ik} se entiende el desplazamiento mutuo de los puntos del sistema, δ_2 representará el desplazamiento vertical del punto B respecto al punto C, δ_3, el desplazamiento mutuo horizontal de los mismos puntos y δ_4, el desplazamiento angular mutuo de las secciones B y C. Será desplazamiento angular en el sistema en cuestión la magnitud $\delta_{7[X_1,\ X_2,\ldots,\ P]}$.

En los puntos A y D los desplazamientos δ_{ik} son absolutos, que se pueden interpretar como desplazamientos mutuos con los apoyos inmóviles eliminados. Es decir, que las notaciones admitidas son válidas para todas las secciones del sistema.

Aprovechando el principio de superposición desarrollamos las expresiones de los desplazamientos $\delta_{i[X_1,\ X_2,\ \ldots\ P]}$:

$$\delta_{1\,[X_1,\ X_2,\ \ldots,\ P]}=\delta_{1X_1}+\delta_{1X_2}+\delta_{1X_3}+\delta_{1X_4}+\delta_{1X_5}+ \\ +\delta_{1X_6}+\delta_{1X_7}+\delta_{1P}=0;$$

$$\delta_{2\,[X_1,\ X_2\ \ldots,\ P]}=\delta_{2X_1}+\delta_{2X_2}+\delta_{2X_3}+\delta_{2X_4}+\delta_{2X_5}+ \\ +\delta_{2X_6}+\delta_{2X_7}+\delta_{2P}=0.$$

De manera análoga planteamos las cinco ecuaciones restantes, donde cada uno de los sumandos δ_{iX_k} que figuran en la ecuación representa el desplazamiento en la dirección de la fuerza cuyo primer subíndice coincide con el primero del sumando originado por la fuerza que figura en el segundo subíndice. Puesto que cada desplazamiento es proporcional a la fuerza correspondiente, δ_{iX_k} se puede escribir de la siguiente manera,

$$\delta_{iX_k}=\delta_{ik}X_k \tag{6.1}$$

En lo que se refiere a los desplazamientos δ_{1P}, δ_{2P}, etc., entenderemos por el subíndice P no solamente la fuerza exterior P, sino, en general, todo el sistema de fuerzas exteriores que puede ser arbitrario. Por lo tanto δ_{1P}, δ_{2P}, . . . figurarán en las ecuaciones sin variación alguna. Ahora las ecuaciones serán,

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4+\delta_{15}X_5+ \\
\qquad +\delta_{16}X_6+\delta_{17}X_7+\delta_{1P}=0, \\
\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4+\delta_{25}X_5+ \\
\qquad +\delta_{26}X_6+\delta_{27}X_7+\delta_{2P}=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_{71}X_1+\delta_{72}X_2+\delta_{73}X_3+\delta_{74}X_4+\delta_{75}X_5+ \\
\qquad +\delta_{76}X_6+\delta_{77}X_7+\delta_{7P}=0.
\end{array}\right\} \tag{6.2}$$

Estas ecuaciones son definitivas y se denominan *ecuaciones canónicas del método de las fuerzas.* El número de ecuaciones coincide con el grado de hiperestaticidad del sistema. En algunos casos, como veremos en adelante, cuando existe la posibilidad de indicar los valores de algunas incógnitas, el número de ecuaciones del sistema se reduce. Queda por aclarar lo que representan los coeficientes δ_{ik} y como se deben determinar. Para ello volvamos a la expresión (6.1). Cuando $X_k=1$ resulta,

$$\delta_{iX_k}=\delta_{ik}.$$

Es decir que el coeficiente δ_{ik} es el desplazamiento en dirección al factor de fuerza i originado por el factor unitario que sustituye al factor k. Por ejemplo, el coeficiente δ_{31} de la ecuación (6.2) representa el desplazamiento mutuo horizontal de los puntos B y C que aparecería en el pórtico, si a éste se aplicase, en lugar de todas las fuerzas,

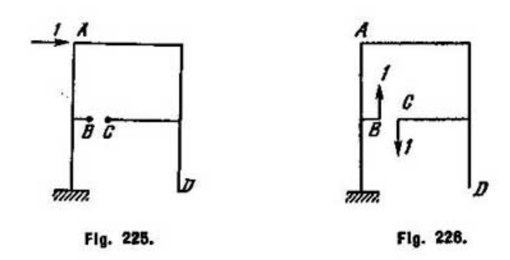


Fig. 225. Fig. 226.

solamente la fuerza unitaria en el punto A (fig. 225). Si, por ejemplo, en lugar de las fuerzas X_2 se aplican las fuerzas unitarias retirando todas las fuerzas restantes (fig. 226), entonces δ_{72} será el ángulo de giro de la sección D originado por estas fuerzas y δ_{12}, el desplazamiento horizontal del punto A, etc.

Es muy importante señalar que en la conclusión anterior no se fija, *a priori*, como se desarrollan los desplazamientos δ_{ik}. Aunque analizamos un pórtico que trabaja a flexión, todo lo expuesto se puede extender también, en general, a cualquier sistema que trabaje a torsión, tracción y flexión o a todo esto simultáneamente.

Analicemos las integrales de Mohr (5.8) (véase § 39). Para determinar δ_{ik} es necesario en lugar de las fuerzas exteriores aplicar la fuerza unitaria que sustituye al factor k. Por lo tanto, los momentos y fuerzas interiores M_{tP}, M_{xP}, M_{yP}, N_P, Q_{xP} y Q_{yP} en la expresión (5.8) se sustituyen por M_{tk}, M_{xk}, M_{yk}, N_k, Q_{xk} y Q_{yk} que se interpretan como los momentos y fuerzas interiores originados por el factor

unitario k. Como resultado obtendremos,

$$\delta_{ik}=\int_l \frac{M_{tk}M_{ti}\,dz}{GI_t}+\int_l \frac{M_{xk}M_{xi}\,dz}{EI_x}+\int_l \frac{M_{yk}M_{yi}\,dz}{EI_y}+$$
$$+\int_l \frac{N_kN_i dz}{EF}+\int_l \frac{k_xQ_{xk}Q_{xi}\,dz}{GF}+\int_l \frac{k_yQ_{yk}Q_{yi}dz}{GF}, \qquad (6.3)$$

siendo M_{ti}, M_{xi}, . . . , los momentos y fuerzas interiores que origina el factor unitario i. Así pues, los coeficientes δ_{ik} se obtienen multiplicando los factores interiores unitarios i y k. Los subíndices i y k indican los factores que se deben multiplicar en las integrales de Mohr. Si el pórtico está constituido por tramos rectos y se puede emplear el método de Vereschaguin, entonces δ_{ik} representa el producto de los diagramas unitarios i por los diagramas unitarios k.

Está claro que,

$$\delta_{ik}=\delta_{ki}.$$

Esto, por una parte, se deduce directamente de (6.3) y, por otra, del teorema de reciprocidad de los desplazamientos (véase § 42) puesto que los desplazamientos δ_{ik} y δ_{ki} son consecuencia de una misma fuerza igual a la unidad.

Las magnitudes δ_{ip} que figuran en las ecuaciones canónicas constituyen los desplazamientos en las direcciones 1, 2, . . . debidos a las fuerzas exteriores dadas, aplicadas al sistema base. Se determinan multiplicando los diagramas de las fuerzas dadas por los diagramas unitarios correspondientes.

Recordamos otra vez, que en la mayoría de los casos, los desplazamientos relacionados con la flexión y torsión de los elementos del pórtico son muy superiores a los desplazamientos de la tracción y distorsión. Por eso, en la expresión (6.3), se prescinde de las tres últimas integrales (véase el § 37).

Ejemplo 6.1. Calcular el pórtico hiperestático de la figura 227 y construir el diagrama de los elementos flectores.

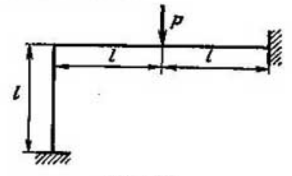


Fig. 227.

El grado de hiperestaticidad es tres. Escogemos el sistema base y, para ello eliminamos el empotramiento de la izquierda. La acción del empotramiento la sustituimos por dos fuerzas X_1 y X_2 y un momento X_3 (fig. 228). Las ecuaciones

canónicas (6.2) en este caso son las siguientes,

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3&=-\delta_{1P},\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3&=-\delta_{2P},\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3&=-\delta_{3P}.\end{aligned}\right\}$$

Los desplazamientos se deben esencialmente a la flexión y, por lo tanto, prescindimos de la distorsión y compresión. Construimos los diagramas unitarios de los momentos flectores correspondientes a la fuerza dada P y a los tres factores de fuerza unitarios (fig. 228).

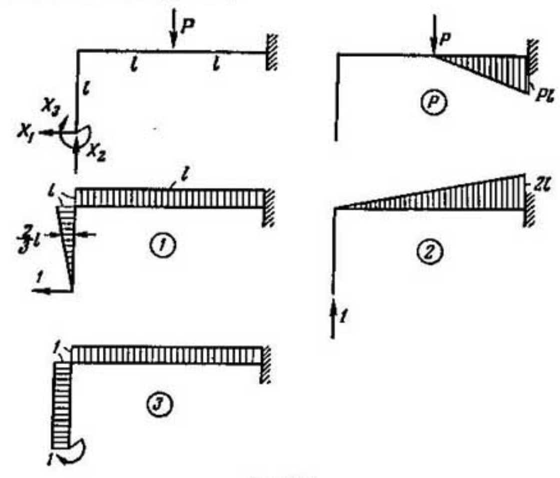


Fig. 228.

Determinamos los coeficientes de las ecuaciones considerando que la rigidez a la flexión de todos los tramos del pórtico es constante y es igual a EI. La magnitud δ_{11} se obtiene multiplicando el primer diagrama unitario por sí mismo. En cada tramo se coge, pues, el área del diagrama y se multiplica por la ordenada de este mismo diagrama que pasa por el centro de gravedad del diagrama,

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{l^2}{2}\cdot\frac{2}{3}\,l+2l^2\cdot l\right)=\frac{7l^3}{3EI}.$$

Observemos que las magnitudes δ_{ik}, cuando $i=k$ son siempre positivas, puesto que las áreas de los diagramas y las ordenadas tienen el mismo signo.

Determinamos después los coeficientes restantes de las ecuaciones canónicas, multiplicando los diagramas correspondientes,

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{2l^3}{EI},\quad \delta_{13}=\delta_{31}=\frac{5l^2}{2EI},\quad \delta_{22}=\frac{8l^3}{3EI},$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\frac{2l^2}{EI},\quad \delta_{33}=\frac{3l}{EI},\quad \delta_{1P}=-\frac{Pl^3}{2EI},$$

$$\delta_{2P}=-\frac{5Pl^3}{6EI},\quad \delta_{3P}=-\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Introducimos estos valores en las ecuaciones canónicas. Después de ciertas simplificaciones obtendremos,

$$\frac{7}{3} lX_1+2lX_2+\frac{5}{2} X_3=\frac{Pl}{2},$$
$$2lX_1+\frac{8}{3} lX_2+2X_3=\frac{5Pl}{6},$$
$$\frac{5}{2} lX_1+2lX_2+3X_3=\frac{Pl}{2}.$$

Resolviendo estas ecuaciones hallaremos,

$$X_1=-\frac{1}{4}P, \quad X_2=\frac{7}{16}P, \quad X_3=\frac{1}{12}Pl.$$

El cálculo de las incógnitas finaliza con esto.

El diagrama de los momentos flectores se puede obtener como la suma de los diagramas de los momentos de las fuerzas dadas y los tres diagramas unitarios multiplicados por X_1, X_2 y X_3. El diagrama definitivo de los momentos flectores se da en la figura 229. Allí se representa también la línea elástica del pórtico.

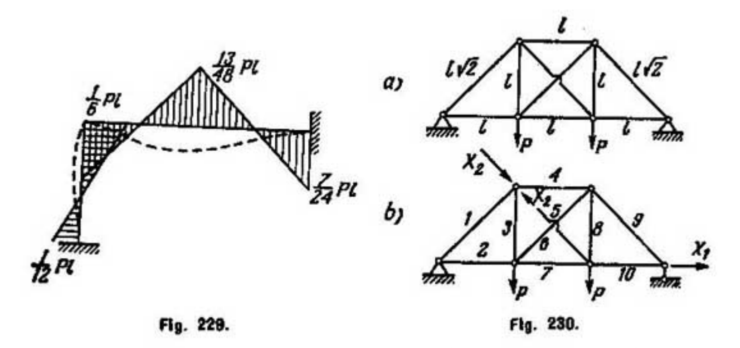


Fig. 229. Fig. 230.

Ejemplo 6.2. Determinar los esfuerzos en las barras de la armadura hiperestática de la figura 230, *a*. La rigidez *EF* se considera igual para todas las barras. Las longitudes de los elementos son l ó $l\sqrt{2}$, de acuerdo con el esquema.

El grado de hiperestaticidad de la armadura es dos: un grado de hiperestaticidad exterior y otro, de hiperestaticidad interior. El sistema base se obtiene, sustituyendo el apoyo articulado derecho por un rodillo y seccionando la barra 5 (fig. 230, *b*). Las ecuaciones canónicas serán,

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=-\delta_{1P},$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=-\delta_{2P}.$$

Calculamos ahora los coeficientes de estas ecuaciones. Las barras trabajan a tracción y compresión y, por lo tanto, los desplazamientos δ_{ik} dependerán de las fuerzas normales que aparecen en las barras. Puesto que a lo largo de cada barra, la fuerza normal no varía, resulta innecesaria la construcción de los diagramas y nos limitamos a confeccionar la tabla de los esfuerzos en las barras, se-

gún sus números, originados por las fuerzas P y las fuerzas unitarias primera y segunda. La determinación de las fuerzas la llevamos a cabo mediante las condiciones de equilibrio de los nudos. Teniendo en cuenta que los coeficientes,

$$\delta_{ik}=\int_0^l \frac{N_i N_k \, dx}{EF}=\frac{N_i N_k l}{EF},$$

calculamos los valores de los productos $N_i N_k l$ y ubicamos los resultados en la misma tabla.

Tabla 6

Nº	l	N_P	N_1	N_2	$N_1^2 l$	$N_2^2 l$	$N_1N_2 l$	$N_PN_1 l$	$N_PN_2 l$	N
1	$l\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-P\sqrt{2}$
2	l	P	1	0	l	0	0	Pl	0	$P\frac{1}{11+12\sqrt{2}}$
3	l	P	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}l$	0	0	$-P\frac{\sqrt{2}}{2}l$	$P\frac{8+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
4	l	$-P$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}l$	0	0	$P\frac{\sqrt{2}}{2}l$	$-P\frac{14+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
5	$l\sqrt{2}$	0	0	1	0	$l\sqrt{2}$	0	0	0	$P\frac{3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
6	$l\sqrt{2}$	0	0	1	0	$l\sqrt{2}$	0	0	0	$P\frac{3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
7	l	P	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	l	$\frac{1}{2}l$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}l$	Pl	$-P\frac{\sqrt{2}}{2}l$	$-P\frac{2}{11+12\sqrt{2}}$
8	l	P	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}l$	0	0	$-P\frac{\sqrt{2}}{2}l$	$P\frac{8+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
9	$l\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-P\sqrt{2}$
10	l	P	1	0	l	0	0	Pl	0	$P\frac{1}{11+12\sqrt{2}}$

Sumando después las columnas obtendremos.

$$\delta_{11}=\frac{1}{EF}\sum_1^{10} N_1^2 l=\frac{3l}{EF}, \quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EF}\sum_1^{10} N_1 N_2 l=-\frac{\sqrt{2}\,l}{2EF},$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EF}\sum_1^{10} N_2^2 l=\frac{(2+2\sqrt{2})\,l}{EF}, \quad \delta_{1P}=\frac{1}{EF}\sum_1^{10} N_P N_1 l=\frac{3Pl}{EF},$$

$$\delta_{2P}=\frac{1}{EF}\sum_1^{10} N_P N_2 \, l=-\frac{\sqrt{2}\,Pl}{EF}.$$

Las ecuaciones canónicas serán entonces,

$$3X_1-\frac{\sqrt{2}}{2}X_2=-3P, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}X_1+2(1+\sqrt{2})X_2=\sqrt{2}P,$$

de donde hallamos,

$$X_1=-\frac{10+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}P, \quad X_2=\frac{3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}P.$$

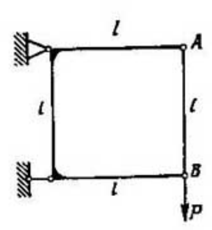


Fig. 231.

Para determinar ahora los esfuerzos N en todas las barras, es necesario sumar a N_P las fuerzas N_1 y N_2 multiplicadas por X_1 y X_2 respectivamente. Los resultados de esta operación están dados en la última columna de la tabla.

Ejemplo 6.3. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico de la figura 231. Los puntos A y B del pórtico están unidos por una barra elástica de rigidez a la tracción E_0F_0. El grado de hiperestaticidad del sistema es igual a uno. Cortamos la barra AB en su punto superior y obtenemos así el sistema base (fig. 232, *a*). Construimos después el diagrama de los momentos correspondiente a la fuerza P dada y a la fuerza unitaria (fig. 232, *b* y *c*). En el tramo AB donde es necesario considerar la influencia de la tracción, construimos también el diagrama de la fuerza normal N_1. Calculamos ahora los coeficientes de la ecuación canónica, $\delta_{11}X_1+\delta_{1P}=0$, multiplicando no solamente los diagramas de los momentos flectores, sino también el diagrama de la fuerza de tracción,

$$\delta_{11}=\frac{5l^3}{3EI}+\frac{l}{E_0F_0}, \quad \delta_{1P}=-\frac{5Pl^3}{6EI}.$$

Determinamos X_1,

$$X_1=-\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{P}{2}\,\frac{1}{1+\frac{3EI}{5E_0F_0l^2}}.$$

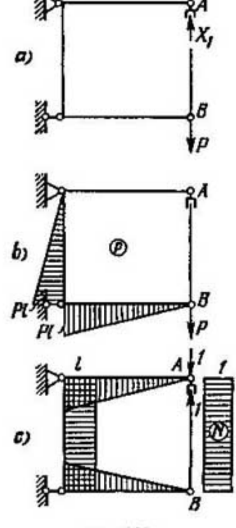


Fig. 232.

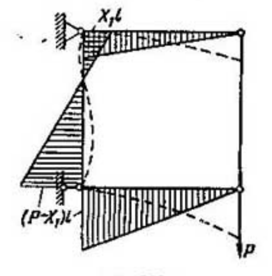


Fig. 233.

Como se ve, el esfuerzo en la barra depende de la relación entre la rigidez del pórtico a la flexión y la rigidez de la barra AB a la tracción. Si la barra AB es muy rígida entonces $X_1=\frac{P}{2}$ y la barra absorberá la mitad de la fuerza P. Si la barra AB es, al revés, muy deformable, entonces $X_1 \to 0$ y la fuerza P será absorbida totalmente por el pórtico.

En la figura 233 está representado el diagrama de los momentos flectores en el pórtico y la configuración de su línea elástica.

§ 46. Aprovechamiento de las propiedades de simetría en los cálculos de sistemas hiperestáticos

Supongamos dado un pórtico geométricamente simétrico (fig. 234). Su parte derecha se puede interpretar como la imagen sobre un espejo de la parte izquierda respecto al plano de simetría. Al calcular estos sistemas resulta posible simplificar la solución del problema, reduciendo el número de factores de fuerza desconocidos X_1, X_2, . . . , X_n.

Veamos el caso de solicitación del pórtico por cargas simétrica y antisimétrica. Se entiende por carga simétrica aquella, para la cual

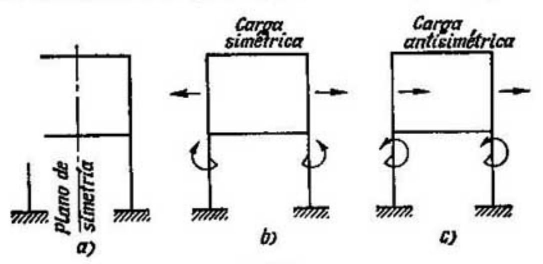


Fig. 234.

todas las cargas exteriores aplicadas en la parte derecha del pórtico, coinciden con la imagen de las fuerzas aplicadas a la parte izquierda (fig. 234, *b*). Por carga antisimétrica se sobreentiende aquella, para la cual las fuerzas aplicadas a la parte derecha del pórtico son también la imagen de las fuerzas aplicadas a la parte izquierda, pero de signo contrario (fig. 234, *c*).

De manera análoga se clasifican los factores de fuerza interiores. Veamos para ello una sección arbitraria del pórtico, en la cual aparecen seis factores de fuerza. En los planos de la derecha y de la izquierda de la sección (fig. 235) actúan fuerzas y momentos iguales. Analicemos cuáles de estos seis factores de fuerza son la imágen respecto al plano de la sección. Resultan ser tres: dos momentos flectores y la fuerza normal. Los llamaremos factores interiores *simétricos*. El momento torsor y las dos fuerzas cortantes, según la terminología admitida,

serán factores de fuerza *antisimétricos*. Cada uno de ellos es de signo opuesto a la imágen del factor mutuo. Sin dificultad se demuestra ahora lo siguiente.

En el pórtico simétrico, en el plano de simetría, los factores de fuerza antisimétricos correspondientes a la carga exterior simétrica son iguales a cero, mientras que en el caso de una carga antisimétrica exterior serán iguales a cero los factores de fuerza simétricos.

Veamos el pórtico simétrico de la figura 234, y escojamos el sistema base cortando el pórtico por el plano de simetría (fig. 236). Sean X_1

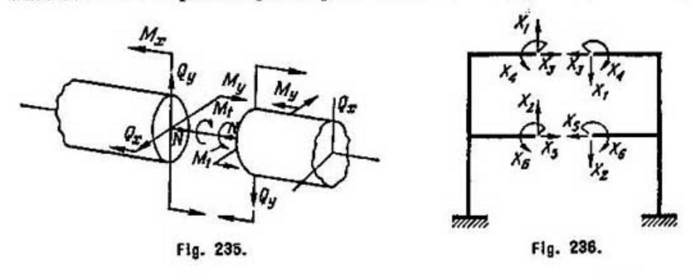


Fig. 235.

Fig. 236.

y X_2 los factores de fuerza antisimétricos y X_3, X_4, X_5 y X_6 los simétricos. El sistema de ecuaciones canónicas en este caso estará compuesto por seis ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4+\delta_{15}X_5+\delta_{16}X_6&=-\delta_{1P},\\
\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4+\delta_{25}X_5+\delta_{26}X_6&=-\delta_{2P},\\
\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\delta_{35}X_5+\delta_{36}X_6&=-\delta_{3P},\\
\delta_{41}X_1+\delta_{42}X_2+\delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\delta_{45}X_5+\delta_{46}X_6&=-\delta_{4P},\\
\delta_{51}X_1+\delta_{52}X_2+\delta_{53}X_3+\delta_{54}X_4+\delta_{55}X_5+\delta_{56}X_6&=-\delta_{5P},\\
\delta_{61}X_1+\delta_{62}X_2+\delta_{63}X_3+\delta_{64}X_4+\delta_{65}X_5+\delta_{66}X_6&=-\delta_{6P}.
\end{aligned}$$

Observemos que en estas ecuaciones muchos de los coeficientes serán iguales a cero. Serán nulos los coeficientes que tienen un subíndice correspondiente al factor simétrico y otro, al factor antisimétrico. Por ejemplo, será igual a cero el coeficiente δ_{13}, puesto que el subíndice 1 corresponde al factor antisimétrico (X_1 y X_2 son factores antisimétricos) y el subíndice 3, al factor simétrico (X_3, X_4, X_5 y X_6 son factores simétricos). Son nulos también los coeficientes δ_{14}, δ_{15}, δ_{16}, δ_{23}, δ_{24}, etc.

Esto ocurre porque en el pórtico simétrico no existen desplazamientos mutuos antisimétricos cuando actúan cargas simétricas. De la misma forma, cuando actúan factores de fuerza antisimétricos tampoco aparecerán desplazamientos simétricos. Esto resulta más claro aún si tenemos en cuenta que en el sistema dado el diagrama de los

momentos flectores correspondiente a factores antisimétricos será también antisimétrico (fig. 237) y el diagrama correspondiente a los factores simétricos, será también simétrico. Al multiplicar estos diagramas, obtendremos como resultado, cero, mientras que al multiplicar un diagrama antisimétrico por otro antisimétrico o uno simétrico por otro simétrico, también, obtendremos un resultado diferente de cero.

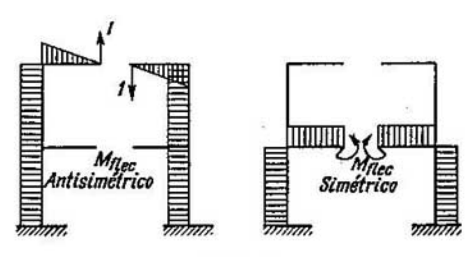


Fig. 237.

Eliminando pues del sistema de ecuaciones los coeficientes que son iguales a cero, obtendremos el sistema siguiente,

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=-\delta_{1P}$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=-\delta_{2P}$$
$$\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\delta_{35}X_5+\delta_{36}X_6=-\delta_{3P},$$
$$\delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\delta_{45}X_5+\delta_{46}X_6=-\delta_{4P},$$
$$\delta_{53}X_3+\delta_{54}X_4+\delta_{55}X_5+\delta_{56}X_6=-\delta_{5P},$$
$$\delta_{63}X_3+\delta_{64}X_4+\delta_{65}X_5+\delta_{66}X_6=-\delta_{6P}.$$

Como vemos, el sistema de ecuaciones se ha descompuesto en dos sistemas independientes.

Supongamos ahora que la carga exterior es simétrica. De lo anterior se deduce que $\delta_{1P}=\delta_{2P}=0$. El primer sistema de ecuaciones resulta ser homogéneo y por lo tanto,

$$X_1=0; \quad X_2=0.$$

Es decir, cuando la carga es simétrica los factores de fuerza antisimétricos ubicados en el plano de simetría son iguales a cero.

En el caso de una carga antisimétrica $\delta_{3P}=\delta_{4P}=\delta_{5P}=\delta_{6P}=0$ y entonces,

$$X_3=0, \quad X_4=0, \quad X_5=0, \quad X_6=0.$$

En este caso, en el plano de simetría se convierten en cero los factores de fuerza simétricos.

Lo dicho se extiende, claro está, no sólo a los pórticos planos, sino también a los pórticos estéreos independientemente del grado de hiperestaticidad.

Si la carga que se aplica al pórtico simétrico no tiene la propiedad de simetría o de antisimetría, siempre existirá la posibilidad de descomponerla en carga simétrica y antisimétrica, como viene indicado,

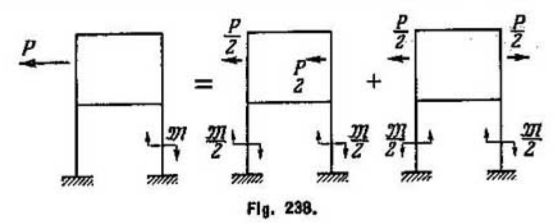


Fig. 238.

por ejemplo, en la figura 238. El problema se descompone pues en dos. Se analizan independientemente dos casos: el de la carga simétrica y el de la carga antisimétrica. Los factores de fuerza interiores del pórtico se obtienen después, sumando estas dos soluciones.

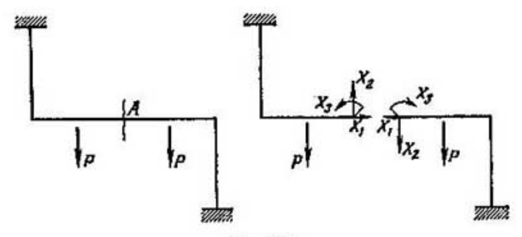


Fig. 239.

Si el pórtico es, como se dice, geométricamente antisimétrico (fig. 239), también se puede, comparando los diagramas correspondientes a las dos partes, obtener ciertas simplificaciones en el sistema de ecuaciones canónicas. Es fácil, por ejemplo, establecer por este método que en el caso del pórtico de la figura 239 y para el sistema base dado

$$\delta_{13}=0, \quad \delta_{23}=0, \quad \delta_{1P}=0, \quad \delta_{2P}=0.$$

Las ecuaciones serán pues,

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0;$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0;$$
$$\delta_{33}X_3+\delta_{3P}=0.$$

Es decir, en la sección A surge solamente un momento flector, mientras que las fuerzas normal y cortante son iguales a cero.

Ejemplo 6.4. Calcular la hiperestaticidad y construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico de la figura 240.

El pórtico es simétrico y está solicitado por fuerzas situadas antisimétricamente. Seccionamos el pórtico por el eje de simetría y aplicamos en esta sección las fuerzas X_1 (fig. 241). Los factores de fuerza simétricos son, como se sabe, iguales a cero.

En lugar de tres ecuaciones se obtiene solamente una

$$\delta_{11}X_1+\delta_{1P}=0,$$

siendo

$$\delta_{11}=\frac{7l^3}{12EI}, \quad \delta_{1P}=-\frac{Pl^3}{4EI}.$$

De aquí se obtiene

$$X_1=\frac{3}{7}P.$$

El diagrama de los momentos flectores y la configuración de la línea elástica del pórtico se dan en la figura 242.

Ejemplo 6.5. Determinar el momento flector máximo en el pórtico anular solicitado por dos fuerzas P (fig. 243).

El grado de hiperestaticidad del pórtico es tres, pero la simetría permite reducir el número de incógnitas a uno. Seccionamos el pórtico por el diámetro vertical AB (fig. 244, *a*), es decir, por el eje de simetría. En las secciones A y B las fuerzas cortantes son iguales a cero. Como el pórtico es al mismo tiempo simétrico respecto a la línea de acción de las fuerzas,

$$N_A=N_B=\frac{P}{2} \quad \text{y} \quad M_A=M_B.$$

Designemos el momento por X_1. Como resultado obtendremos el sistema equivalente representado en la figura 244, *b*.

En la sección de coordenada angular φ el momento de las fuerzas dadas P será,

$$M_P=\frac{PR}{2}(1-\cos\varphi).$$

El momento del factor de fuerza unitario es $M_1=-1$.

Determinamos los coeficientes de la ecuación canónica

$$\delta_{11}=\int_0^{\pi/2}\frac{M_1^2R\,d\varphi}{EI}=\frac{\pi R}{2EI},$$

$$\delta_{1P}=\int_0^{\pi/2}\frac{M_PM_1R\,d\varphi}{EI}=-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Entonces obtendremos,

$$X_1=-\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}=PR\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right).$$

El momento flector en una sección arbitraria es igual a la suma algebraica del momento de las fuerzas dadas M_P y del momento M_1 multiplicado por X_1. Por fin obtendremos,

$$M_{\text{flec}}=M_P-X_1=PR\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

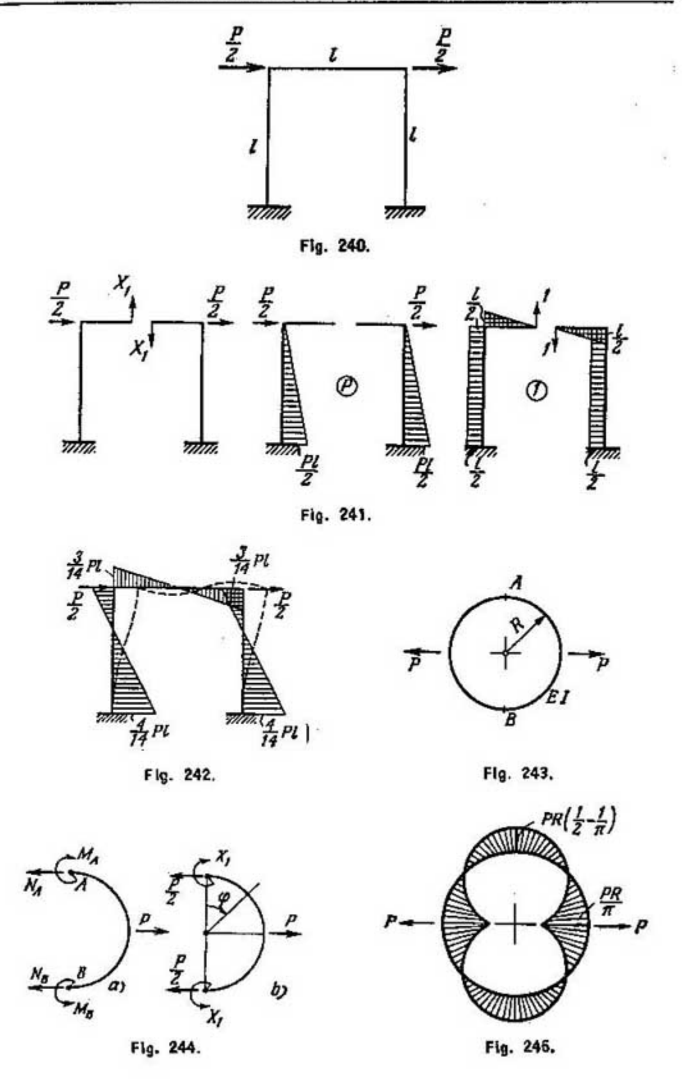


Fig. 240.

Fig. 241.

Fig. 242.

Fig. 243.

Fig. 244.

Fig. 245.

Según esta expresión se construye el diagrama del momento flector en el cuadrante en cuestión de la circunferencia y se extiende después, basándose en la simetría del sistema, a toda la circunferencia (fig. 245). El momento flector máximo surge en los puntos de aplicación de las fuerzas P y es $\frac{PK}{\pi}$.

Ejemplo 6.6. Calcular el pórtico hiperestático de la figura 246 y construir el diagrama de los momentos.

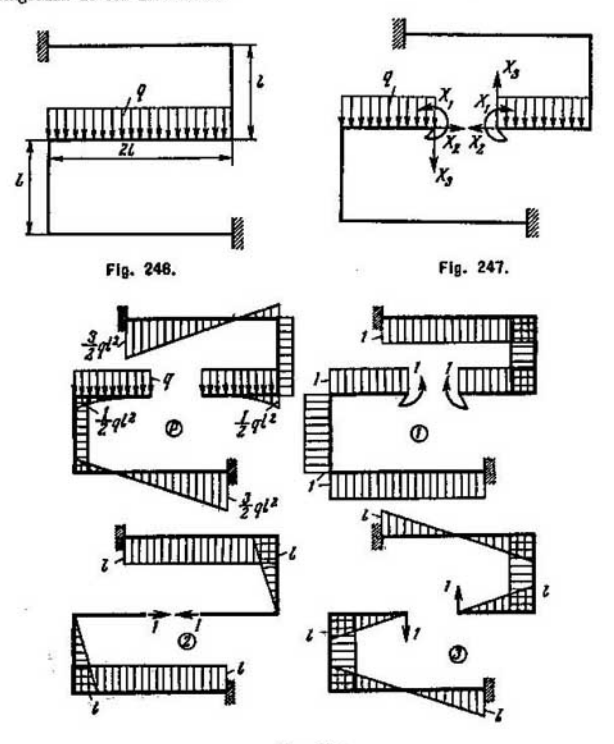


Fig. 246. Fig. 247.

Fig. 248.

El pórtico es geométricamente antisimétrico. Lo seccionamos por el centro de simetría y aplicamos a la sección tres factores de fuerza, por ahora desconocidos (fig. 247). Construimos los cuatro diagramas de los momentos flectores (uno corresponde a las fuerzas dadas y tres a los factores de fuerza unitarios). Analizando los diagramas (fig. 248) nos convencemos de que

$$\delta_{2P}=\delta_{3P}=\delta_{12}=\delta_{13}=0.$$

Es decir, el sistema de tres ecuaciones canónicas resulta,

$$\delta_{11}X_1 = -\delta_{1P};$$
$$\delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0;$$
$$\delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0;$$

de donde se obtiene, $X_2 = X_3 = 0$.

Hallando los productos de los diagramas obtendremos,

$$\delta_{11} = \frac{8l}{EI}, \quad \delta_{1P} = \frac{2ql^3}{3EI}$$

y, por lo tanto,

$$X_1 = -\frac{ql^2}{12}.$$

El diagrama total de los momentos flectores se da en la figura 249.

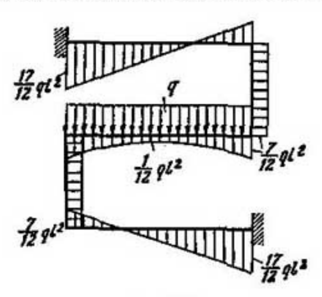


Fig. 249.

§ 47. Vigas continuas. Ecuación de los tres momentos

En el diseño de las estructuras de las construcciones y los puentes nos encontramos con la necesidad de calcular la resistencia de vigas continuas hiperestáticas. El esquema de cálculo de esta viga está representada en la figura 250. Según sea el número de apoyos adicionales, el grado de hiperestaticidad del sistema puede ser uno, dos, tres, . . . , m.

Para calcular esta viga resulta muy cómodo partir del sistema base que se obtiene, introduciendo articulaciones en los apoyos y aplicando los momentos $X_1, X_2, \ldots, X_m$ que sustituyen la ligadura eliminada entre los vanos vecinos (fig. 251). Consideramos positivos los momentos representados en la figura 251.

Veamos cómo se transforma la ecuación n del sistema de ecuaciones canónicas en el caso de este esquema,

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{n,\,n-1}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n,\,n+1}X_{n+1} + \ldots + \delta_{nP} = 0.$$

Determinamos los coeficientes de esta ecuación. Para ello, construimos los diagramas de los momentos correspondientes a las fuerzas

dadas y a los factores unitarios, en algunos vanos vecinos al vano n (fig. 251). En este caso, los diagramas de los momentos de las cargas dadas se construyen por separado para cada vano y se interpretan éstos como vigas libres de dos apoyos. Igualmente se construyen los

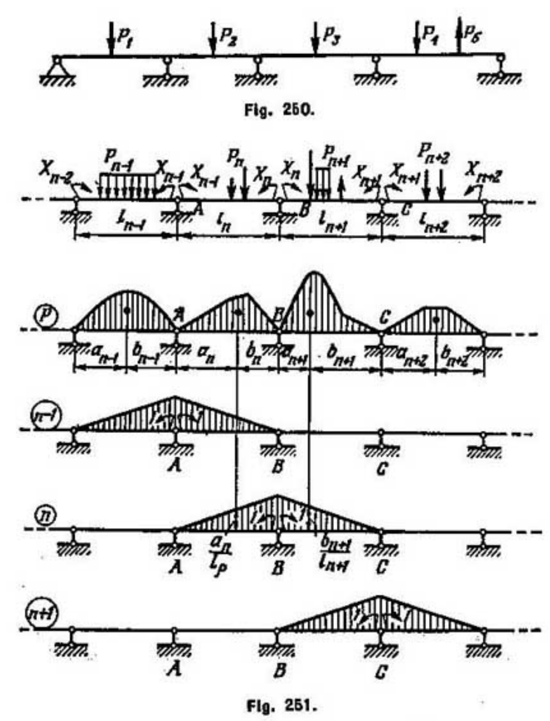


Fig. 250.

Fig. 251.

diagramas de los momentos correspondientes a los momentos unitarios que actúan en los apoyos. Es natural que en la ecuación planteada más arriba se conviertan en cero todos los coeficientes menos δ_{nn-1}, δ_{nn}, δ_{nn+1} y δ_{nP}. En efecto, el momento unitario n origina momentos flectores solamente en los vanos AB y BC. En estos mismos vanos aparecen momentos flectores cuando actúan los momentos unitarios originados por los momentos $n-1$ y $n+1$ y por las fuerzas dadas. De aquí se deduce que todos los productos de los diagramas son iguales a cero, menos aquellos que determinan δ_{nn-1}, δ_{nn}, δ_{nn+1} y δ_{nP}.

Considerando que la rigidez EI de todos los vanos es la misma obtendremos,

$$\delta_{nn-1}=\frac{l_n}{6EI},\quad \delta_{nn}=\frac{1}{3EI}(l_n+l_{n+1}),\qquad \delta_{nn+1}=\frac{l_{n+1}}{6EI},$$

$$\delta_{nP}=\frac{1}{EI}\left[\Omega_n\frac{a_n}{l_n}+\Omega_{n+1}\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}\right],$$

siendo Ω_n y Ω_{n+1} las áreas de los diagramas de los momentos de las fuerzas dadas en los vanos n y $n+1$. La ecuación del método de las fuerzas será,

$$X_{n-1}l_n+2X_n(l_n+l_{n+1})+X_{n+1}l_{n+1}+6\left(\frac{S_n}{l_n}+\frac{S_{n+1}}{l_{n+1}}\right)=0,$$

siendo $S_n=\Omega_n a_n$ y $S_{n+1}=\Omega_{n+1}b_{n+1}$ los momentos estáticos de los diagramas de los momentos de las fuerzas dadas respecto a los puntos A y C respectivamente.

En la ecuación obtenida figuran, como se ve, los parámetros geométricos y los factores de fuerza que se refieren solamente a dos tramos contiguos AB y BC. Esta ecuación expresa que el ángulo de giro mutuo de las dos secciones vecinas de los vanos AB y BC en el apoyo n tiene que ser igual a cero.

Con respecto a este par de vanos, l_n representa la luz del vano izquierdo y l_{n+1}, la del derecho. Designémoslos, para mayor claridad, por l_{iz} y l_d. Anotando los momentos de manera semejante, es decir, $X_{n-1}=M_{iz}$, $X_n=M_{med}$ y $X_{n+1}=M_d$, obtendremos definitivamente para la ecuación,

$$M_{iz}l_{iz}+2M_{med}(l_{iz}+l_d)+M_d l_d+6\left[\frac{S_{iz}}{l_{iz}}+\frac{S_d}{l_d}\right]=0. \qquad (6.4)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de los tres momentos*. El mecanismo del planteamiento de este tipo de ecuaciones para la viga continua está bastante claro. Se analizan consecutivamente todos los pares de vanos contiguos y para cada par de vanos se plantea la ecuación de los tres momentos. El número de pares de vanos es igual al número de apoyos adicionales intermedios. Es decir, que el número de ecuaciones de la viga continua es igual al grado de hiperestaticidad de ésta.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones y después de determinar los momentos, sin dificultad se construye el diagrama de los momentos flectores y se determinan las tensiones en la viga.

Ejemplo 6.7. Calcular la viga continua hiperestática de cuatro vanos de la figura 252 y construir el diagrama de los momentos flectores.

El grado de hiperestaticidad del sistema es tres. Introducimos articulaciones en todos los apoyos intermedios y aplicamos los momentos desconocidos M_1, M_2 y M_3. Construimos ahora los diagramas de los momentos flectores de las fuerzas dadas en los dos primeros vanos (fig. 252, *b*). Estos diagramas son parabólicos. En los otros dos vanos los momentos flectores de las fuerzas dadas son iguales a cero.

Planteamos ahora las ecuaciones para la determinación de los momentos. Veamos primero los vanos AB y BC. En el apoyo A el momento es igual a cero, es decir, $M_{iz}=0$. Al mismo tiempo $M_{med}=M_1$ y $M_d=M_2$. El área del diagrama de los momentos en los dos tramos será,

$$\Omega=\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}l=\frac{ql^3}{12}.$$

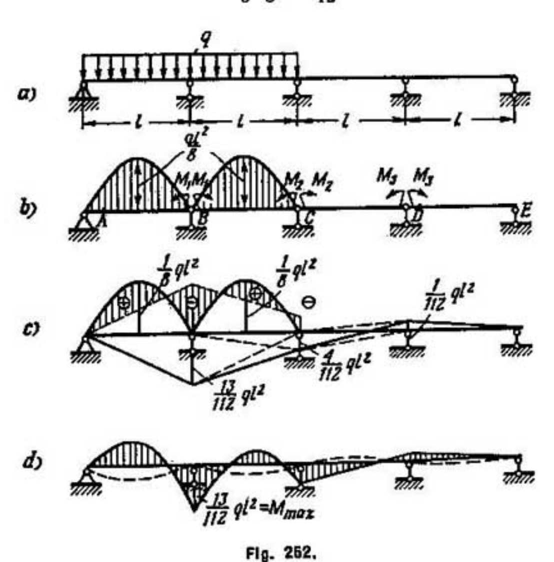


Fig. 252.

El momento estático de estas áreas respecto a los extremos exteriores del par de vanos será el mismo,

$$S_{iz}=S_d=\frac{ql^3}{12}\cdot\frac{l}{2}.$$

Es decir, de la ecuación (6.4) se obtiene,

$$4M_1l+M_2l+6\left(\frac{ql^3}{24}+\frac{ql^3}{24}\right)=0,$$

ó

$$4M_1+M_2=-\frac{ql^2}{2}.$$

Pasamos ahora al par siguiente de vanos: BC y CD. Aquí,

$$M_{iz}=M_1,\quad M_{med}=M_2,\quad M_d=M_3\quad \text{y}\quad S_d=0,$$

y por lo tanto,

$$M_1+4M_2+M_3=-\frac{ql^2}{4}.$$

Por último, en el tercer par de vanos obtendremos,

$$M_2+4M_3=0.$$

Resolviendo las ecuaciones hallaremos,

$$M_1=-\frac{13}{112}ql^2,\quad M_2=-\frac{4}{112}ql^2,\quad M_3=\frac{1}{112}ql^2.$$

Así se vence la hiperestaticidad del sistema. Queda por construir el diagrama de los momentos flectores. Este se obtiene, sumando los diagramas de los momentos flectores de las fuerzas dadas con los diagramas correspondientes a los momentos de apoyo (fig. 252, *c*). Para ello, en el tramo donde se suma la parábola con un trapecio, se superpone el diagrama invertido de los momentos de apoyo sobre la parábola. Los segmentos rayados, así obtenidos, se sitúan después sobre una recta horizontal. En la figura 252, *d* está representado el diagrama de los momentos flectores obtenido de esta manera y la correspondiente línea elástica de la barra.

Si surgiese la necesidad de determinar las reacciones de apoyo, además de los momentos flectores, lo más fácil sería recurrir a las ecuaciones de equilibrio.

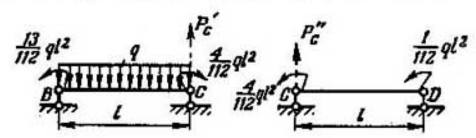


Fig. 253.

Calculemos, por ejemplo, la reacción en el apoyo *C*. Para ello analizamos, por separado, dos vanos contiguos y aplicamos, aparte de la carga propia, también los momentos de apoyo hallados (fig. 253).

Planteamos la suma de los momentos respecto al punto *B* para el tramo izquierdo y hallamos la reacción en el apoyo *C*

$$P'_C l=\frac{ql^2}{2}+\frac{4}{112}ql^2-\frac{13}{112}ql^2,\quad P'_C=\frac{47}{112}ql.$$

De la misma manera planteamos la suma de los momentos respecto al punto *D* para el vano de la derecha y de nuevo hallamos la reacción en el apoyo *C*,

$$P''_C l=\frac{4}{112}ql^2+\frac{1}{112}ql^2,\quad P''_C=\frac{5}{112}ql.$$

Estas son las fuerzas con que los vanos derecho e izquierdo presionan sobre el apoyo *C*. La reacción total será igual a la suma de estas reacciones,

$$P_C=P'_C+P''_C=\frac{52}{112}ql.$$

Ejemplo 6.8. Calcular el sistema hiperestático de la viga de la figura 254, *a*.

El grado de hiperestaticidad es dos. Las particularidades de esta viga consisten en la existencia de un voladizo en la derecha y un empotramiento en la izquierda. Trasladamos la fuerza *P* al punto situado sobre el apoyo derecho y, en lugar del voladizo eliminado, introducimos el momento Pl (fig. 254, *b*). La fuerza *P* aplicada al apoyo *D* influye solamente cuando se determinan las reacciones de apoyo, sin crear momentos flectores.

Sustituimos el empotramiento por dos apoyos situados a una distancia infinitamente pequeña, es decir, introducimos en la parte izquierda un vano de luz $l_1=0$ (fig. 254, *b*).

Esta operación es obvia. Si la línea elástica de la viga pasa por dos puntos cercanos, es decir, por los dos apoyos A y B que se encuentran sobre la misma recta horizontal, (fig. 255), entonces, al disminuir l_1, el ángulo de inclinación de la tangente a la línea elástica cerca del apoyo derecho disminuirá. En el límite será igual a cero. Así pues, al introducir el vano adicional de longitud nula se impone

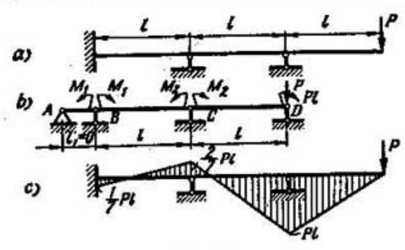


Fig. 254.

una ligadura adicional que impide el giro de la sección izquierda de la barra. Por lo tanto, los dos apoyos situados infinitamente cerca el uno del otro tienen las propiedades de un empotramiento.

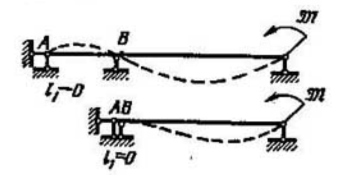


Fig. 255.

Para el par de vanos AB y BC (fig. 254, *b*), la ecuación (6.4) será,

$$2M_1(0+l)+M_2 l=0.$$

Pasamos ahora al segundo par de vanos. El momento de la fuerza dada $-Pl$ se puede interpretar o como momento de apoyo, igual a M_d o como una carga dada exterior. En el segundo caso se debe construir el diagrama de los momentos correspondiente a $-Pl$ y calcular S_d, considerando que $M_d=0$.

Interpretando el momento $-Pl$ como momento de apoyo, obtendremos para la ecuación (6.4),

$$M_1 l+4M_2 l-Pl^2=0.$$

Una vez resuelta esta ecuación conjuntamente con la anterior hallaremos,

$$M_1=-\frac{1}{7}Pl; \quad M_2=+\frac{2}{7}Pl.$$

Construimos después el diagrama de los momentos flectores (fig. 254, *c*)

§ 48. Sistemas planos con cargas perpendiculares al plano y sistemas estéreos

Veamos las particularidades fundamentales de los sistemas geométricamente planos solicitados por cargas que actúan perpendicularmente al plano del pórtico. Algunos ejemplos de este tipo de sistemas se dan en la figura 256.

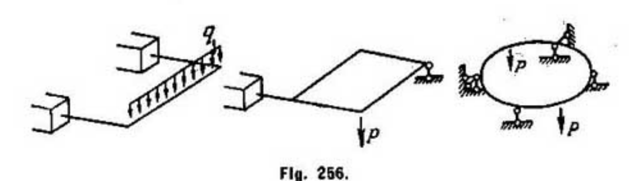


Fig. 256.

La particularidad de estos sistemas consiste en que los factores de fuerza interiores, en todas las secciones transversales del pórtico, que se encuentran en el plano del pórtico son iguales a cero. Se demuestra esto de manera análoga a como se hizo anteriormente al analizar las propiedades de simetría y antisimetría.

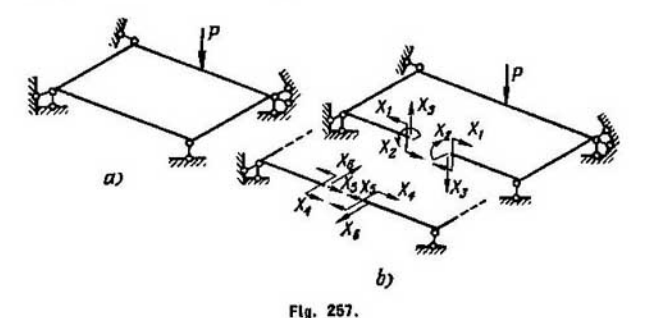


Fig. 257.

Supongamos cierto pórtico de este tipo (fig. 257). Lo seccionamos en un lugar arbitrario convirtiéndolo en isostático. Llamaremos X_1, X_2, X_3 a los factores de fuerza cuyo plano de acción es perpendicular al plano del pórtico. Estos factores son: el momento flector, el momento torsor y la fuerza cortante vertical. Los tres factores de fuerza restantes de la sección X_4, X_5 y X_6 (fig. 257) surgen en el plano del pórtico y están representados, para mayor claridad, aparte.

El sistema de ecuaciones canónicas será,

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4+\delta_{15}X_5+\delta_{16}X_6&=-\delta_{1P},\\
\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4+\delta_{25}X_5+\delta_{26}X_6&=-\delta_{2P},\\
\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\delta_{35}X_5+\delta_{36}X_6&=-\delta_{3P},\\
\delta_{41}X_1+\delta_{42}X_2+\delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\delta_{45}X_5+\delta_{46}X_6&=-\delta_{4P},\\
\delta_{51}X_1+\delta_{52}X_2+\delta_{53}X_3+\delta_{54}X_4+\delta_{55}X_5+\delta_{56}X_6&=-\delta_{5P},\\
\delta_{61}X_1+\delta_{62}X_2+\delta_{63}X_3+\delta_{64}X_4+\delta_{65}X_5+\delta_{66}X_6&=-\delta_{6P}.
\end{aligned}$$

Este sistema se descompone en dos sistemas independientes, puesto que, al multiplicar los diagramas correspondientes a los tres primeros factores interiores por los diagramas correspondientes a los tres últimos, obtendremos siempre cero,

$$\delta_{14}=\delta_{15}=\delta_{16}=\delta_{24}=\ldots=0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3&=-\delta_{1P},\\
\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3&=-\delta_{2P},\\
\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3&=-\delta_{3P},\\
\delta_{44}X_4+\delta_{45}X_5+\delta_{46}X_6&=-\delta_{4P},\\
\delta_{54}X_4+\delta_{55}X_5+\delta_{56}X_6&=-\delta_{5P},\\
\delta_{64}X_4+\delta_{65}X_5+\delta_{66}X_6&=-\delta_{6P}.
\end{aligned}$$

Si las fuerzas exteriores actúan en el plano del pórtico, es decir, si el pórtico es plano en el sentido común de la palabra, entonces se anularán δ_{1P}, δ_{2P} y δ_{3P} y resultará que los factores de fuerza interiores X_1, X_2 y X_3 serán iguales a cero. Esto quiere decir, que en pórtico plano aparecen solamente los factores interiores que se encuentran en el plano del pórtico.

Si la carga exterior es perpendicular al plano del pórtico entonces serán iguales a cero δ_{4P}, δ_{5P} y δ_{6P} y, por lo tanto, también serán nulos X_4, X_5 y X_6. En el pórtico dado, como vemos, se mantienen los factores de fuerza interiores cuyos planos de acción son perpendiculares al plano del pórtico.

Cuando la carga que actúa sobre el pórtico es combinada (fig. 258), siempre existe la posibilidad de descomponerla por planos y analizar por separado el sistema plano y el sistema plano con cargas perpendiculares a él. Los factores de fuerza interiores se obtienen en adelante como la suma de las soluciones halladas.

Pasemos ahora a los sistemas estéreos hiperestáticos. El estudio de estos sistemas en principio no presenta dificultades. Está claro que el cálculo de estos sistemas hiperestáticos resulta, como regla general, más laborioso que el de los sistemas planos. Sin embargo, las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas son las mismas y la determinación de los coeficientes se lleva a cabo por los mismos procedimientos.

Requiere especial atención, al calcular los pórticos estéreos hiperestáticos, la comprobación de la invariabilidad cinemática del sistema base. Ocurre a veces que el sistema estéreo es un mecanismo, lo que se consigue demostrar solamente después de un análisis minucioso. Así, por ejemplo, los sistemas estéreos con articulaciones

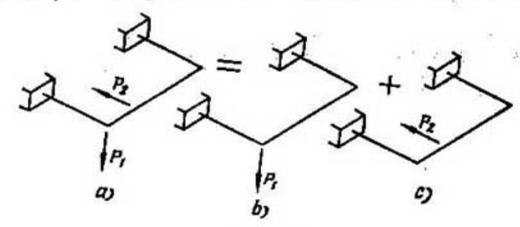


Fig. 258.

estéreas, también, de la figura 259 son cinemáticamente variables. En cada uno de estos casos, las ligaduras impuestas no impiden el giro del sistema alrededor de los ejes representados en la figura 259 por líneas punteadas.

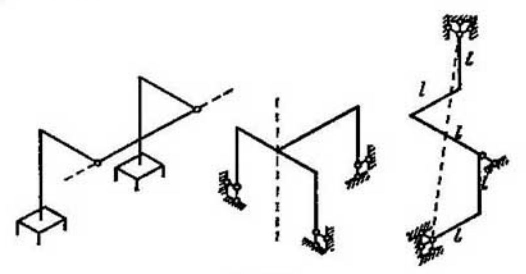


Fig. 259.

La comprobación de la invariabilidad cinemática del sistema estéreo se realiza generalmente por tanteos, es decir, por intentos consecutivos de desplazar mentalmente el pórtico o algunos de sus elementos respecto a ejes inmóviles.

En relación con lo dicho, se debe indicar que la exigencia de la invariabilidad cinemática que se subrayó anteriormente, no siempre, en el caso general, es obligatoria. En algunos casos se puede admitir la variabilidad cinemática del sistema base, pero siempre de acuerdo con las particularidades del sistema de fuerzas aplicado. Así, en el ejemplo 6.5 que se analizó anteriormente, el pórtico anular se seccionó

en dos lugares (véase la figura 244). Las partes del pórtico adquirieron así la posibilidad de desplazarse libremente una respecto a la otra. Sin embargo, la variabilidad cinemática así obtenida resultó sin importancia puesto que el sistema dado de fuerzas exteriores y el sistema de fuerzas unitarias estaban equilibrados independientemente el uno del otro.

Ejemplo 6.9. Calcular el sistema hiperestático del pórtico de la figura 260, *a*. La rigidez de los elementos que lo componen a la flexión es EI y a la torsión, GI_t.

El pórtico es plano con carga perpendicular al plano del pórtico. Por lo tanto, en cualquier sección transversal del pórtico los factores de fuerza que se

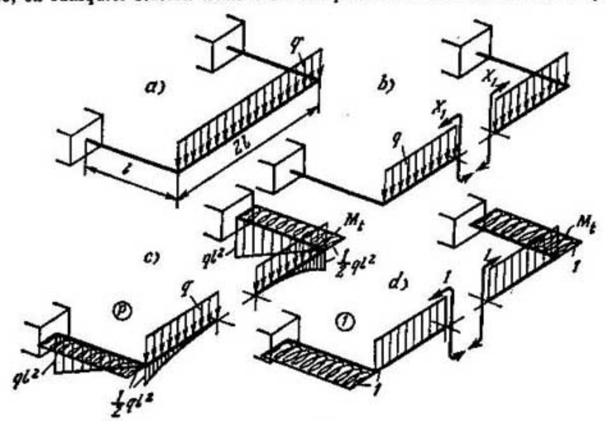


Fig. 260.

encuentran en el plano del pórtico, serán iguales a cero. Puesto que el pórtico es simétrico, en la sección transversal del plano de simetría serán iguales a cero los factores antisimétricos, es decir, el momento torsor y la fuerza cortante vertical. Serán diferentes de cero solamente el momento flector en el plano vertical. Cortamos el pórtico por el plano de simetría y aplicamos el momento X_1 (fig. 260, *b*). Construimos el diagrama de los momentos correspondientes a las fuerzas dadas y al momento unitario y calculamos los coeficientes de la ecuación canónica,

$$\delta_{11}X_1+\delta_{1P}=0.$$

Obtenemos,

$$\delta_{11}=\frac{2l}{EI}+\frac{2l}{GI_t},$$

$$\delta_{1P}=-\frac{ql^3}{3EI}-\frac{ql^3}{GI_t}$$

y entonces,

$$X_1=\frac{ql^2}{6}\,\frac{1+3\dfrac{EI}{GI_t}}{1+\dfrac{EI}{GI_t}}.$$

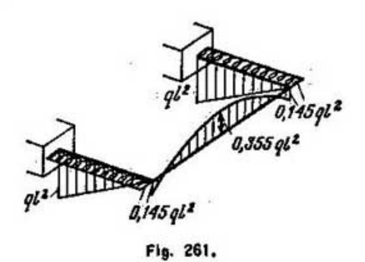


Fig. 261.

Fig. 262.

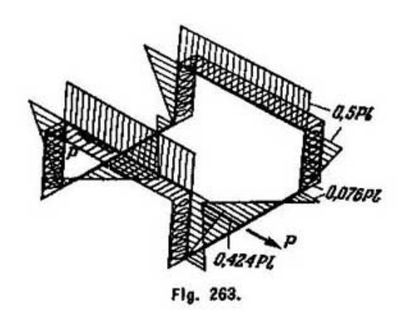


Fig. 263.

Si el pórtico está constituido por barras de sección transversal circular, entonces

$$\frac{EI}{GI_t}=1+\mu\approx 1,3, \quad X_1=0,355\ ql^2.$$

El diagrama definitivo de los momentos flectores se da en la figura 261.

Ejemplo 6.10. Analicemos por fin el pórtico estéreo de la figura 262, *a*. Las rigideces a la flexión EI y a la torsión GI_t son iguales para todos los elementos del pórtico.

El pórtico es simétrico respecto a los planos verticales AB y CD. Seccionamos el pórtico por el primer plano de simetría, obteniendo en las secciones solamente factores de fuerza simétricos (fig. 262, *b*). De la condición de equilibrio se deduce directamente que la fuerza normal en estas secciones es $P/2$ y uno de los momentos, $\frac{Pl}{2}$. Queda por determinar un solo momento X_1 que aparece en el plano horizontal.

Construimos los diagramas de los momentos correspondientes a las fuerzas dadas y al momento unitario solamente en la mitad del pórtico. Multiplicando los diagramas, obtendremos,

$$\delta_{11}=\frac{4l}{EI}+\frac{2l}{GI_t}, \quad \delta_{1P}=-\frac{Pl^2}{2EI},$$

y entonces,

$$X_1=\frac{Pl}{4}\,\frac{1}{2+\frac{EI}{GI_t}}.$$

En el caso de una sección circular $\frac{EI}{GI_t}\approx 1,3$, $X_1\approx 0,076\ Pl$. El diagrama definitivo de los momentos se da en la figura 263.

§ 49. Determinación de los desplazamientos en sistemas hiperestáticos

Como ya sabemos, el desplazamiento en cualquier sistema se determina multiplicando los diagramas de los momentos de las fuerzas exteriores por el diagrama de los momentos de la fuerza unitaria, aplicada al punto cuyo desplazamiento se busca.

En los sistemas hiperestáticos, claro está, para construir el diagrama de los momentos de las fuerzas exteriores es necesario vencer la hiperestaticidad y construir el diagrama definitivo, como esto se hizo muchas veces en los ejemplos que se analizaron anteriormente. Cuando se aplica al sistema hiperestático la fuerza unitaria, de nuevo es necesario vencer la hiperestaticidad del sistema. Así pues, resulta que para determinar el desplazamiento en los sistemas hiperestáticos es necesario calcular dos veces el mismo sistema hiperestático.

Las dificultades que surgen, sin embargo, se vencen fácilmente. Supongamos dado cierto sistema, hiperestático y determinemos el desplazamiento del punto A, por ejemplo, (fig. 264, *a*). Veamos cierto sistema base y apliquemos a éste las fuerzas dadas y los factores de

fuerza desconocidos X_1, X_2 y X_3 (fig. 264, *b*). Una vez vencida la hiperestaticidad del sistema y obtenidas las incógnitas, el pórtico de la figura 264, *b* en nada se diferenciará del dado. Serán iguales los desplazamientos de todos los puntos de los dos pórticos. Por lo tanto, las fuerzas X_1, X_2 y X_3 se pueden considerar como fuerzas dadas.

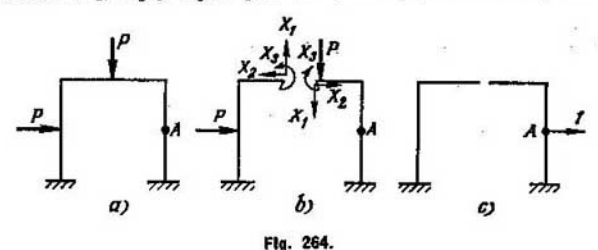


Fig. 264.

El diagrama de los momentos de las fuerzas P, X_1, X_2 y X_3 es el diagrama de los momentos en el pórtico hiperestático y, por lo tanto, ante todo se debe vencer la hiperestaticidad y construir el diagrama definitivo de los momentos. Claro está que el aspecto de este diagrama no depende del sistema base admitido. Se libra después el sistema de

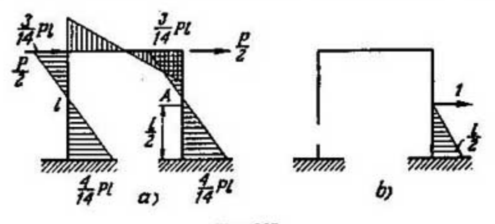


Fig. 265.

las fuerzas exteriores entre las cuales figuran también X_1, X_2 y X_3 y se aplica la fuerza unitaria al pórtico isostático (fig. 264, *c*).

El diagrama unitario obtenido se multiplica por el diagrama definitivo correspondiente a las fuerzas exteriores dadas. Prácticamente, resulta más cómodo multiplicar por separado el diagrama unitario por los diagramas de las fuerzas dadas y por los de los factores de fuerza X_1, X_2 y X_3 y sumar después los resultados algebraicamente. Así se determina el desplazamiento que se busca. No existe, pues, la necesidad de vencer por segunda vez la hiperestaticidad del sistema.

Ejemplo 6.11. Calcular el desplazamiento horizontal del punto A del pórtico de la figura 265, *a*. El diagrama de los momentos flectores en este pórtico ya fue

construido anteriormente, en el ejemplo 6.4. Por lo tanto, consideramos que la primera parte del problema está resuelta, seccionamos el pórtico en cualquier punto y aplicamos, al sistema base obtenido, en el punto A, una fuerza unitaria (fig. 265, b). Multiplicando los diágramas obtendremos,

$$\delta_A=\frac{17}{672}\frac{Pl^3}{EI}.$$

Ejemplo 6.12. Determinar la disminución del diámetro AB del pórtico en forma de anillo (fig. 266, a), al solicitarlo por las fuerzas P. Este sistema hiperes-

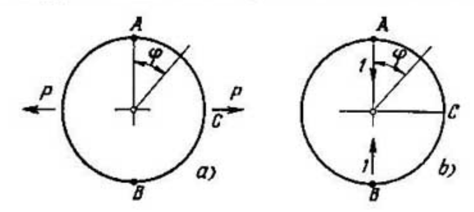


Fig. 266.

tático fue calculado ya anteriormente (ejemplo 6.5). El momento flector en el cuadrante AC del pórtico depende del ángulo φ como sigue,

$$M=PR\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Seccionamos el pórtico en un lugar arbitrario y aplicamos, a los puntos A y B, las fuerzas unitarias dirigidas en sentido opuesto (fig. 266, b). En la sección que se caracteriza por el ángulo φ, $M_1=R$ sen φ. Entonces obtendremos,

$$\delta_{AB}=2\int_0^{\pi/2}\frac{MM_1\,Rd\varphi}{EI}=\frac{PR^3}{EI}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right).$$

Capítulo VII

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LOS ESTADOS TENSIONAL Y DEFORMACIONAL

§ 50. Estado tensional en un punto

Ya en los ejemplos de tracción y distorsión hemos tenido la posibilidad de convencernos de que la tensión en un plano que pasa por un punto determinado del cuerpo en tensión depende de la orientación del plano. Al girar el plano, las tensiones varían en determinadas proporciones. El conjunto de tensiones que surgen en los diversos planos que pasan por el punto que se analiza, se denomina estado tensional en el punto. El estado tensional se puede estudiar no sólo en los casos particulares de tracción y distorsión, sino también en el caso general de solicitación del sólido. Esta cuestión se analizará en este capítulo. El estudio de las leyes de variación de las tensiones en un punto no es un problema puramente abstracto. Este estudio es necesario para la solución posterior de problemas más complejos y, ante todo, para el cálculo de la resistencia en los casos generales de solicitación.

Supongamos, dado cierto sólido (que puede no ser elástico) solicitado por un sistema arbitrario de fuerzas (fig. 267). Al pasar de un

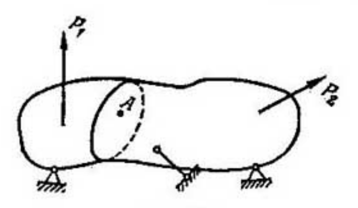


Fig. 267.

punto a otro, el estado tensional varía de manera suficientemente lenta y siempre existe la posibilidad de escoger en la vecindad de un punto cualquiera A (fig. 267) una zona suficientemente pequeña donde se pueda considerar que el estado tensional es homogéneo. Está claro que esto es realizable mientras se parta de la hipótesis de continuidad del material, admitida anteriormente, que permite el paso a volúmenes muy pequeños.

Para caracterizar el estado tensional del punto A, supongamos que por este punto se han trazado tres secciones y que se han determinado las magnitudes de las tensiones que en estas secciones surgen. Separamos después, alrededor del punto en cuestión, mediante seis secciones un volumen elemental formado por un paralelepípedo rectángular (fig. 268). Disminuyendo las dimensiones del paralelepípedo, se reducirá éste al punto dado. En el caso límite todas las caras del

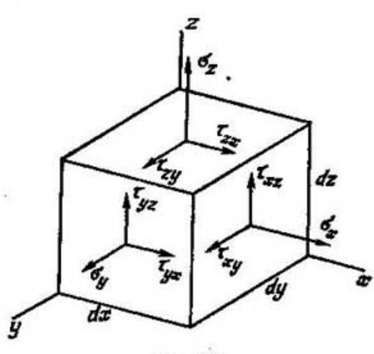


Fig. 268.

paralelepípedo pasarán por el punto A y se podrá considerar que las tensiones en los planos trazados corresponden al punto en cuestión.

La tensión completa que surge en el plano se puede descomponer en tres componentes: una, según la normal al plano, y dos, en el propio plano de la sección. La tensión normal se anotará, como hasta ahora, por σ con el subíndice correspondiente a los ejes x, y y z (fig. 268). La tensión tangencial se anotará por τ con dos subíndices, el primero corresponde al eje que es perpendicular al plano y el segundo, al eje orientado según el vector τ. La dirección de los ejes se considera arbitraria.

Las tensiones normales de tracción σ se consideran positivas y las de compresión, negativas. Dejaremos sin concretizar el signo de τ puesto que en los problemas que más abajo se analizarán, el signo de τ carece de importancia.

Las tensiones que aparecen en las tres caras del elemento (en tres planos ortogonales entre sí que pasan por el punto) están dadas en la figura 268. En las caras que no se ven en el dibujo, aparecen respectivamente las mismas tensiones, pero de dirección contraria.

El sistema de fuerzas aplicado al elemento deberá satisfacer las condiciones de equilibrio. Como en las caras opuestas aparecen fuerzas de signo opuesto, las primeras tres condiciones de equilibrio se

satisfacen idénticamente, resultando iguales a cero las sumas de las proyecciones de todas las fuerzas sobre los ejes x, y y z, independientemente de la magnitud de las tensiones que aparecen. Falta por comprobar si son iguales a cero las sumas de los momentos de todas las fuerzas respecto a los ejes x, y y z. Al plantear las ecuaciones de equilibrio se establece fácilmente que el momento de cada fuerza se equilibra con el momento de la fuerza opuesta que actúa sobre la cara invisible trasera correspondiente, excluyendo las tensiones tangenciales. Por ejemplo, para el eje x, la condición de igualdad a cero de los momentos se satisface, si el momento de la fuerza $\tau_{yz}dx\,dz$ es igual al momento de la fuerza $\tau_{zy}dx\,dy$, es decir,

$$\tau_{yz}\,dx\,dz\cdot dy=\tau_{zy}\,dx\,dy\cdot dz.$$

De manera análoga se puede plantear dos ecuaciones más de equilibrio, obteniendo,

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}. \tag{7.1}$$

Así pues, *en dos planos ortogonales entre sí las componentes de las tensiones tangenciales, perpendiculares a la arista común son iguales y, o las dos van dirigidas hacia la arista, o las dos parten de la arista.* En esto consiste la ley de paridad (reciprocidad) de las tensiones tangenciales en su enunciado general (véase también el § 12). Esta ley es válida para todos los puntos del sólido solicitado, independientemente del tipo de carga que se aplica y de las propiedades del material. De la condición de reciprocidad de las tensiones tangenciales se deduce que en las caras del elemento separado (fig. 266) existen no nueve, sino solamente seis componentes independientes de las tensiones, puesto que las tensiones tangenciales son iguales dos a dos.

El análisis del estado tensional en un punto comienza siempre por la determinación de las tensiones en las caras del elemento escogido alrededor del punto. Por el punto se trazan tres planos ortogonales entre sí cuya orientación puede ser arbitraria, pero que se escoge de manera que las tensiones que aparecen en los planos, sean lo más fácil posible de determinar.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7.1. Obtener el estado tensional en los puntos A y B de la barra traccionada y torsionada simultáneamente (fig. 269, *a*).

En la vecindad de los puntos dados, separamos un volumen elemental con los planos correspondientes. La orientación de los planos se escoge de manera que las tensiones se puedan determinar de la manera más fácil posible. En nuestro caso, es lógico orientar los planos a lo largo del eje de la barra y perpendicularmente a él. En la figura 269, *a* los planos en la vecindad de los puntos A y B se representan por líneas punteadas. Los elementos escogidos se separan del sólido solicitado y se representan a mayor escala, manteniendo la orientación de los planos (fig. 269, *b* y *c*).

Bajo la acción de la fuerza P, en las secciones transversales de la barra, aparece la tensión normal $\sigma=\frac{P}{a^2}$. Los vectores de las tensiones correspondientes se

sitúan sobre las caras de los elementos. Bajo la acción del momento $\mathfrak{M}$, en las secciones transversales y longitudinales aparecen tensiones tangenciales que son: en el punto A, $\tau_{max}=\frac{\mathfrak{M}}{0{,}208a^3}$ y en el punto B, $\tau=0$. Situamos los vectores de τ_{max} sobre las caras del elemento. Definitivamente obtendremos: en el punto A

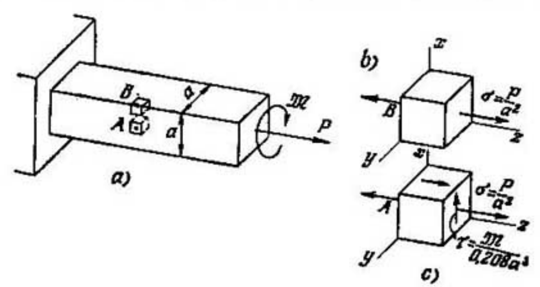


Fig. 269.

$\sigma_x=\sigma_y=0$, $\sigma_z=\frac{P}{a^2}$, $\tau_{yz}=0$, $\tau_{zx}=\frac{\mathfrak{M}}{0{,}208\,a^3}$, $\tau_{xy}=0$ y en el punto B, $\sigma_x=\sigma_y=0$, $\sigma_z=\frac{P}{a_2}$, $\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0$.

§ 51. Determinación de las tensiones en un plano de orientación arbitraria

Las tensiones en un plano cualquiera que pase por el punto dado se pueden obtener cuando se dan las seis componentes del estado tensional σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx} y τ_{xy}, en tres planos ortogonales entre sí.

Separemos otra vez del cuerpo tensionado (fig. 267), en la vecindad del punto A, un volumen elemental en forma de tetraedro y no de paralelepípedo, como se hizo anteriormente (fig. 270). Tres caras de este elemento coinciden con los planos del sistema de coordenadas x, y y z. La cuarta está formada por un plano de orientación arbitraria. Su dirección en el espacio la determinaremos por los cosenos directores de la normal ν, es decir, por l, m y n.

El tetraedro elemental tiene las mismas propiedades que el paralelepípedo que se analizó anteriormente. Al disminuir sus dimensiones se reduce al punto A y, en el límite, todas sus caras pasarán por el punto A. Por lo tanto, las tensiones en las caras del elemento se consideran tensiones en el punto en cuestión, pero aplicadas a planos de diversas orientaciones.

En la figura 270, por líneas punteadas, se representan las componentes de las tensiones sobre las caras ocultas. Proyectamos el vector de la tensión completa en el plano de orientación arbitraria BCD sobre los ejes x, y y z. Anotamos estas proyecciones por X, Y y Z

respectivamente. Si se conocen estas tres magnitudes, se podrán obtener, a través de ellas, las componentes normal y tangenciales correspondientes al plano de orientación arbitraria.

Designamos el área del triángulo BCD por F, el área del triángulo ACD, por F_x, el del triángulo ABD, por F_y y, por último, el del triángulo ABC, por F_z. Está claro que,

$$F_x = Fl; \quad F_y = Fm; \quad F_z = F_n, \tag{7.2}$$

siendo l, m, y n los cosenos directores de la normal ν.

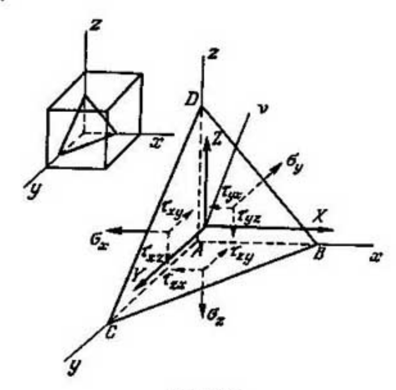


Fig. 270.

Proyectando consecutivamente todas las fuerzas que actúan sobre el elemento, sobre los ejes x, y y z obtendremos,

$$XF = \sigma_x F_x + \tau_{yx} F_y + \tau_{zx} F_z,$$
$$YF = \tau_{xy} F_x + \sigma_y F_y + \tau_{zy} F_z,$$
$$ZF = \tau_{xz} F_x + \tau_{yz} F_y + \sigma_z F_z,$$

o, de acuerdo con (7.2),

$$\left.\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Así pues, resulta que, en realidad, en cualquier plano determinado por los cosenos directores l, m y n, las proyecciones X, Y y Z se expresan por las seis componentes iniciales σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx} y τ_{xy}. En otras palabras, *el estado tensional en el punto se determina por seis componentes.*

Mediante las fórmulas (7.3) es fácil determinar el vector de la tensión completa en cualquier plano que pase por el punto en cuestión (fig. 271). El estado tensional en el punto es un concepto más complicado que aquellos que encontramos hasta aquí.

Ya conocemos el concepto de número y el concepto de vector, magnitud que se determina por tres números. El estado tensional se determina, ya, no por tres, sino por seis números y constituye un *tensor*. El tensor, a diferencia del vector, no admite una interpretación geométrica simple. Generalmente el tensor se da por una matriz

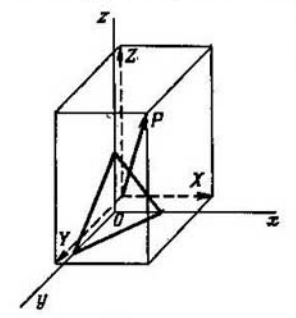


Fig. 271.

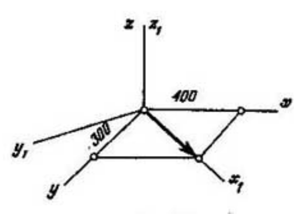


Fig. 272.

(tabla) que se escribe, por ejemplo, en la forma siguiente,

$$\begin{pmatrix} 500 & 200 & 100 \\ 200 & -50 & 43 \\ 100 & 43 & 720 \end{pmatrix},$$

donde cada número representa el valor de σ_x, τ_{yx}, . . . de acuerdo con la posición de los coeficientes en las tres ecuaciones (7.3), es decir, $\sigma_x=500$, $\tau_{yx}=200$, etc.

Si pasamos del sistema original de ejes x, y y z a otro nuevo, entonces variarán las componentes del tensor, es decir, serán distintos los valores de σ_x, σ_y, . . . Sin embargo, el tensor del estado tensional permanecerá el mismo. Esto se ilustra fácilmente en el ejemplo del vector de la figura 272.

El vector puede ser dado por una matriz cuyos términos son las coordenadas del extremo del vector,

$$(400 \quad 300 \quad 0).$$

Al pasar al sistema de ejes x_1, y_1, z_1 (fig. 272), obtendremos para el mismo vector,

$$(500 \quad 0 \quad 0).$$

Las componentes del vector, como vemos, varían, pero el propio vector no.

Veamos con más detalle algunas propiedades del estado tensional, relacionadas con la transformación del sistema de coordenadas.

§ 52. Ejes principales y tensiones principales

Expresemos la tensión normal σ_v en un plano inclinado por X, Y y Z. Está claro que $\sigma_v = Xl + Ym + Zn$, o, de acuerdo con (7.3),

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} lm.$$

Veamos el conjunto de planos de orientación arbitraria que pasan por el punto en cuestión. Ubicamos sobre la normal a cada plano el

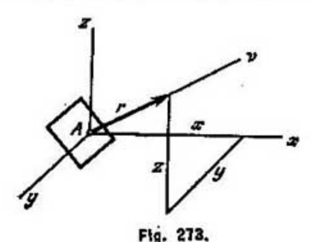


Fig. 273.

segmento $r = f(\sigma_v)$ (fig. 273). Las coordenadas del extremo de este vector serán,

$$x = rl; \quad y = rm; \quad z = rn.$$

Eliminando en la expresión de σ_v los cosenos directores l, m y n obtendremos el lugar geométrico de los extremos del vector,

$$\sigma_v r^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy.$$

Veamos ahora cómo ubicar el valor absoluto del segmento r en función de σ_v. Generalmente, este problema se resuelve de manera que la imagen geométrica resulte clara. En nuestro caso, para que la expresión obtenida sea simple, admitimos formalmente que

$$r^2 = \frac{k}{|\sigma_v|},$$

siendo k una constante arbitraria que refleja la escala del dibujo. Entonces obtendremos,

$$k = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy.$$

Esta expresión nos dice muy poco sobre las leyes de variación de las tensiones en el punto, pero nos da la ecuación de una superficie central de segundo orden. De la geometría analítica se sabe que, gi-

rando el sistema de coordenadas, esta ecuación se puede transformar de manera que desaparezcan los productos de las coordendas, es decir, que se conviertan en cero los coeficientes de los productos. En este caso esto indica que *en cada punto que se investiga del sólido tensionado existe un sistema de coordenadas x, y y z en el cual las tensiones tangenciales τ_{yz}, τ_{zx} y τ_{xy} son iguales a cero.* Estos ejes se denominan *ejes principales.* Los planos ortogonales entre sí correspondientes se denominan *planos principales* y las tensiones normales en estos planos, *tensiones principales.* Estas tensiones se anotan por σ_3, σ_2 y σ_1, siendo $\sigma_3 \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_1$.

Si en la vecindad del punto en cuestión el volumen elemental separado se obtiene por los planos principales, entonces el sistema de fuerzas que aparecen sobre las caras del elemento, se simplifica

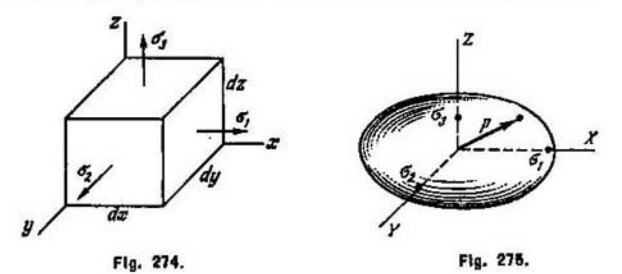


Fig. 274. Fig. 275.

(fig. 274). Se simplifican también considerablemente las ecuaciones (7.3) que en este caso serán,

$$X = \sigma_1 l, \quad Y = \sigma_2 m, \quad Z = \sigma_3 n.$$

Como,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

resulta

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

A esta relación se la puede dar una interpretación simple e ilustrativa. Las magnitudes X, Y y Z se pueden interpretar como las coordenadas del extremo del vector de la tensión completa p que aparece en el plano de orientación arbitraria. *El lugar geométrico de los extremos del vector de la tensión completa forma un elipsoide, cuyos semiejes son las tensiones principales* σ_1, σ_2 y σ_3 (fig. 275). El elipsoide obtenido se denomina *elipsoide de las tensiones.*

De esta representación geométrica se deduce como corolario que la mayor de las tres tensiones principales es, al mismo tiempo, el valor máximo posible de la tensión completa en el conjunto de planos que pasan por el punto que se analiza. La menor de las tensiones prin-

cipales será, por otra parte, el valor mínimo posible de las tensiones completas.

Cuando dos tensiones principales son iguales el elipsoide se convierte en un cuerpo de revolución. En este caso, cada plano que pasa por el eje de rotación resultará principal. Cuando son iguales no dos, sino las tres tensiones principales, el elipsoide se convierte en una esfera, resultando que *todos* los planos que pasan por el punto en cuestión son planos principales.

Pasemos ahora a determinar las magnitudes de las tensiones principales, dados los valores de las seis componentes del estado tensional, en un sistema arbitrario de coordenadas x, y, z. Volviendo a la figura 271 y a las fórmulas (7.3), supongamos que el plano inclinado es un plano principal. Estonces la tensión completa en dicho plano (que es principal) estará orientada según la normal ν. Anotamos esta tensión por S,

$$X=Sl, \quad Y=Sm, \quad Z=Sn.$$

Las ecuaciones (7.3) serán ahora,

$$\begin{aligned} Sl &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Sm &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Sn &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n, \end{aligned}$$

ó

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - S)\, l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - S)\, m + \tau_{zy} n &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - S)\, n &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.4)$$

Este sistema se puede considerar como un sistema de ecuaciones respecto a las incógnitas l, m y n que determinan la dirección del plano principal en el sistema de ejes iniciales dados x, y y z. El sistema obtenido es homogéneo. Al mismo tiempo deberá determinar valores no nulos de l, m y n, puesto que los cosenos directores no pueden ser todos simultáneamente iguales a cero, ya que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (7.5)$$

Para que el sistema de ecuaciones homogéneas (7.4) tenga solución que sea diferente de cero es necesario que el determinante de este sistema sea igual a cero,

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0. \quad (7.6)$$

Esto se consigue escogiendo debidamente los valores de S. Si se cumple la condición (7.6), entonces una de las tres ecuaciones (7.4) será la combinación lineal de las otras dos que, conjuntamente con la condición (7.5), forman un sistema nuevo suficiente para determinar

las magnitudes de l, m y n, que a su vez determinan la posición de los planos principales. Esta parte del problema la dejamos sin analizar y pasamos directamente a la determinación de las tensiones principales S de la ecuación (7.6).

Desarrollando el determinante y colocando sus términos por el orden de las potencias de S se obtiene la ecuación cúbica siguiente,

$$S^3 - S^2 I_1 + S I_2 - I_3 = 0, \qquad (7.7)$$

siendo

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

Se puede demostrar que las tres raíces de la ecuación (7.7) son reales. Estas raíces nos dan los tres valores de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

Está claro que las tensiones principales, es decir, las raíces de la ecuación (7.7), se determinan por el carácter del estado tensional y no dependen del sistema de coordenadas admitido. Por lo tanto, al girar el sistema original de ejes x, y y z los coeficientes I_1, I_2 e I_3 de la ecuación (7.7) deberán permanecer invariables. Estos coeficientes se denominan *invariantes del estado tensional*.

En algunos casos, los invariantes pueden ser iguales a cero. Por ejemplo, si $I_3=0$, entonces una de las raíces de la ecuación (7.7) también será igual a cero. En este caso se dice que el estado tensional es biaxial o plano. Concretamente, el estado tensional que ya conocemos, correspondiente a la distorsión pura es un estado tensional plano en el cual $\sigma_1=-\sigma_3$ y $\sigma_2=0$.

Si son iguales a cero simultáneamente los invariantes segundo y tercero, o sea, $I_2=I_3=0$, entonces la ecuación (7.7) tendrá dos raíces iguales a cero, resultando que solamente una de las tensiones principales es diferente de cero. Este estado tensional se denomina *monoaxial* o *lineal*. Al estudiar los problemas relacionados con la tracción, compresión y flexión pura ya nos encontramos con este estado tensional.

Veamos algunos ejemplos de determinación de las tensiones principales.

Ejemplo 7.2. Determinar las tensiones principales en el caso cuando todas las componentes del estado tensional son iguales (fig. 276, *a*).

De acuerdo a las expresiones (7.8) y (7.7) obtendremos,

$$I_1 = 3\sigma, \quad I_2 = I_3 = 0.$$
$$\sigma_1 = 3\sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Es decir, que el estado tensional dado constituye una tracción monoaxial.

A este resultado se le puede dar una explicación simple, si tenemos en cuenta que el elemento se puede separar de la barra traccionada de cualquier manera.

Está claro que si los tres planos cortantes tienen igual inclinación respecto al eje de la barra traccionada, entonces en las caras del elemento aparecerán componentes iguales del estado tensional (fig. 277).

Como al variar la orientación de los planos cortantes, el estado tensional no varía, la solución obtenida se puede representar en la forma de una igualdad simbólica (fig. 276).

Ejemplo 7.3. Determinar las tensiones principales en el caso del estado tensional,

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

(figura 278, *a*)

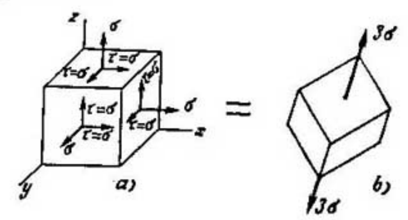


Fig. 276.

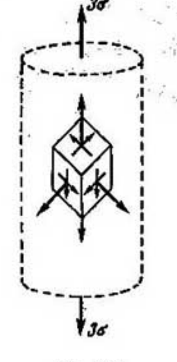


Fig. 277.

De acuerdo con la expresión (7.8) obtendremos,

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -3\tau^2, \quad I_3 = 2\tau^3.$$

Resultando que

$$S^3 - 3\tau^2 S - 2\tau^3 = 0.$$

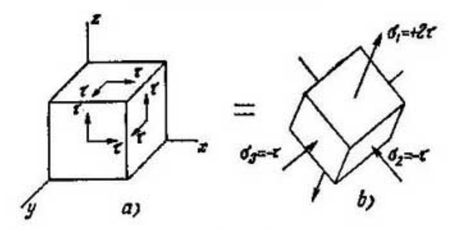


Fig. 278.

Por tanteos obtenemos una de las raíces. Esta es $S = -\tau$. Dividiendo el primer miembro de la ecuación por $S+\tau$ simplificamos la ecuación, reduciéndola a una ecuación cuadrada y determinamos después las dos raíces restantes,

$$\sigma_1 = 2\tau, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau.$$

Es decir, el estado tensional resultó ser triaxial (fig. 278, *b*).

§ 53. Diagrama circular del estado tensional

Como veremos más adelante, la determinación de las tensiones principales constituye una etapa necesaria intermedia en los cálculos de la resistencia del estado tensional complejo. Por eso, muy a menudo resulta necesaria la determinación de las tensiones principales.

Esto, sin embargo, no quiere decir que siempre sea necesario resolver la ecuación cúbica (7.7). En la inmensa mayoría de casos que se encuentran en la práctica, la posición de uno de los planos principales en el punto que se estudia se puede determinar previamente. Entonces los dos planos principales restantes se determinarán del conjunto de planos perpendiculares al primero, lo que simplifica considerablemente el problema.

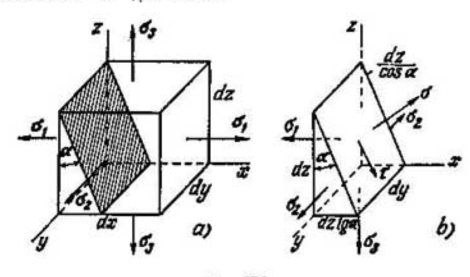


Fig. 279.

Veamos la condición de equilibrio de un prisma triangular representado en la figura 279. Este prisma se forma, seccionando el paralelepípedo elemental por un plano inclinado que, independientemente del ángulo de inclinación α, permanece paralelo a uno de los ejes principales, que, en nuestro caso, es el eje y.

Proyectamos todas las fuerzas que actúan sobre el prisma seccionado, sobre los ejes que coinciden con los vectores σ y τ (fig. 279, *b*), obteniendo,

$$\sigma dy \frac{dz}{\cos\alpha} = \sigma_1 dy\, dz \cos\alpha + \sigma_3 dy\, dz \operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha,$$

$$\tau dy \frac{dz}{\cos\alpha} = \sigma_1 dy\, dz \operatorname{sen}\alpha - \sigma_3 dy\, dz \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha,$$

o sea,

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \operatorname{sen}^2\alpha, \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_3)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Estas expresiones se pueden escribir como sigue,

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha, \quad \tau = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\operatorname{sen} 2\alpha. \tag{7.9}$$

Así se determinan las tensiones en el conjunto de planos paralelos a uno de los ejes principales. A las expresiones (7.9) se las puede dar una interpretación geométrica simple. Pasamos la semisuma de las tensiones principales $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ a la parte izquierda de la primera ecuación. Elevamos después al cuadrado los dos miembros de las ecuaciones y excluimos el ángulo α, obteniendo,

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2.$$

En el sistema de coordenadas σ, τ ésta es la ecuación de una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el eje σ a la distancia $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ del origen de coordenadas. El radio de la circunferencia es

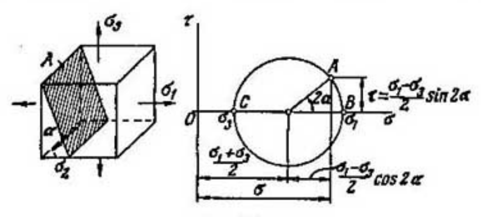


Fig. 280.

igual a la semidiferencia de las tensiones principales. Es decir que la circunferencia se construye sobre el segmento $\sigma_1-\sigma_3$ que sirve de diámetro (fig. 280). Este círculo se denomina *círculo de Mohr* o *diagrama circular del estado tensional*. En lo que se refiere a las ecuaciones (7.9), éstas se pueden interpretar como la ecuación de una circunferencia en forma paramétrica. El parámetro aquí es α, que determina la relación entre el punto del círculo y el plano cortante. A cada plano le corresponde cierto punto en el círculo de Mohr. En el caso particular cuando $\alpha=0$, el plano cortante coincide con el plano principal correspondiente a la tensión máxima σ_1 (punto B de la figura 280). Si $\alpha=90°$, el plano cortante coincidirá con el otro plano principal del mismo conjunto (punto C de la circunferencia).

La circunferencia de la figura 280 corresponde al conjunto de planos paralelos al vector σ_2. De manera análoga, se puede construir los círculos de Mohr para el conjunto de planos paralelos a los vectores σ_1 y σ_3. En estos casos los círculos se construyen sobre los diámetros $\sigma_2-\sigma_3$ y $\sigma_1-\sigma_2$ respectivamente. Así pues, se pueden construir tres círculos de Mohr. Como no se concretiza el signo de τ generalmente se limitan a construir solamente la mitad superior del círculo (fig. 281).

A cada punto de cualquier circunferencia le corresponde cierto plano cortante del correspondiente conjunto. Está claro que los

puntos situados en los tres círculos no agotan *todo* el conjunto de planos cortantes. Los planos que no son paralelos a ninguno de los ejes principales no pueden ser incluidos en el esquema analizado.

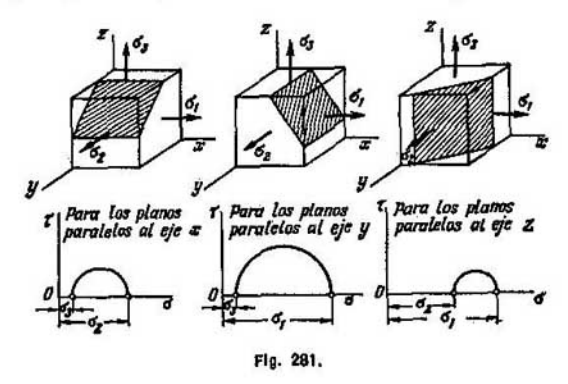


Fig. 281.

Se puede demostrar que a los planos de inclinación arbitraria les corresponden en el sistema de coordenadas (σ, τ) los puntos que se encuentran en el triángulo curvilíneo rayado *BCD* formado por los tres círculos de Mohr (fig. 282). Existen también métodos que permiten determinar las tensiones en los planos correspondientes.

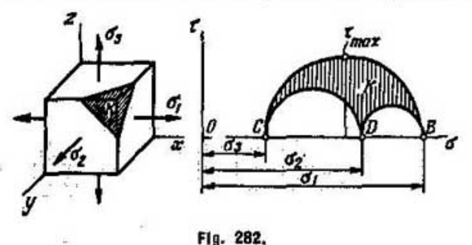


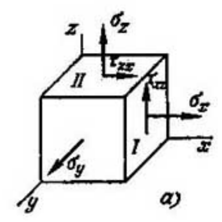
Fig. 282.

Como ninguno de los puntos no sale fuera de los límites del triángulo curvilíneo rayado, está claro que la tensión tangencial máxima será igual al radio del círculo mayor,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (7.10)$$

Esta tensión aparece en el plano de igual inclinación a los planos de las tensiones principales máxima y mínima.

El diagrama circular puede ser construido no sólo cuando se dan las tensiones principales. Es suficiente conocer las tensiones en dos planos cualesquiera del conjunto examinado de planos en cuestión paralelos al eje principal. Supongamos, por ejemplo, dado el estado tensional de la figura 283, *a*. El eje *y* es un eje principal. En el conjunto de planos parelelos a este eje se encuentran dos planos en los cuales se conocen las tensiones. Estos son los planos *I* y *II*.



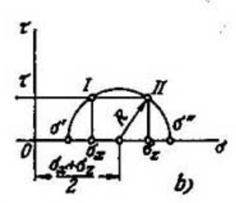


Fig. 283.

Por lo tanto, en el diagrama circular, se pueden determinar los dos puntos correspondientes que deberán encontrarse en los extremos opuestos del mismo diámetro, puesto que el ángulo entre los planos es igual a 90° y este ángulo se duplica en el diagrama circular. Sin embargo, puesto que el signo de las tensiones τ no se concretiza, situamos las ordenadas de los dos puntos hacia arriba, lo que no afecta a la forma del diagrama circular (fig. 283, *b*).

Del diagrama circular fácilmente se determinan las tensiones principales,

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - R, \quad \sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + R,$$

siendo R, el radio del círculo,

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Así pues,

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \sigma'' &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Una vez determinadas las tensiones σ' y σ'' se comparan éstas con σ_y para establecer cuáles de ellas son σ_1, σ_2 y σ_3, puestas en el orden de disminución.

Ejemplo 7.4. Determinar las tensiones principales para el estado tensional de la figura 284. Las tensiones se dan en unidades convencionales.

En este ejemplo está dado uno de los planos principales y una de las tensiones principales y, por lo tanto, sin recurrir a la solución de la ecuación cúbica (7.7) se pueden determinar las otras dos tensiones principales del círculo de Mohr para el conjunto de planos paralelos al eje x (fig. 284).

Ubicamos en el diagrama los puntos correspondientes a los planos *I* y *II* y construimos el diagrama circular,

$$\sigma' = 200 - \sqrt{200^2 + 300^2} = -160,$$
$$\sigma'' = 200 + \sqrt{200^2 + 300^2} = 560.$$

Es decir, $\sigma_1 = 560$, $\sigma_2 = 500$, $\sigma_3 = -160$.

Las tensiones principales se pueden obtener también por las fórmulas (7.11). En este caso es necesario prestar especial atención, para no equivocarse en los subíndices de las tensiones según los ejes. Veamos un ejemplo.

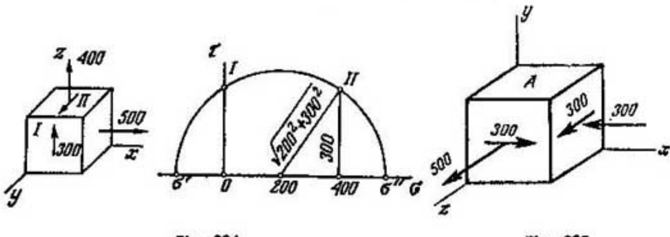


Fig. 284. Fig. 285.

Ejemplo 7.5. Determinar las tensiones principales en el caso del estado tensional de la figura 285. Las tensiones se dan en unidades convencionales.

El estado tensional es plano, siendo el plano *A* un plano principal. Los otros dos se obtienen del conjunto de planos perpendiculares al primero. Para poder recurrir a las fórmulas (7.11) directamente, dirigimos el eje y según la perpendicular al plano principal (fig. 285). Entonces obtendremos,

$$\sigma_x = -300; \quad \sigma_z = 500; \quad \tau = 300.$$

De las fórmulas (7.11) hallaremos,

$$\sigma' = -400; \quad \sigma'' = +600.$$

Distribuimos los subíndices según disminuyan las tensiones en el orden siguiente,

$$\sigma_1 = +600; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -400.$$

§ 54. Resumen de los diversos tipos de estados tensionales

Al estudiar los problemas de la resistencia, en el caso de un estado tensional complejo, adquiere gran importancia el tipo del estado tensional. La mayoría de los materiales se destruye de manera distinta según sean las tensiones, de tracción o de compresión. Los ensayos demuestran que todos los materiales sin excepción son capaces de resistir grandes tensiones cuando se trata de compresión triaxial,

mientras que en el caso de tracción monoaxial, la destrucción ocurre para tensiones relativamente pequeñas. Existen estados tensionales en los que la destrucción ocurre de manera frágil, sin la formación de deformaciones plásticas, y existen otros en los que el mismo material resulta capaz de deformarse plásticamente.

Resulta así necesario detenerse con más detalle en las características de los estados tensionales típicos y observar en que condiciones surge tal o cual estado. Este resumen nos permitirá en adelante, con mayor facilidad, orientarnos en los problemas de resistencia y juzgar

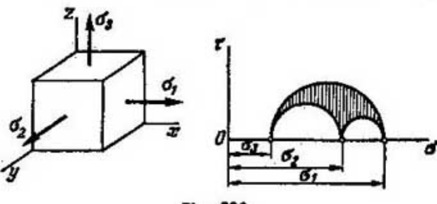


Fig. 286.

sobre el grado del peligro que para el material presenta el estado tensional.

Anteriormente los estados tensionales fueron clasificados en triaxiales, biaxiales y monoaxiales. Al estudiar los problemas de la resistencia esta clasificación resulta insuficiente y se acuerda dividir los estados tensionales en tres clases según sea el signo de las tensiones principales.

El primer caso lo constituyen las *tracciones triaxiales*, es decir, los estados tensionales en los cuales ninguna de las tensiones principales es de compresión. Los diagramas circulares de este tipo de estados tensionales se sitúan en la parte derecha del plano σ, τ (fig. 286). En un caso particular las tres tensiones principales de tracción pueden ser iguales. Este estado tensional se denomina *tracción triaxial pura.* Aparece, por ejemplo, en la parte central de una esfera maciza que se calienta rápidamente en su parte exterior (fig. 287, *a*). La dilatación de las capas exteriores calentadas conduce a que la parte interior sin calentar de la esfera se somete a una «presión de tracción» triaxial. Los diagramas circulares en el caso de tracción triaxial pura se degeneran en un punto (fig. 287, *a*). La tracción triaxial correspondiente al caso cuando dos tensiones principales son iguales, pero diferentes de la tercera se observa en los puntos situados en el eje de una probeta traccionada con ranura anular (fig. 287, *b*). Frecuentemente se da el estado tensional cuando $\sigma_3=0$. Este estado tensional es plano y se refiere también al tipo que analizamos. La tracción biaxial, cuando $\sigma_1\neq\sigma_2$ aparece, por ejemplo, en los discos finos de espesor onstante que giran a gran velocidad (fig. 287, *c*). La tracción biaxial

Fig. 287.

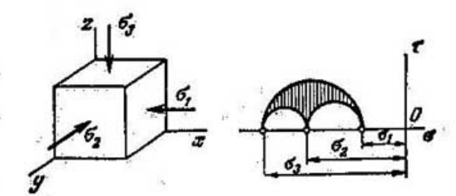


Fig. 288.

de tensiones iguales ($\sigma_1=\sigma_2$) surge en los puntos situados en la superficie exterior del recipiente esférico solicitado por una presión interior (fig. 287, *d*). A este tipo de estados tensionales pertenece

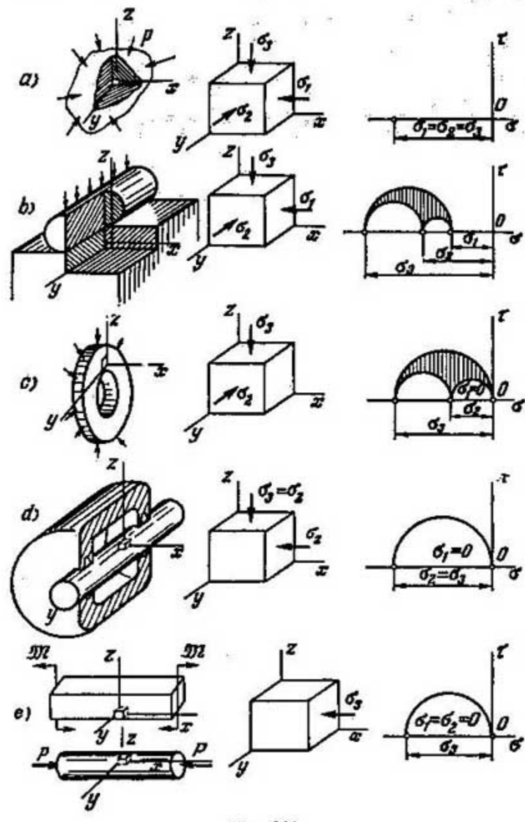


Fig. 289.

también la tracción monoaxial simple que surge en una barra homogénea traccionada o en la flexión pura (fig. 287, *e*).

El segundo tipo de estados tensionales, muy difundido, es aquel en el cual ninguna de las tensiones principales es de tracción. Se

denomina este estado *compresión triaxial*. Los diagramas circulares correspondientes a este tipo se sitúan en la parte izquierda del plano σ, τ (fig. 288).

La compresión triaxial pura aparece en todo cuerpo, independientemente de su forma, sometido a una presión hidrostática en todas

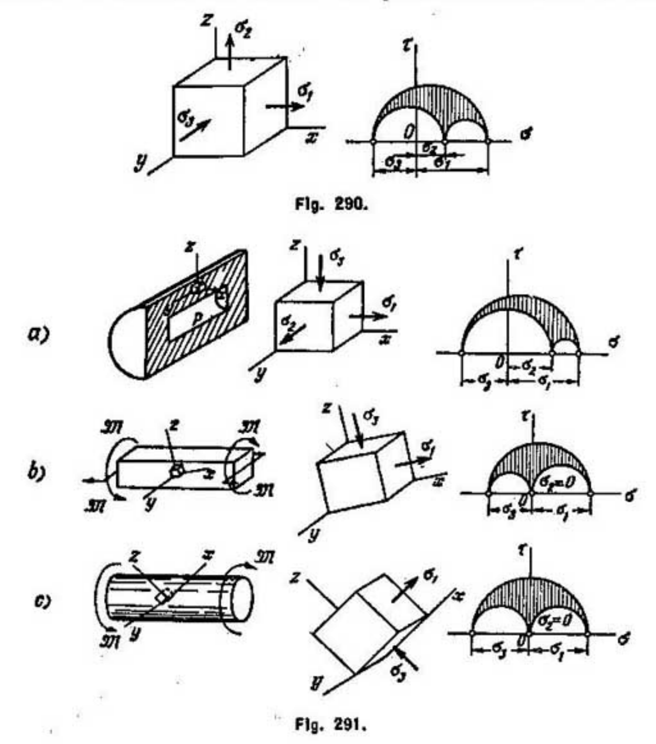


Fig. 290.

Fig. 291.

las direcciones (fig. 289, *a*). La compresión triaxial no uniforme es característica para los puntos situados en la proximidad de los cuerpos en contacto, como, por ejemplo, los rodillos y el aro de un cojinete, el casquillo y el árbol, etc. (fig. 289, *b*). Un ejemplo de compresión biaxial está representado en la figura 289, *c*. La compresión biaxial de tensiones iguales ($\sigma_2=\sigma_3$) aparece cuando se presiona un árbol de extremos libres (fig. 289, *d*).

La compresión monoaxial también figura en este tipo de estados tensionales y aparece, particularmente, en la flexión pura y en la compresión de una barra homogénea (fig. 289, *e*).

Al tercer tipo se refieren los, así llamados, estados tensionales mixtos en los cuales, la tensión máxima y mínima tienen distinto signo. La tensión σ_2 puede ser tanto positiva como negativa. Los diagramas circulares de los estados tensionales de este tipo se sitúan en la parte central del plano σ, τ (fig. 290). El estado tensional triaxial mixto aparece, así en un cilindro de paredes gruesas solicitado por una presión interior (fig. 291, *a*). Es característica para la barra flexada y, al mismo tiempo, torsionada la aparición de un estado tensional plano mixto (fig. 291, *b*). La distorsión pura también constituye un estado biaxial mixto (fig. 291, *c*).

Los ejemplos analizados de los tipos indicados de estados tensionales no son los únicos, lo que se demostrará en el proceso de estudio de la resistencia de materiales.

§ 55. Estado de deformación

La variación de la forma del sólido está relacionada con los desplazamientos de sus puntos. La distancia entre las posiciones del punto A, antes y después de variar la forma del sólido (fig. 292), se

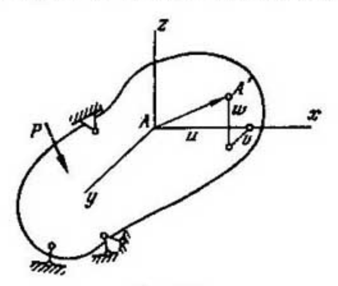


Fig. 292.

denomina desplazamiento total de este punto. Las componentes del vector del desplazamiento total según los ejes x, y y z, se anotan por u, v y w respectivamente.

Veamos el segmento AB cuya dirección coincide con el eje x (fig. 293, *a*). La distancia entre los puntos A y B puede ser infinitamente pequeña. Designémosla por dx. Las componentes del vector del desplazamiento en el punto B se diferencian de las componentes en el punto A en magnitudes que dependen de la variación de la coordenada x. Así, por ejemplo, si el punto A se desplaza a lo largo del eje

z la magnitud w, entonces el punto B se desplazará la magnitud $w + \frac{\partial w}{\partial x}\,dx$, etc.

El incremento de la longitud del segmento AB es $\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$. Por lo tanto, el alargamiento unitario en el punto A, según el eje x será,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De manera análoga se obtiene

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

El ángulo de giro del segmento AB en el plano xz es igual a la razón entre la diferencia de los desplazamientos de los puntos A y B a lo

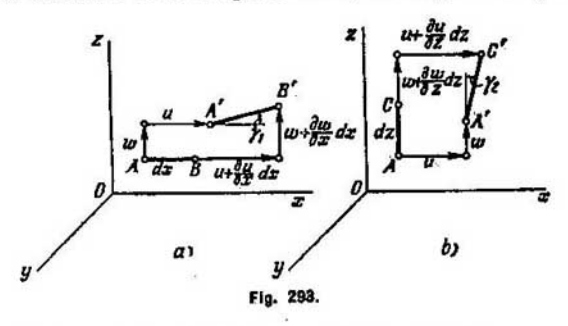


Fig. 293.

largo del eje z y la longitud del segmento dx, es decir,

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

El ángulo de giro del segmento AC en el plano xz (fig. 293, b) será,

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

La suma de los ángulos γ_1 y γ_2 es igual a la variación del ángulo recto BAC, es decir, es igual al ángulo de distorsión en el plano xz,

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De manera análoga se pueden escribir las expresiones de los ángulos de distorsión en los otros dos planos del sistema de coordenadas. Como resultado, se obtiene la relación siguiente entre los desplaza-

mientos y las deformaciones en un punto,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

El conjunto de las deformaciones que aparecen en la dirección de los distintos ejes y en los planos diversos que pasan por el punto dado, se denomina *estado deformacional en el punto.*

Después de ciertas transformaciones se puede demostrar que las seis componentes de la deformación obtenidas son suficientes para determinar las deformaciones lineales y angulares en el punto dado y en direcciones arbitrarias. Así pues, el estado de deformación en el punto se determina por seis componentes y, como en el caso del estado tensional, constituye un tensor.

El análisis del estado deformacional demuestra que tiene propiedades idénticas a las del estado tensional. Entre el conjunto de ejes que se pueden trazar por el punto que se investiga, existen tres ejes ortogonales en cuyo sistema no existen deformaciones angulares. Estos ejes se denominan *ejes principales del estado deformacional* y las deformaciones lineales en este sistema, *deformaciones principales.*

Las deformaciones principales se obtienen de la ecuación cúbica,

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0,$$

cuyos coeficientes son las *invariantes* del estado deformacional,

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ I_2 &= \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Comparando estas ecuaciones con las expresiones (7.7) y (7.8) se ve que el análogo de la tensión normal es aquí la deformación lineal y el análogo de la tensión tangencial, la mitad del ángulo de distorsión en el plano correspondiente. Continuando esta analogía, se pueden construir los círculos de Mohr para las deformaciones, como se hizo para las tensiones.

El análisis del estado deformacional se basa en relaciones puramente geométricas y, por lo tanto, todo lo dicho permanece en vigor para cualquier sólido homogéneo, independientemente de las propiedades mecánicas del material.

Simultáneamente a las deformaciones lineal y angular, en la resistencia de materiales resulta necesario analizar, a veces, la *de-*

formación del volumen, es decir, la variación unitaria del volumen en un punto. Las dimensiones lineales del paralelepípedo elemental dx, dy y dz, como resultado de la deformación, varían, haciéndose iguales a $dx\,(1+\varepsilon_x)$, $dy\,(1+\varepsilon_y)$ y $dz\,(1+\varepsilon_z)$. El incremento absoluto del volumen se determina, claro está, por la diferencia,

$$\Delta V = dx\,dy\,dz\,(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - dx\,dy\,dz.$$

Abriendo los paréntesis y prescindiendo de los productos de las deformaciones lineales, que son magnitudes pequeñas en comparación con las primeras potencias, obtendremos,

$$\Delta V = dx\,dy\,dz\,(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

La variación unitaria del volumen se designa por e y es igual a la suma de las deformaciones lineales correspondientes a los tres ejes,

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z. \qquad (7.14)$$

Al girar el sistema de ejes, e, en el punto dado, no varía. Este es uno de los invariantes del estado deformacional [véase la fórmula (7.13)].

§ 56. Ley de Hooke generalizada. Energía potencial de la deformación en el caso de un estado tensional arbitrario

Hasta ahora, analizábamos los estados tensional y deformacional independientemente el uno del otro, sin relacionarlos con las propiedades del material. Sin embargo, entre las componentes del estado tensional, por una parte, y las del estado deformacional, por otra, existe cierta dependencia. Cuando se trata de deformaciones pequeñas esta dependencia es lineal y se denomina *ley de Hooke generalizada*. La forma más simple de la ley de Hooke generalizada se observa en el cuerpo isótropo. En este caso, los coeficientes de proporcionalidad entre las componentes del estado tensional y las del estado deformacional no dependen de la orientación de los ejes en el punto.

Para plantear la expresión analítica de la ley de Hooke generalizada, recurramos al principio de superposición de las fuerzas y veamos, por separado, las fuerzas que aparecen en las caras del paralelepípedo elemental (fig. 294).

En cualquiera de los planos de coordenadas, por ejemplo, en el plano yz, la deformación angular se determina solamente por las tensiones tangenciales correspondientes.

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

Los otros dos pares de tensiones tangenciales, así como también las tensiones normales, no influyen sobre la magnitud de γ_{yz}, lo que se deduce de las propiedades del material isótropo.

A esto se le puede dar la explicación siguiente. Supongamos que en las caras del elemento surgen solamente las tensiones tangenciales

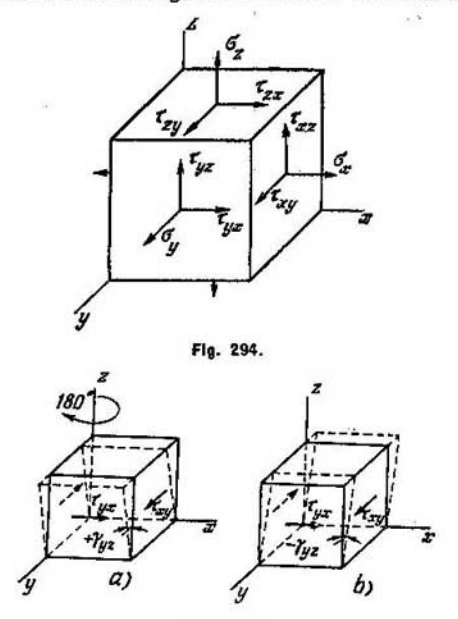


Fig. 294.

Fig. 295.

$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ (fig. 295, *a*). Surge la pregunta siguiente: ¿ aparecerá deformación angular γ_{yz} en el plano perpendicular al plano de acción de las tensiones tangenciales τ_{xy}?

Si esta deformación surgiese, sería imposible establecer su signo, en el caso de un material isótropo, puesto que para τ_{xy} ninguna de las dos direcciones prevalece sobre la otra y para las propiedades del material las dos direcciones son iguales. Supongamos, por ejemplo, que la distorsión ocurre en la dirección indicada en la figura 295, *a*. Entonces, girando el elemento 180° respecto al eje z obtendremos el mismo sistema de fuerzas τ_{xy} y una distorsión γ_{zy} de signo contrario (fig. 295, *b*). Está claro, que esta contradicción se liquida solamente

cuando $\gamma_{yz}=0$. Por lo tanto, aplicando el principio de superposición de las fuerzas, podemos afirmar que la deformación angular γ_{yz} no depende de τ_{xy}. De manera análoga se demuestra que ella tampoco depende de las componentes restantes del estado tensional, excepto τ_{yz}. En el caso de un material anisótropo estos razonamientos no valen. Como resultado, obtenemos para las tres deformaciones angulares,

$$\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G},\quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G},\quad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}. \tag{7.15}$$

De estas expresiones se deduce que en el caso de un cuerpo isótropo, los *ejes principales del estado tensional coinciden con los del estado deformacional*, puesto que las tensiones tangenciales y las deformaciones angulares desaparecen al mismo tiempo.

De la misma manera que las deformaciones angulares no dependen de las tensiones normales, las deformaciones lineales tampoco dependen de las tensiones tangenciales. Esto se puede demostrar fácilmente como se hizo anteriormente y se deduce, también, del teorema de reciprocidad de los trabajos (véase el § 42). Si las tensiones normales no originan distorsión sobre la cual las fuerzas tangenciales podrían realizar cierto trabajo, las tensiones tangenciales tampoco originarán desplazamientos lineales sobre los cuales puedan realizar trabajo las fuerzas normales.

El alargamiento unitario en la dirección de x, debido a la tensión σ_x será $\frac{\sigma_x}{E}$. A las tensiones σ_y y σ_z les corresponden los alargamientos, en la dirección de x, de signo opuesto e iguales a $-\mu\frac{\sigma_y}{E}$ y $-\mu\frac{\sigma_z}{E}$. Por lo tanto,

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Expresiones idénticas se obtienen de manera análoga, para ε_y y ε_z. Como resultado hallaremos,

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)],\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)],\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)].\end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

Sumando los dos miembros de estas ecuaciones obtendremos la expresión de la deformación de volumen (7.14)

$$e=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z). \tag{7.17}$$

Las relaciones obtenidas (7.15) — (7.17) constituyen la expresión analítica de la ley generalizada de Hooke para el caso de un sólido isótropo.

En el caso de un sólido anisótropo, en el caso general, la ley de Hooke se escribe así,

$$\left.\begin{aligned} e_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}, \\ e_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.18)$$

siendo a_{ik}, las constantes elásticas que dependen de las propiedades del material.

En el caso general de anisotropía, como veremos más adelante, las deformaciones angulares aparecen, no sólo cuando actúan tensiones tangenciales, sino también cuando actúan tensiones normales. Al mismo tiempo, las deformaciones lineales dependen, no sólo de las tensiones normales, sino también de las tangenciales.

Si son x, y y z los ejes principales del estado tensional, entonces $\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0$, pero, sin embargo, las deformaciones angulares γ_{yx}, γ_{zx}, γ_{xy} no son iguales a cero. Es decir, en el material anisótropo en el caso general los ejes principales del estado tensional no coinciden con los ejes principales del estado deformacional.

De 36 constantes 15 siempre son iguales dos a dos, puesto que, en virtud del teorema de reciprocidad de los trabajos (véase § 42) $a_{ik}=a_{ki}$. Por lo tanto, las propiedades elásticas del cuerpo, en el caso general de anisotropía, se caracterizan por 21 constantes independientes. En los casos más simples de anisotropía este número se reduce. Cuando se trata de un material isótropo, como ya sabemos, el número de estas constantes es igual a dos.

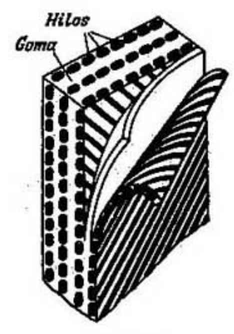


Fig. 296.

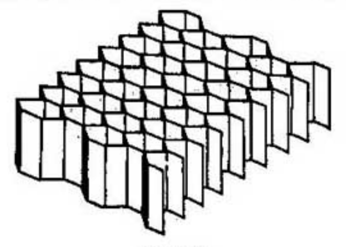


Fig. 297.

Los problemas relacionados con la deformación de los cristales se resuelven por la ley de Hooke escrita en la forma (7.18). Estas ecuaciones se emplean también parcialmente en el análisis de los resultados del método de Roentgen de determinación de las tensiones en el metal (§ 117).

Es muy importante el empleo de las leyes de elasticidad del tipo (7.18) cuando se trata de la así llamada anisotropía constructiva.

Si la construcción elástica tiene particularidades geométricas y de fuerza que se repiten sistemáticamente, entonces, en toda una serie de casos resulta posible interpretar la construcción como un ambiente continuo al cual se le atribuyen las propiedades de anisotropía. Por ejemplo, en el caso de la construcción compuesta por goma y tejido cord de la figura 296 donde estos elementos se disponen en forma de varias capas de tejido y otras tantas capas, intermedias, de goma, la construcción se puede interpretar como una placa anisotrópica. La

construcción compuesta por panales (fig. 297) también se puede interpretar como una placa anisotrópica.

Es natural que esta interpretación es posible solamente cuando las dimensiones generales de la pieza son bastante mayores que las dimensiones de los hilos o de una de las celdas del panal aislado. Aquí se parte del principio general, según el cual el esquema del ambiente continuo es aplicable solamente cuando las dimensiones del objeto son suficientemente mayores que las dimensiones características de los elementos estructurales.

La expresión de la deformación de volumen (7.17) permite determinar el valor límite del coeficiente de Poisson para cualquier cuerpo isótropo. La relación (7.17) es válida para cualquier estado tensional y, por lo tanto, también en el caso particular cuando $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=p$. En este caso,

$$e=3\frac{1-2\mu}{E}p.$$

Cuando p es positivo, la magnitud e deberá ser positiva también y cuando p es negativo, será negativa también la variación del volumen. Esto resulta posible solamente cuando $\mu\leqslant\frac{1}{2}$. Así pues, el valor del coeficiente de Poisson, en el caso de un material isótropo, no puede ser mayor que 0,5.

El resultado obtenido, a pesar de que se deduce del análisis de un caso particular del estado tensional, es general, ya que μ es una característica *del material* y en el dominio de las deformaciones elásticas no depende del estado tensional.

Pasemos ahora a determinar la energía potencial de la deformación en el caso de un estado tensional general. Está claro que la energía potencial acumulada en un volumen elemental se determina por la suma de los trabajos de las fuerzas distribuidas sobre la superficie de este volumen. La fuerza normal $\sigma_x dy\,dz$ (fig. 294) realiza cierto trabajo en el desplazamiento $\varepsilon_x dx$. Este trabajo es,

$$\frac{1}{2}\sigma_x dy\,dz\cdot\varepsilon_x dx,$$

siendo ε_x, el alargamiento unitario según el eje x, originado por todas las fuerzas que actúan.

Expresiones análogas de los trabajos corresponden al resto de las componentes normales. La fuerza tangencial $\tau_{yz}dy\,dx$ realiza en el desplazamiento $\gamma_{yz}dz$ el trabajo siguiente,

$$\frac{1}{2}\tau_{yz}dy\,dx\,\gamma_{yz}dz$$

(véase también el § 20). Las expresiones del resto de los sumandos de la energía interior se obtienen alternando los subíndices. Como resultado obtendremos,

$$dU=\frac{1}{2}dx\,dy\,dz\,(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}+\tau_{xy}\gamma_{xy}).$$

Si referimos, como generalmente se hace, la energía a la unidad de volumen y si, al mismo tiempo, expresamos las deformaciones por las fórmulas (7.15) y (7.16) a través de las tensiones, obtendremos definitivamente,

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y\right)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2\right). \tag{7.19}$$

Esta energía se puede expresar también por las tensiones principales,

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2\right)\right]. \tag{7.20}$$

Para determinar la energía potencial en *todo* el volumen del cuerpo deformado, multiplicamos la expresión de U_0 por el volumen elemental e integramos después esta expresión sobre todo el volumen del sólido,

$$U = \int_V U_0 dV.$$

Hallemos, por fin, las expresiones de las, así llamadas, *energía de la variación de la forma y energía de la variación del volumen*. Estas expresiones serán necesarias más adelante al estudiar las cuestiones relacionadas con las deformaciones plásticas y los estados tensionales límites. La división de la energía potencial interior en las dos componentes indicadas es convencional y se realiza según el principio siguiente.

Cada una de las tensiones principales se interpreta como la suma de dos magnitudes

$$\sigma_1 = p + \sigma_1', \quad \sigma_2 = p + \sigma_2', \quad \sigma_3 = p + \sigma_3', \tag{7.21}$$

lo que conduce a que el estado tensional se divide en dos. El primero de ellos representa una tracción triaxial y el segundo, cierto suplemento que complementa al primero convirtiéndolo en el estado tensional dado (fig. 298). La magnitud p se establece de manera que la variación del volumen correspondiente al estado tensional suplementario sea igual a cero, es decir,

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0.$$

Sumando las expresiones (7.21) obtendremos,

$$p = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right). \tag{7.22}$$

Según esta condición, el sistema de fuerzas del primer estado tensional (p) no realiza ningún trabajo en los desplazamientos originados por las fuerzas del segundo estado. De la misma manera, las fuerzas del segundo estado tensional no realizarán trabajo en los desplazamientos del primer estado. Los trabajos recíprocos desapare-

cen y la energía interna se divide en dos partes correspondientes a los dos estados tensionales

$$U_0 = U_{0\,vol} + U_{0\,for},$$

siendo $U_{0\,vol}$, la energía de la variación del volumen y $U_{0\,for}$, la *energía de la variación de la forma.*

Sustituyendo en la expresión (7.20) las tensiones principales por la magnitud p (7.22) obtendremos para el primer estado,

$$U_{0\,vol} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 \qquad (7.23)$$

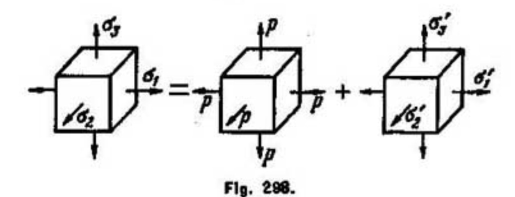


Fig. 298.

La energía de la variación de la forma se obtiene, restando $U_{0\,vol}$ de U_0. Después de ciertas transformaciones elementales hallaremos,

$$U_{0\,for} = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1-\sigma_1\sigma_2),$$

ó

$$U_{0\,for} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]. \qquad (7.24)$$

Si esta expresión se escribiese con respecto a un sistema de ejes arbitrarios, entonces según (7.19) obtendríamos,

$$U_{0\,for} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]+\frac{1}{2G}(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2). \qquad (7.25)$$

En el caso particular de compresión o tracción triaxial uniforme, es decir, cuando $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$, resulta,

$$U_{0\,vol} = \frac{3}{2}\,\frac{1-2\mu}{E}\sigma^2, \quad U_{0\,for}=0.$$

En el caso de la distorsión pura, cuando

$$\sigma_1=\sigma, \quad \sigma_2=0, \quad \sigma_3=-\sigma,$$

las componentes de la energía potencial serán,

$$U_{0\,vol}=0, \quad U_{0\,for}=\frac{1+\mu}{E}\sigma^2.$$

Capítulo VIII

TEORIA DE LOS ESTADOS TENSIONALES LIMITES

§ 57. Contenido de la teoría de los estados tensionales límites

Según sean las condiciones de solicitación, el material puede encontrarse en distintos estados mecánicos. Cuando las cargas exteriores son pequeñas, el material trabaja elásticamente o, como se dice, se encuentra en el *estado elástico.* En el caso de fuerzas mayores, se observan deformaciones residuales apreciables y el material se encuentra en el *estado plástico.* Después aparecen grietas locales y llega el *estado de rotura.*

El estado mecánico del material en el punto depende, ante todo, del estado tensional en el mismo punto aunque no se determina por él plenamente. Así, por ejemplo, en el caso de variación de la temperatura, sobre el estado mecánico del material influye sensiblemente el factor tiempo. Cuando se trata de una solicitación de poca duración el estado del material se puede considerar elástico, en el caso de solicitaciones de duración prolongada, plástico. El estado del material en puntos vecinos también influye sobre el estado mecánico del punto dado. Y, por último, lo más importante es que el concepto de estado mecánico en el punto no está libre de contradicciones con la suposición sobre la continuidad del material. Esto se observa, ante todo, al analizar los problemas relacionados con la rotura, puesto que el proceso de formación de grietas en los metales está estrechamente relacionado con la estructura molecular y cristalina de éstos.

Se podrían indicar muchos factores más de los que depende el estado mecánico del material. Sin embargo, todas las cuestiones indicadas y otras semejantes no están bien estudiadas todavía y, en gran medida, son discutibles. En la resistencia de materiales estas cuestiones no se estudian. Los estados mecánicos de los materiales se estudian partiendo de la suposición de que dependen principalmente del estado tensional del punto.

Entenderemos por tensión límite o, en forma general, por *estado tensional límite,* el caso en que ocurre una variación cualitativa de las propiedades del material, es decir, el paso de un estado mecánico a otro. En el caso de un material plástico se considera generalmente límite el estado tensional correspondiente a la aparición de deformaciones residuales considerables y, en el caso de un material frágil,

el estado tensional que corresponde al comienzo de la rotura del material.

Estos dos casos deben estar bien limitados, puesto que los procesos físicos que tienen lugar en ellos son completamente diferentes y podrán ser diferentes, por lo tanto, las condiciones en que transcurre el paso a estos estados.

El estado tensional límite puede considerarse como una característica de las propiedades del material. Cuando se calcula la resistencia de una estructura, partiendo de las tensiones máximas, el estado tensional en el punto más peligroso del sólido en cuestión se compara con el estado tensional límite del material dado. Sobre la base de esta comparación se hacen las conclusiones pertinentes respecto a la seguridad de la estructura.

El primer problema que surge cuando se emplea este método de cálculo consiste en la determinación del estado tensional límite.

Cuando se trata de un estado tensional monoaxial este problema se resuelve fácilmente. Para ello, se realiza el ensayo del material a tracción y en el diagrama de tracción se escoge el punto característico correspondiente a la tensión límite del material dado. Generalmente se considera que la tensión límite es igual o al límite de fluencia σ_{ft} o al límite de rotura σ_{rt}.

De la misma manera se puede obrar en el caso de la distorsión pura. Ensayando a torsión un tubo de paredes delgadas es fácil determinar las magnitudes de las tensiones en los puntos característicos del diagrama de la distorsión. Una de estas tensiones puede considerarse límite. Comparando esta tensión con las tensiones que aparecen en la pieza solicitada se puede juzgar sobre su resistencia.

Siguiendo este camino, sería necesario disponer para cada estado tensional (σ_1, σ_2 y σ_3) y para cada material de los diagramas de ensayos correspondientes con las características numéricas de los puntos límites. Está claro que este enfoque de la cuestión es inadmisible debido, ante todo, a la infinidad de los tipos posibles de estados tensionales y a las dificultades puramente técnicas que surgirían durante los ensayos de los materiales.

La técnica de los ensayos dispone actualmente de métodos de ensayo solamente para algunos tipos de estados tensionales (véase el § 112). Estos ensayos exigen, en toda una serie de casos, el empleo de aparatos complicados y son realizables solamente en un pequeño número de laboratorios de investigación y no en los laboratorios de la producción.

De esto se deduce fácilmente la necesidad de la creación de un método general de apreciación de la medida de peligro de cualquier estado tensional cuando se dispone de un número limitado de ensayos mecánicos del material. Esto constituye el contenido de la teoría de los *estados tensionales límites* o de la, así denominada, *teoría de resistencia*.

Es necesario advertir que el término «teoría de resistencia» no refleja plenamente el contenido del problema, puesto que se trata no estrictamente de la resistencia, sino de la variación cualitativa de las propiedades del material.

La dificultad relacionada con la creación de la teoría de los estados límites consiste, naturalmente, en la insuficiencia de nuestros conocimientos sobre los procesos internos que tienen lugar en el material. De acuerdo a esto, el problema se resuelve fundamentalmente, analizando y generalizando los datos experimentales.

Ahora existen dos tendencias en la teoría de los estados límites. La primera, la más vieja, consiste en la creación de hipótesis, lo más exactas posibles, que no son demostrables, pero que pueden ser justificadas por ensayos posteriores. Las hipótesis fundamentales se analizarán en el parágrafo siguiente.

La segunda tendencia, que es posterior y promete mucho más que la anterior, se basa sobre la manera fenomenológica de abordar el problema, es decir, se basa sobre la descripción, a ser posible simple y completa, del conjunto de los datos experimentales, recurriendo a un número, lo más pequeño posible de suposiciones simplificativas. Este enfoque se analizará en el § 59.

Antes de pasar a la exposición de las teorías de resistencia existentes introducimos ciertos conceptos que necesitaremos en adelante.

Generalizamos el concepto de coeficiente de seguridad. Para ello suponemos dado cierto estado tensional. Aumentando proporcionalmente todas las componentes de este estado tensional, es decir, variándolo de manera que permanezca *semejante*, llegaremos tarde o temprano al estado tensional límite. Entenderemos *por coeficiente de seguridad en el estado tensional dado el número que indica cuántas veces se deben aumentar simultáneamente todas las componentes del estado tensional para que el estado se convierta en estado límite.* De esta definición se deduce, como un caso particular, la definición ya conocida del coeficiente de seguridad correspondiente a la tracción simple.

Si en dos estados tensionales son iguales los coeficientes de seguridad, estos estados tensionales se consideran *igualmente peligrosos.* Esto permite comparar los diversos estados tensionales según sea el grado de peligro, es decir, partiendo del coeficiente de seguridad.

Para el material dado, la comparación de los estados tensionales se puede llevar a cabo sin recurrir al coeficiente de seguridad, sino simplemente por la característica numérica de cierto estado tensional que se escoge como patrón. Lo más cómodo es admitir como tal patrón la tracción simple de tensión principal σ_{eq} (fig. 299). La *tensión equivalente* σ_{eq}, *es la tensión que se debe aplicar en la barra traccionada para que el estado tensional de la barra sea igualmente peligroso al estado tensional dado.*

El concepto de tensión equivalente o, como se dice a veces, a pesar de no ser del todo correcto, «tensión reducida» que se usa ampliamente en la práctica, parte de la suposición de que para la evaluación cuantitativa del paso del material de un estado a otro, es suficiente conocer un solo número.

En realidad esto no es así. Así como el vector de la velocidad no puede ser determinado por un solo número, en algunos casos el estado límite tampoco puede siempre determinarse por los marcos que fija la magnitud σ_{eq}. En efecto, al comparar dos estados tensionales no tenemos en consideración las propiedades del material que en los distintos estados tensionales se reflejan de manera diferente. Puede ocurrir que en el estado tensional A (fig. 299), al aumentar proporcionalmente todas las componentes de las tensiones tenga lugar el fallo,

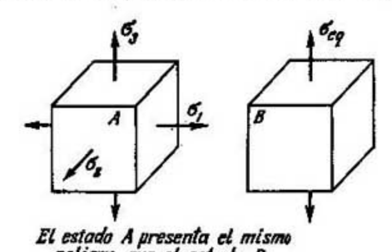


Fig. 299.

mientras que en el estado tensional B, al aumentar σ, comience el proceso de formación de las deformaciones plásticas. Entonces los estados tensionales resultan incomparables.

Así pues, se debe considerar que el concepto de tensión equivalente σ_{eq} no siempre es irreprochable, siendo al mismo tiempo un medio muy cómodo para realizar los cálculos prácticos.

Una vez obtenido σ_{eq}, es decir, después de expresarlo por σ_1, σ_2 y σ_3, se puede considerar resuelto el problema de la medida de peligro del estado tensional dado. En efecto, el coeficiente de seguridad, en el caso de tracción (estado B de la figura 299), se obtiene, como de costumbre, como sigue,

$$n = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{eq}}.$$

En el caso del estado tensional complejo A el coeficiente de seguridad adquiere el mismo valor. Así pues, el cálculo por las tensiones máximas en el caso del estado tensional complejo se reduce al cálculo ya conocido por nosotros, del caso de tracción simple. La cuestión consiste solamente en cómo expresar σ_{eq} por σ_1, σ_2 y σ_3. Para ello analicemos algunas hipótesis de los estados límites aprobados por la práctica.

§ 58. Hipótesis fundamentales de los estados límites

A la creación de las teorías de los estados límites (teorías de resistencia) antecede la hipótesis sobre cual de las tensiones o cual de las combinaciones de ellas en el estado tensional complejo determina el paso al estado límite. Se elabora, como se dice, el *criterio del estado límite*. La hipótesis posteriormente se comprueba mediante los ensayos accesibles de las probetas en estados tensionales complejos.

En las condiciones de un mismo estado tensional, los diversos materiales se comportan de manera diferente. Por eso ocurre que la hipótesis que es válida para un material conduce a resultados insatisfactorios en el caso de otro material. Una misma hipótesis puede ser comprobada experimentalmente en un caso y refutada en otro. Por ello, los criterios de los estados límites no tienen carácter universal.

Estas circunstancias, en los cálculos numéricos, conducen a ciertas divergencias. Por ello, no debe extrañarnos que el resultado del cálculo por una teoría manifieste cierta diferencia con los resultados obtenidos por otra. Esto se explica por el hecho de que las teorías de los estados límites no son perfectas. Se debe tener en cuenta también que en ninguna teoría se puede conseguir una exactitud mayor que la de las suposiciones originales. En nuestro caso, esta suposición original consiste en que el estado tensional en el punto es el factor *único* que determina el estado mecánico del material dado.

Desde que surgió la necesidad de realizar los cálculos de la resistencia en el caso de estados tensionales complejos, se ha propuesto toda una serie de hipótesis. Así, por ejemplo, a su tiempo se escogió como criterio de resistencia la magnitud de la *tensión normal máxima* σ_1, sin considerar las dos tensiones principales restantes. La práctica no confirmó esta hipótesis.

La rotura del material por un plano se puede interpretar como el resultado de las alteraciones de las fuerzas intermoleculares de cohesión, al aumentar la distancia entre las moléculas. Es por eso que surgió la idea de emplear, en calidad de criterio del estado límite, la *deformación lineal máxima*. Esta hipótesis recibió una gran difusión, pero un estudio de comprobación detallado demostró que adolece de deficiencias considerables.

El desarrollo de las deformaciones plásticas residuales en los metales ocurre, como se sabe, en forma de deslizamiento de unas partículas respecto a otras. Es natural suponer que el criterio del paso del estado elástico al plástico radica en la *tensión tangencial máxima en el punto*. Esto quiere decir que las deformaciones plásticas comienzan a desarrollarse cuando las tensiones tangenciales máximas alcanzan cierto valor límite.

La tensión tangencial máxima aparece en los planos elementales de igual inclinación a los planos de las tensiones máxima y mínima y es igual a la semidiferencia de estas tensiones (véase la fórmula 7.10),

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Partiendo de este criterio, admitimos que dos estados tensionales son igualmente peligrosos cuando son iguales las tensiones tangenciales máximas. En el caso de los estados tensionales A y B (fig. 299) obtendremos,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{eq}}{2},$$

de donde hallamos,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3. \qquad (8.1)$$

La comprobación experimental de la expresión obtenida para los diversos estados tensionales ha demostrado que, en el caso de materiales plásticos, esta expresión da generalmente resultados satisfactorios. El paso del estado elástico al plástico se determina efectivamente por la diferencia entre las tensiones principales máxima y mínima. La fórmula (8.1) demuestra particularmente que en el caso de compresión hidrostática o en el caso de tracción triaxial, en el material no surgen deformaciones plásticas. Si $\sigma_1 = \sigma_3$, entonces $\sigma_{eq} = 0$, lo que quiere decir que el estado tensional es igualmente peligroso que el estado de la probeta sin carga.

Como demostró la comprobación, la hipótesis de las tensiones tangenciales máximas manifiesta sensibles errores en el caso de materiales de diferentes características mecánicas a la tracción y a la compresión.

Simultáneamente a las hipótesis expuestas se propusieron muchas más entre las cuales merecen ser mencionadas las hipótesis energéticas. Durante cierto tiempo se intentó admitir en calidad de criterio del estado límite, la energía potencial interior del punto del sólido tensionado. Este intento, sin embargo, no tuvo éxito. En el caso de la compresión hidrostática, como lo demuestran los ensayos, la energía potencial de la deformación, correspondiente a la variación del volumen, se acumula prácticamente sin límite alguno, sin conseguirse el estado límite, es decir, que esta hipótesis contradice a los ensayos. Se propuso, de acuerdo con esto, excluir del cálculo la energía de la variación del volumen y admitir, como criterio del paso del estado elástico al plástico, solamente la energía de la variación de la forma (7.24),

$$U_{0for} = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$

En el caso de tracción simple esta expresión da,

$$U_{\text{ofor}} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma^2.$$

De la condición de que estos estados son igualmente peligrosos se obtiene σ_{eq}, para lo cual igualamos las dos expresiones últimas,

$$\frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma^2_{eq},$$

obteniendo

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (8.2)$$

Cuando el estado tensional está dado en un sistema arbitrario y no en el sistema de los planos principales, de acuerdo a la expresión (7.25), hallaremos,

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}. \qquad (8.3)$$

La fórmula obtenida da resultados numéricos muy cercanos a los que se obtienen por la hipótesis de las tensiones tangenciales máximas, es decir, por la fórmula (8.1). Por lo tanto, las fórmulas (8.2) y (8.3), así como también la fórmula (8.1) son aplicables para juzgar sobre los estados límites de los materiales plásticos, dando resultados menos satisfactorios en el caso de materiales que se resisten de manera diferente a la tracción y a la compresión.

Las hipótesis analizadas de las tensiones tangenciales máximas y de la energía de la variación de la forma son las hipótesis básicas de los estados límites y mantienen su importancia hasta hoy. En los cálculos prácticos las dos dan resultados satisfactorios. La primera de ellas atrae por lo simple e ilustrativa que es, la segunda, a pesar de que las suposiciones iniciales en que se basa son artificiales, nos da las relaciones que sirven de base para la teoría moderna de la plasticidad (capítulo XII). En nuestros tiempos se reconoce universalmente la hipótesis de resistencia de Mohr a cuyo estudio pasamos ahora.

§ 59. Teoría de los estados límites. Teoría de Mohr y su aplicación

Supongamos que disponemos de una máquina de ensayos que permite aplicar a la probeta cualquier estado tensional y variar proporcionalmente todas sus componentes.

Escogemos cierto estado tensional y aumentamos simultáneamente las componentes de este estado. Tarde o temprano, este estado tensional se convertirá en estado límite. La probeta o fallará o aparecerán

en ella deformaciones plásticas. Representamos en el plano σ, τ el mayor de los tres círculos de Mohr para el estado límite (círculo *1* de la figura 300). Consideramos que el estado límite no depende de σ_2. Realizamos otro ensayo sobre la probeta del mismo material, pero para otro estado tensional. Aumentando otra vez las componentes llevamos este estado tensional al estado límite y dibujamos en el diagrama (fig. 300) el círculo correspondiente (círculo *2*).

Procediendo análogamente, obtendremos el conjunto de círculos de Mohr para los estados tensionales límites. Trazamos la envolvente (evolvente) común y consideramos que ésta no depende de las tensiones intermedias principales σ_2, siendo pues la *evolvente única*. Esto constituye la suposición fundamental en esta teoría.

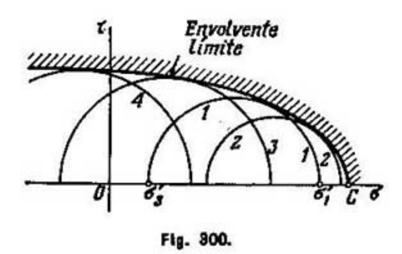


Fig. 300.

La forma de la evolvente de los círculos límites de Mohr depende de las propiedades del material y es una característica mecánica de éste como lo es, por ejemplo, el diagrama de tracción. Si la evolvente de los círculos límites de Mohr del material está dada, resulta posible determinar el coeficiente de seguridad para cualquier estado tensional dado. Para ello, es necesario construir el mayor de los tres círculos de Mohr correspondientes a las tensiones dadas y después, aunque sea gráficamente, determinar cuántas veces se deberán aumentar σ_1 y σ_3 para que el círculo así aumentado sea tangente a la evolvente límite.

Este planteamiento de los problemas de los estados límites no contiene, como vemos, hipótesis sobre los criterios del estado límite y así resulta que la teoría de Mohr se basa, ante todo, sobre la sistematización lógica de los resultados de los ensayos necesarios.

Es necesario ahora resolver el problema de cómo construir la evolvente de los círculos límites cuando se dispone de un número limitado de ensayos. Los ensayos más simples son los de tracción y compresión, es decir, que dos de los círculos límites se obtienen fácilmente (fig. 301). Se puede obtener otro círculo límite más, realizando el ensayo a torsión de un tubo de paredes delgadas. En este caso el material se encontrará en el estado de distorsión pura y el centro de

círculo correspondiente se dispondrá en el origen de las coordenadas (fig. 301). Sin embargo este círculo contribuye muy poco a la determinación de la forma de la evolvente puesto que se encuentra muy cerca de los dos primeros círculos.

Para determinar la evolvente es muy importante conocer la posición del punto C (fig. 300 y 301). La tensión normal en este punto es igual a la tensión de rotura en el caso de tracción triaxial. Hasta ahora no existe ningún método que permita realizar tal ensayo. En general no se consigue realizar el ensayo del estado tensional cuando las tres tensiones principales son de tracción (véase con más detalle el § 112). Por lo tanto, por ahora, no hay posibilidad de construir para el material el círculo límite situado a la derecha del círculo límite de la tracción.

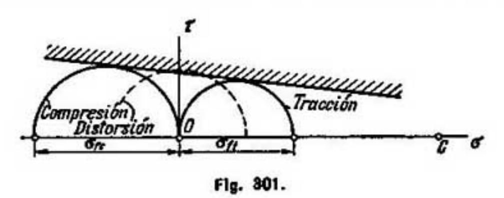


Fig. 301.

Debido a esto, lo más simple y natural es aproximar la evolvente límite con la tangente a los círculos de tracción y compresión (fig. 301). Está claro que esto no excluye la posibilidad de, cuando se encuentren nuevos métodos de ensayos, concretizar la forma de evolvente y reflejar así de manera más completa las particularidades del comportamiento del material en condiciones próximas a la tracción triaxial.

Determinemos ahora σ_{eq}, suponiendo que la evolvente es una recta. En la figura 302 esta evolvente se traza como la tangente a los círculos límites de la tracción y compresión (puntos D y F).

Construyamos ahora el círculo de Mohr para cierto estado tensional dado por las tensiones principales máxima y mínima σ_1 y σ_3 (fig. 302). Si todas las componentes de este estado tensional se aumentan n veces (siendo n el coeficiente de seguridad) entonces el círculo será ya límite. Las tensiones σ_1 y σ_3 adquirirán los valores σ_1^* y σ_3^*:

$$\sigma_1^* = n\sigma_1, \quad \sigma_3^* = n\sigma_3. \tag{8.4}$$

Este círculo límite (aumentado) de Mohr es tangente a la evolvente límite en el punto C'. Al mismo tiempo, según la condición del crecimiento proporcional de las componentes, será tangente también a la continuación de la línea OA en el punto B. Del punto C' trazamos la recta horizontal $C'EG$ y planteamos la proporción,

$$\frac{DE}{C'E} = \frac{FG}{C'G}.$$

Como los segmentos DE y FG constituyen las diferencias de los radios de los círculos en cuestión, obtendremos,

$$DE=\frac{\sigma_{ft}}{2}-\frac{\sigma_1^*-\sigma_3^*}{2},\quad FG=\frac{\sigma_{fc}}{2}-\frac{\sigma_1^*-\sigma_3^*}{2}.$$

Así como también

$$C'E=\frac{\sigma_1^*+\sigma_3^*}{2}-\frac{\sigma_{ft}}{2},\quad C'G=\frac{\sigma_1^*+\sigma_3^*}{2}+\frac{\sigma_{fc}}{2}.$$

Transformando la proporción hallaremos

$$\sigma_{ft}=\sigma_1^*-\frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}\sigma_3^*,$$

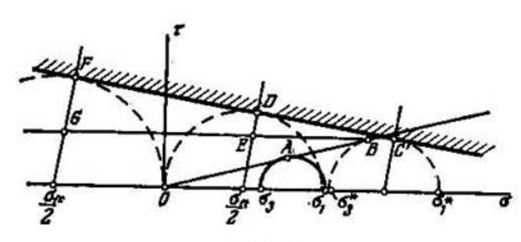


Fig. 302.

o, teniendo en cuenta las expresiones (8.4),

$$n=\frac{\sigma_{ft}}{\sigma_1-\frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}\sigma_3}.$$

Para la tracción equivalente obtenemos,

$$n=\frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{eq}}.$$

De la condición de equivalencia se deduce que los coeficientes de seguridad n de estos estados tensionales son iguales y por lo tanto,

$$\sigma_{eq}=\sigma_1-k\sigma_3, \tag{8.5}$$

siendo k la razón del límite de fluencia en la tracción y el límite de fluencia en la compresión,

$$k=\frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}. \tag{8.6}$$

En el caso de materiales frágiles la razón $\frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}$ se sustituye por $\frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}$.

En el caso particular cuando el material tiene iguales límites de fluencia a tracción y a compresión $k=1$. Entonces la fórmula (8.5) coincidirá con la fórmula (8.1) obtenida anteriormente.

En la actualidad, los cálculos prácticos basados en las tensiones admisibles, en el caso del estado tensional complejo, se realizan, como regla general, por la fórmula (8.5). Al mismo tiempo, si el material tiene iguales características mecánicas a tracción y a compresión, los cálculos se podrán realizar por las fórmulas de la hipótesis de la energía de la variación de la forma. Los resultados numéricos resultan satisfactorios.

La limitación fundamental que se impone al empleo de la teoría de Mohr está relacionada con el hecho de que la exactitud con que se construye la evolvente en la zona de la tracción triaxial es insuficiente. Esta limitación, sin embargo, no es tan importante, puesto que los estados tensionales de este tipo son poco frecuentes en los problemas prácticos. No se conoce con la suficiente exactitud tampoco el aspecto de la evolvente límite en la zona de la compresión triaxial profunda. Debido a la simplificación admitida, aquí también son posibles errores. Los mejores resultados de la fórmula obtenida corresponden al caso de estados tensionales mixtos, es decir, cuando $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_3 < 0$. En este caso el círculo límite de Mohr se sitúa en el intervalo comprendido entre los círculos límites correspondientes a la tracción y a la compresión.

La virtud principal de la teoría de Mohr consiste en el propio principio con que se trata esta cuestión. A esto no siempre se le presta la suficiente atención y, con frecuencia, la teoría de Mohr se sitúa entre las hipótesis conocidas. El hecho de que, en casos particulares, la fórmula de Mohr coincide con la fórmula de la hipótesis de las tensiones tangenciales da la impresión de que estos planteamientos son equivalentes. Sin embargo el planteamiento fenomenológico de Mohr, es decir, el planteamiento basado en la descripción lógica del fenómeno es el más natural y el más justo. Cuando se manifiesta algún error o algún desacuerdo, este planteamiento nos permite precisar la teoría. Así, por ejemplo, si en adelante se consigue realizar los ensayos de las probetas sometidas a tensiones σ_1 y σ_3 positivas, se podrá entonces precisar más la evolvente límite de Mohr, sustituyendo la recta por cierta curva. En este caso la fórmula incluirá no solamente las características del material a tracción y compresión, sino también nuevos exponentes obtenidos de los ensayos adicionales.

El planteamiento fenomenológico adquiere especial importancia en la actualidad debido al amplio empleo en la técnica de nuevos materiales.

Los materiales como el plástico de fibra de vidrio, el tejido de lana de vidrio y, en general, los materiales de estructura fibrosa con frecuencia trabajan en las condiciones del estado tensional complejo. Al analizar estas estructuras no se puede contar con teorías aprobadas. Resulta necesario crear una teoría nueva. Es muy difícil encontrar una teoría adecuada y resulta más conveniente recurrir al planteamiento fenomenológico.

Lo que se ha dicho referente a que en los problemas del estado límite es preferible el planteamiento fenomenológico no quiere decir que ciertas hipótesis no tengan importancia práctica. Estas hipótesis como la hipótesis de las tensiones tangenciales máximas o la de la energía de la variación de la forma, figuran sólidamente en la práctica de los cálculos y resultan muy cómodas, al resolver problemas concretos. La hipótesis de la energía de la variación de la forma adquirió especial importancia en relación con la creación y desarrollo de la teoría de la plasticidad (§ 83).

Veamos algunos ejemplos para ilustrar el empleo de la teoría de los estados límites.

Ejemplo 8.1. Determinar cuál de los tres estados tensionales de la figura 303 es el más peligroso. Las tensiones se dan en kgf/cm². El material se comporta a tracción igual que a compresión ($k=1$).

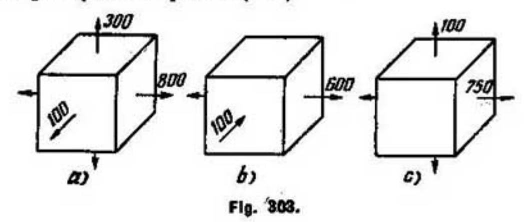


Fig. 303.

Calculamos la tensión equivalente por la fórmula (8.5)

$$\sigma_{eq}=\sigma_1-\sigma_3$$
$$\text{a)}\ \sigma_{eq}=800-100=700\ \text{kgf/cm}^2,$$
$$\text{b)}\ \sigma_{eq}=600-(-100)=700\ \text{kgf/cm}^2,$$
$$\text{c)}\ \sigma_{eq}=750-0=750\ \text{kgf/cm}^2.$$

El estado más peligroso es c). Los estados a) y b) son igualmente peligrosos.

Ejemplo 8.2. Para investigar las profundidades de los mares se emplea un dispositivo que se sumerge en el agua a la profundidad H (fig. 304). El peso del dispositivo en el agua es P, el peso específico del agua γ y el peso espicífico del material del cable γ_c. Determinar las tensiones equivalentes en las secciones superior e inferior del cable, si $k=1$.

En la sección inferior el estado tensional es tridimensional. La tensión de tracción se debe al peso del dispositivo, la de compresión, a la presión del líquido a la profundidad H,

$$\sigma_1=\frac{P}{F}\ ;\quad \sigma_3=-\gamma H;\quad \sigma_{eq}=\frac{P}{F}+\gamma H.$$

La sección superior trabaja exclusivamente a tracción axial debida ésta al peso del dispositivo P y al peso del cable en el agua $P_c=(\gamma_c-\gamma)\ FH$. Así pues, en la sección superior,

$$\sigma_{eq}=\frac{P+P_c}{F}=\frac{P}{F}+(\gamma_c-\gamma)\ H.$$

Si el peso específico del cable supera en más de dos veces el del agua, entonces la sección más peligrosa será la sección superior del cable. Esta sección deberá ser comprobada también en el caso cuando el dispositivo está colgado del cable en el aire, antes de ser sumergido.

Ejemplo 8.3. A través de un sistema de ruedas dentadas se transmite el momento $\mathfrak{M}$ (fig. 305). Dentro de los límites fijados por el dibujo del nudo, este momento se equilibra por el momento $\frac{\mathfrak{M}}{i}$ en la rueda dentada inferior, siendo i la relación de transmisión entre el primer árbol y el segundo. Calcular el diámetro del primer árbol si $\mathfrak{M}=25\ 000$ kgf·cm, $R=8$ cm, $a=80$ cm y $b=10$ cm

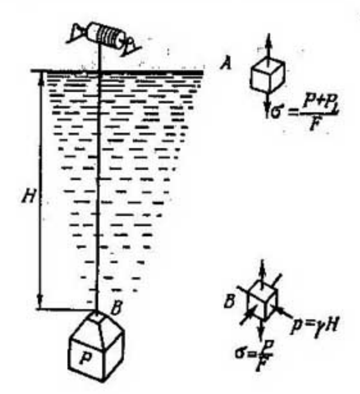


Fig. 304.

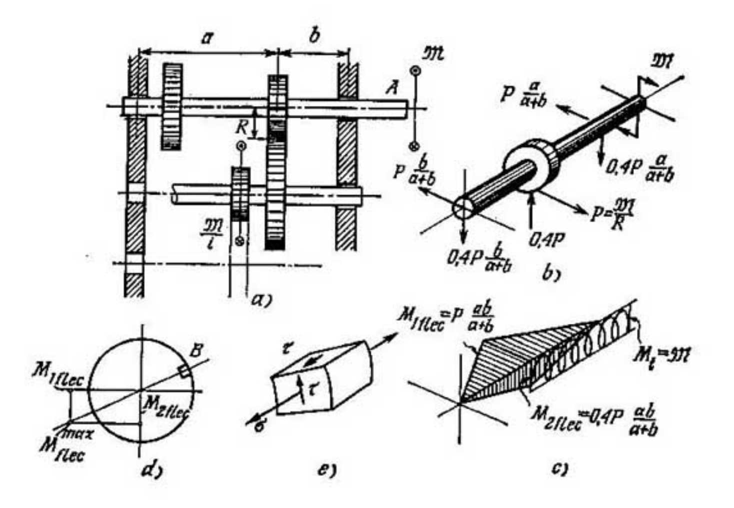


Fig. 305.

El material trabaja a tracción igual que a compresión, $\sigma_{ft}=\sigma_{fc}=3\,000$ kgf/cm². Es necesario garantizar un coeficiente de seguridad igual a dos ($n=2$).

De la condición de igualdad a cero de la suma de los momentos respecto al eje del árbol obtenemos la fuerza tangente que actúa sobre la rueda dentada (fig. 301, *b*)

$$P=\frac{\mathfrak{M}}{R}.$$

Entre las ruedas dentadas aparece no sólo la fuerza tangencial, sino también una fuerza radial P_R. Su magnitud depende del tipo del engranaje. Generalmente se admite que $P_R=0{,}4\,P$. Determinamos las reacciones de apoyo y construimos los diagramas de los momentos flectores y torsores (fig. 305, *c*).

El momento flector máximo resultante es,

$$M_{\text{flec}}^{\max}=\sqrt{\left(P\frac{ab}{a+b}\right)^2+\left(0{,}4P\frac{ab}{a+b}\right)^2};$$

$$M_{\text{flec}}^{\max}=1{,}08\,P\frac{ab}{a+b}.$$

El más peligroso será el punto periférico B de la sección que se encuentra en el plano del momento (fig. 305, *d*).

Escogemos en los alrededores del punto el elemento de la figura 305, *e*. La tensión σ se determina por el momento flector y τ, por el momento torsor,

$$\sigma=\frac{M_{\text{flec}}^{\max}}{0{,}1d^3};\quad \tau=\frac{\mathfrak{M}}{0{,}2d^3}.$$

Hallamos las tensiones principales para el estado tensional obtenido. Como se conoce uno de los planos principales, construimos el círculo de Mohr (fig. 306) y obtenemos,

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2},\quad \sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2},\quad \sigma_2=0. \qquad (8.7)$$

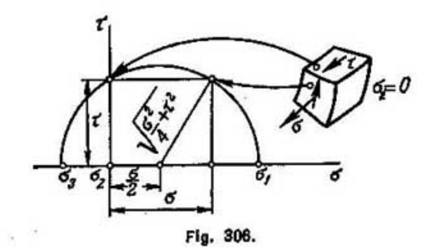


Fig. 306.

Calculamos ahora la tensión equivalente por la fórmula (8.5). Cuando $k=1$ obtendremos,

$$\sigma_{\text{eq}}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

ó

$$\sigma_{\text{eq}}=\sqrt{\left(\frac{M_{\text{flec}}}{0{,}1d^3}\right)^2+4\left(\frac{M_t}{0{,}2d^3}\right)^2}.$$

Introduciendo aquí los valores de los momentos flector y torsor obtendremos definitivamente

$$\sigma_{eq}=\frac{\mathfrak{M}}{0,1d^3}\sqrt{\left[\frac{1,08ab}{R(a+b)}\right]^2+1},$$

y de acuerdo con los valores numéricos dados hallamos el diámetro d,

$$\frac{1}{2}\cdot 3\,000=\frac{25\,000}{0,1d^3}\sqrt{\left(1,08\frac{80\cdot 10}{8\cdot 90}\right)^2+1},\quad d\approx 64\text{ mm}.$$

El estado tensional analizado en este último ejemplo siempre figura en el cálculo de la barra por torsión y flexión (o tracción) simultáneas. Por lo tanto es conveniente obtener, para el caso del estado tensional plano (σ,τ) de la figura 306, la expresión de σ_{eq} a través de las dos componentes indicadas para evitar la determinación intermedia de las tensiones principales.

La fórmula (8.5), después de introducir en ella σ_1, σ_2 y σ_3 de la expresión (8.7), será,

$$\sigma_{eq}=\frac{1-k}{2}\sigma+\frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}. \qquad (8.8)$$

Para $k=1$,

$$\sigma_{eq}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}. \qquad (8.9)$$

La hipótesis de la energía de la variación de la forma [véase la fórmula (8.2)] nos da en este caso,

$$\sigma_{eq}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}. \qquad (8.10)$$

En los cálculos prácticos estas fórmulas se emplean con frecuencia y se debe tener en cuenta constantemente que son válidas *solamente* en el caso del estado tensional indicado.

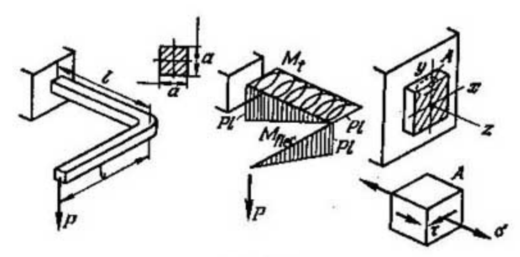


Fig. 307.

Ejemplo 8.4. Determinar la carga admisible para la barra quebrada de la figura 307. El material de la barra es hierro fundido, $\sigma_{rt}=1\,500$ kgf/cm², $\sigma_{rc}=3\,300$ kgf/cm². La sección de la barra es cuadrada de lado $a=3$ cm, la longitud, $l=30$ cm y el coeficiente de seguridad necesario, $n=3$.

Construimos los diagramas de los momentos flectores y torsores. El punto más peligroso es el punto A situado en la sección de empotramiento,

$$\sigma=\frac{6Pl}{a^3}, \quad \tau=\frac{Pl}{0{,}208a^3}.$$

El estado tensional obtenido es semejante al que se analizó en el ejemplo anterior y, por lo tanto, podemos recurrir a la fórmula (8.8). La magnitud k será,

$$k=\frac{1\,500}{3\,300}=0{,}455.$$

Introduciendo los valores numéricos en la fórmula (8.8) obtendremos, $\sigma_{eq}=P\cdot 10{,}94$ y, teniendo en cuenta el coeficiente triple de seguridad dado,

$$P=\frac{1\,500}{3\cdot 10{,}94}\approx 45 \text{ kgf}.$$

Ejemplo 8.5. Comparar las tensiones equivalentes para el prisma rectangular, en los casos de solicitación siguientes:
a) el prisma se comprime libremente y b) el prisma se comprime dentro de una caja rígida que no le permite ensancharse en la dirección transversal (fig. 308).

En el caso a) $\sigma_1=0$; $\sigma_3=-\sigma$ y por lo tanto, $\sigma_{eq}=k\sigma$.

En el caso b) es necesario previamente determinar las tensiones de compresión transversales σ' (fig. 308, c).

Como, según la condición, la deformación transversal es igual a cero, de acuerdo con la ley de Hooke obtendremos,

$$\varepsilon_{trans}=\frac{1}{E}[\sigma'-\mu(\sigma+\sigma')]=0,$$

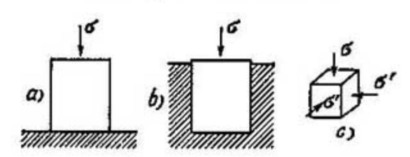


Fig. 308.

resultando que la tensión transversal de compresión será,

$$\sigma'=\frac{\mu}{1-\mu}\sigma.$$

En el estado tensional obtenido,

$$\sigma_1=-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma, \quad \sigma_3=-\sigma, \quad \sigma_{eq}=\left(k-\frac{\mu}{1-\mu}\right)\sigma.$$

La magnitud σ_{eq}, debido a las limitaciones impuestas a las deformaciones transversales, como vemos, disminuye.

Es importante indicar que en el caso de los estados tensionales de compresión triaxial, la teoría de Mohr, a veces, da valores negativos de σ_{eq}. Esto ocurre particularmente en el ejemplo que analizamos cuando $k<\frac{\mu}{1-\mu}$.

La interpretación formal de tal resultado es la siguiente. Si $\sigma_{eq}=0$, el estado tensional presenta el mismo peligro que el estado tensional nulo, cuando $\sigma_{eq}<0$ el estado tensional será menos peligroso que el estado sin tensión alguna. A pesar de que este resultado parece paradójico, no hay por que rechazarlo. Se le puede considerar también como consecuencia de los errores admitidos al trazar la evolvente límite en la zona de compresión triaxial.

En los cálculos prácticos esta cuestión se resuelve limitándose al valor nulo de σ_{eq} al juzgar sobre la resistencia de cualquier estructura, ya que siempre es admisible el caso cuando la pieza cargada y la pieza libre de carga son igualmente peligrosas. Por lo tanto, si del cálculo se obtiene $\sigma_{eq}<0$, entonces se considera $\sigma_{eq}=0$.

Capítulo IX

TUBOS DE PAREDES GRUESAS Y DISCOS QUE GIRAN A GRAN VELOCIDAD

§ 60. Ecuaciones fundamentales para el caso de un cuerpo simétrico respecto a un eje

En este capítulo se analizará el problema de la resistencia del tubo de paredes gruesas y del disco de espesor constante que gira a gran velocidad. La naturaleza de las fuerzas interiores que surgen en el tubo de paredes gruesas bajo la acción de una presión y las que se originan en el disco que gira a gran velocidad es distinta. Sin embargo el cálculo de estas dos piezas conduce a un esquema de cálculo común, al esquema del cuerpo de revolución. El análisis posterior demuestra también que son idénticas las ecuaciones diferenciales que determinan los desplazamientos y las tensiones en los dos casos. Es conveniente, por lo tanto, analizar estos dos problemas simultáneamente.

Veamos, ante todo, las particularidades del esquema de cálculo y deduzcamos las ecuaciones de las deformaciones y las ecuaciones de equilibrio para el sólido cilíndrico simétrico respecto a un eje en el caso más simple cuando las cargas y las tensiones permanecen invariables a lo largo del eje del cilindro. Una vez obtenidas estas ecuaciones, basándonos en ellas, analizaremos los dos problemas indicados anteriormente.

Veamos un cuerpo homogéneo de forma cilíndrica (fig. 309) solicitado, de una u otra manera, pero con carga exterior simétrica respecto al eje y constante a lo largo de este mismo eje. Las dimensiones del cilindro pueden ser las más diversas sin limitar la relación entre los diámetros interior y exterior del cilindro. La longitud del cilindro se considera por ahora arbitraria. En adelante, a este respecto, se introducirán ciertas restricciones. Cada punto del cilindro al deformarse éste, se desplaza. De las condiciones de simetría se deduce que estos desplazamientos ocurren en los planos radiales. El punto puede desplazarse en la dirección del radio y a lo largo de la generatriz correspondiente.

Designamos por u el desplazamiento radial de un punto arbitrario. La magnitud u será función del radio variable r y no variará a lo largo del cilindro. Consideramos positiva la dirección de r que se mide desde el eje del cilindro (fig. 309). En lo que se refiere a los desplazamientos a lo largo del eje, consideraremos que éstos son

originados solamente por el alargamiento o acortamiento general del cilindro. Si existen los desplazamientos axiales, se distribuyen de manera tal que las secciones transversales del cilindro permanecen planas.

Designemos por ε_r y ε_t los alargamientos unitarios en el cilindro en la dirección radial y circunferencial respectivamente y expresémoslos a través del desplazamiento u.

Para ello analizamos el segmento elemental $AB=dr$ que se obtiene en la dirección radial (fig. 310) antes y después de cargar el cilindro.

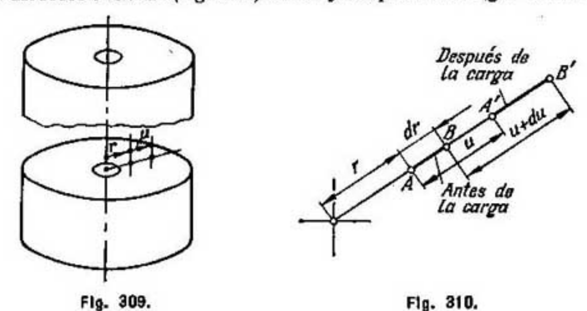


Fig. 309. Fig. 310.

El punto A recibe el desplazamiento u y el punto B, el desplazamiento $u+du$. Es fácil demostrar que la nueva longitud del elemento será $dr+du$ y su alargamiento unitario,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{9.1}$$

Veamos ahora la longitud de la circunferencia trazada dentro del cilindro antes y después de la solicitación (fig. 311). La longitud de la circunferencia antes de la solicitación del cilindro es $2\pi r$. Después de aplicar la carga el radio aumenta en la magnitud u, resultando la longitud de la circunferencia $2\pi\ (r+u)$. El alargamiento unitario circunferencial será,

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi\,(r+u) - 2\pi r}{2\pi r}$$

o sea,

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}. \tag{9.2}$$

Separemos ahora del cilindro un elemento curvilíneo de seis caras (fig. 312). Sus dimensiones son dr, dz y $r\,d\varphi$.

En las secciones axiales del cilindro (plano $ABCD$ del elemento), debido a las condiciones de simetría axial, son nulas las tensiones

tangenciales, y aparecen solamente tensiones normales σ_t denominadas tensiones *circunferenciales.* En las secciones transversales del cilindro (plano *CDEF* del elemento) también se supone que las tensiones tangenciales son iguales a cero. Esto se deduce de la condición de independencia de los desplazamientos u de la coordenada z. En las secciones transversales pueden aparecer tensiones normales (axiales) σ_z que surgen como consecuencia de la solicitación del cilindro por cargas orientadas según el eje. Se supone que estas tensiones no varían tanto en la dirección axial, como radial del cilindro.

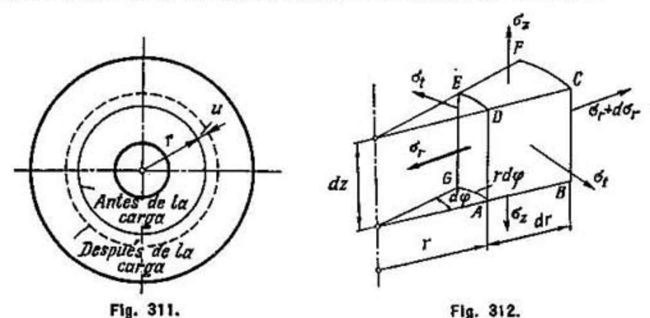


Fig. 311. Fig. 312.

Como los planos *ABCD* y *CDEF* son planos principales, será principal también el plano *ADEG*. Designamos la tensión en este plano por σ_r. Esta tensión se denomina tensión *radial*. Al pasar del radio r al radio $r+dr$ la tensión σ_r recibirá el incremento $d\,\sigma_r$.

De acuerdo con este planteamiento, la determinación de las tensiones y los desplazamientos en el cuerpo de revolución se lleva a cabo por funciones de un solo argumento, el radio r.

Proyectando las fuerzas que actúan sobre el elemento, sobre la dirección del radio, obtendremos la condición de equilibrio siguiente,

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\,d\varphi\,dz - \sigma_r r\,d\varphi\,dz - \sigma_t\,dr\,dz\,d\varphi = 0,$$

de donde se obtiene,

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_t = 0,$$

o sea,

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0. \qquad (9.3)$$

El resto de las ecuaciones de equilibrio del elemento se satisface automáticamente.

De acuerdo con la ley de Hooke generalizada, las tensiones σ_r, σ_t y σ_z están relacionadas con los alargamientos unitarios ε_r

y ε_t como sigue,

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_z)],\ \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)].$$

Consideraremos conocida la tensión σ_z que depende de las condiciones de solicitación del cilindro por fuerzas axiales aplicadas a los extremos. Expresamos ahora las tensiones σ_r y σ_t por ε_r, ε_t y σ_z. De las dos últimas ecuaciones obtendremos,

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z, \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z.$$

Introduciendo aquí ε_r y ε_t de las expresiones (9.1) y (9.2) hallaremos,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z. \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Realicemos, por último, la última operación, eliminando mediante las ecuaciones (9.4) σ_r y σ_t de la ecuación de equilibrio (9.3). Así obtendremos una ecuación con una incógnita u,

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0,$$

que puede ser escrita así,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right] = 0,$$

ó

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right] = 0. \tag{9.5}$$

Si despejamos de esta ecuación u, por las expresiones (9.4) se podrán obtener también las tensiones.

§ 61. Determinación de los desplazamientos y las tensiones en el cilindro de paredes gruesas

Veamos un cilindro de radio interior a y de radio exterior b (fig. 313). Para mayor generalidad suponemos que el cilindro está solicitado simultáneamente por una presión interior p_a y por una presión exterior p_b. En adelante, suponiendo $p_b = 0$ ó $p_a = 0$ podremos analizar el caso de una presión interior solamente o el de una presión exterior. Se debe tener en cuenta que si el cilindro tiene fondo (fig. 314, a), entonces aparecerá en éste una fuerza axial de tracción de magnitud,

$$p_a\pi a^2 - p_b\pi b^2.$$

La tensión axial σ_z será,

$$\sigma_z = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \tag{9.6}$$

Es importante destacar que la longitud del cilindro se supone suficientemente grande para que se pueda considerar que la tensión σ_z está distribuida uniformemente en la sección transversal y que la influencia restrictiva del fondo sobre los desplazamientos radiales del cilindro es muy pequeña.

Veamos aparte del caso analizado, el caso cuando $\sigma_z=0$, como ocurre, por ejemplo, en el cilindro de la figura 314, *b*.

El problema de la determinación de las tensiones y los desplazamientos en el cilindro de paredes gruesas se denomina *problema de Lamé*, científico del siglo pasado que resolvió este problema.

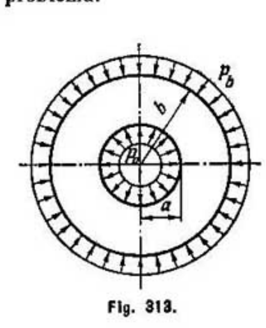
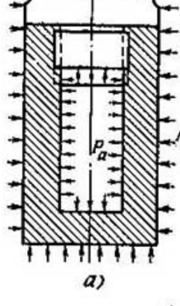


Fig. 313.



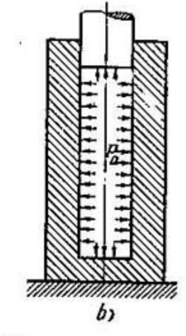


Fig. 314.

Volviendo a la ecuación (9.5) obtendremos el desplazamiento radial,

$$u=C_1r+\frac{C_2}{r}, \tag{9.7}$$

siendo C_1 y C_2 las constantes de integración. Introducimos esta expresión en (9.4) obteniendo,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu)-C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2}\right]+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z,\\ \sigma_t&=\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu)+C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2}\right]+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z.\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las siguientes condiciones de borde: cuando $r=a$ $\sigma_r=-p_a$ y cuando $r=b$ $\sigma_r=-p_b$,

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu)-C_2(1-\mu)\frac{1}{a^2}\right]+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z=-p_a,$$

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu)-C_2(1-\mu)\frac{1}{b^2}\right]+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z=-p_b,$$

de donde se obtiene,

$$C_1 = \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\mu}{E} \sigma_z,$$

$$C_2 = \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{1}{1-\mu} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_a - p_b).$$

Una vez excluidas las constantes C_1 y C_2, las expresiones (9.7) y (9.8) serán,

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\mu}{E} \sigma_z r. \qquad (9.9)$$

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \qquad (9.10)$$

Las expresiones de σ_r y σ_t se dan aquí en una misma fórmula. Al subíndice superior corresponde el signo negativo y al inferior, el signo positivo.

La existencia de la tensión axial σ_z influye solamente sobre la magnitud del desplazamiento radial u. Cuando el cilindro se presiona en la dirección axial, de las expresiones (9.6) y (9.9) obtendremos,

$$u = \frac{1-2\mu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \qquad (9.11)$$

Cuando no existe la fuerza axial,

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \qquad (9.12)$$

Veamos ahora algunos casos particulares.

Cilindro sometido a presión interior. En este caso $p_a = p$ y $p_b = 0$. De la expresión (9.10) se obtiene,

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right). \qquad (9.13)$$

En la figura 315 están representados los diagramas de la variación de las tensiones radial y circunferencial dentro del espesor del cilindro solicitado por una presión interior. La tensión circunferencial, como era de esperar, resultó de tracción y la radial, de compresión. En la superficie interior σ_t adquiere su máximo valor,

$$\sigma_{t\,(r=a)} = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

La tensión radial es aquí igual a $-p$.

Según la teoría de las tensiones tangenciales máximas (cuando no existe la fuerza axial, es decir, cuando $\sigma_z = 0$),

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p)$$

o sea,

$$\sigma_{eq} = p\frac{2b^2}{b^2-a^2}. \tag{9.14}$$

Es muy importante seguir la variación de las tensiones σ_r y σ_t a medida que disminuye el espesor del cilindro. Admitamos que

$$b = a + \delta$$

siendo δ, el espesor del cilindro. Entonces,

$$\sigma_{t\,(r=a)} = p\frac{(a+\delta)^2+a^2}{\delta(2a+\delta)}, \quad \sigma_{t\,(r=b)} = p\frac{2a^2}{\delta(2a+\delta)}.$$

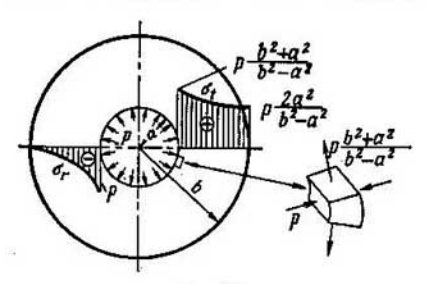


Fig. 315.

Cuando δ es pequeño,

$$\sigma_{t\,(r=a)} \approx \sigma_{t\,(r=b)} \approx p\frac{a}{\delta}.$$

La tensión radial σ_r en la superficie interior es $-p$ y en la exterior, cero, independientemente del espesor del cilindro. Así pues, vemos que en el caso de un cilindro de pared de espesor pequeño las tensiones circunferenciales se distribuyen casi uniformemente y las radiales, son pequeñas en comparación con las circunferenciales en la misma medida en la que el espesor δ es pequeño en comparación con el radio.

Si el espesor del cilindro aumenta, entonces las tensiones máximas que en él se desarrollan, manteniendo constante la presión, disminuyen, pero no de manera ilimitada. Veamos el caso cuando $b \to \infty$, es decir, cuando el cilindro es de espesor infinito. En este caso la expresión (9.13) será,

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \mp p\frac{a^2}{r^2}.$$

Esto indica que cuando el espesor del cilindro es infinitamente grande la tensión radial en cualquier punto será igual a la circunferencial (fig. 316) y en el caso cuando no existen tensiones axiales todos los puntos se encontrarán en el estado de distorsión pura. Como vemos,

las tensiones son inversamente proporcionales al cuadrado del radio r. Si, por ejemplo, $r=4a$, entonces en los puntos situados a esta distancia del eje, las tensiones constituirán solamente 1/16 parte de las tensiones máximas. Por lo tanto, cuando es suficiente realizar los cálculos con una exactitud del orden del 5—6% (mayor exactitud es,

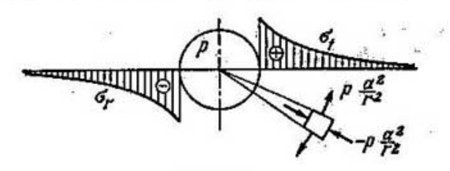


Fig. 316.

prácticamente, imposible aunque sea por el hecho de que los materiales no son perfectamente elásticos), el cilindro para el cual $\frac{b}{a} > 4$ se puede considerar de espesor infinitamente grande. Es muy importante el hecho de que al mismo tiempo no dependemos de la forma del contorno exterior. Si todos los puntos del contorno exterior están alejados del eje del orificio interior a una distancia mayor que $4a$, entonces la configuración del contorno exterior podrá ser arbitraria.

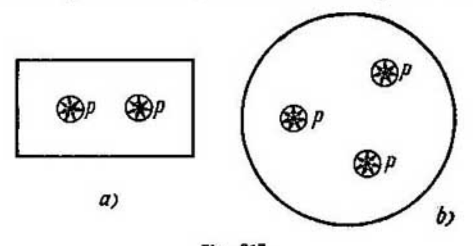


Fig. 317.

El cálculo de los cuerpos elásticos como los indicados, por ejemplo, en la figura 317, se reduce al esquema del cilindro de pared infinitamente gruesa.

La tensión equivalente es de acuerdo a la expresión (9.14), cuando $b \to \infty$,

$$\sigma_{eq} = 2p.$$

Por lo tanto, si, por ejemplo, el límite de elasticidad del material es 6 000 kgf/cm², en el caso del cilindro de espesor infinitamente grande las deformaciones serán elásticas para presiones inferiores a 3 000 kgf/cm². Más adelante hablaremos de las posibilidades que sur-

gen para garantizar la resistencia en el caso de presiones mayores aún.

Cilindro solicitado por presión exterior. En este caso $p_a=0$, $p_b=p$. La expresión (9.10) será enconces,

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = -\frac{pb^2}{b^2-a^2}\left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right).$$

En la figura 318 están representados los diagramas de las tensiones en el espesor del cilindro para este caso de solicitación. La tensión

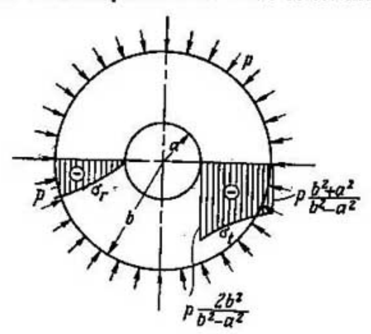


Fig. 318.

equivalente máxima ocurre en la superficie interior del cilindro. Cuando no existe la fuerza axial,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(-p\frac{2b^2}{b^2-a^2}\right),$$

ó

$$\sigma_{eq} = p\frac{2b^2}{b^2-a^2}.$$

Esta expresión coincide con la del caso de solicitación por presión interior.

Si no existe el orificio interior, es decir, si $a=0$, entonces las tensiones en el cilindro se distribuirán de manera uniforme,

$$\sigma_r = \sigma_t = -p.$$

Ejemplo 9.1. Calcular el diámetro exterior $2b$ del cilindro sometido a una presión interior de $p=500$ atm, si el coeficiente de seguridad es igual a dos. El límite de fluencia del material es $\sigma_{ft}=\sigma_{fc}=5\,000$ kgf/cm². El diámetro interior se considera dado $2a=10$ cm.

Los más peligrosos son los puntos situados en la superficie interior del cilindro. Por las fórmulas (9.13) y (9.6) obtendremos,

$$\sigma_r = -p;\quad \sigma_t = p\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2};\quad \sigma_z = p\frac{a^2}{b^2-a^2}.$$

Puesto que $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_3 = \sigma_r$, entonces

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = p\,\frac{2b^2}{b^2 - a^2}.$$

Introduciendo en esta expresión los valores numéricos hallaremos,

$$2b = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\,a = 12{,}9 \text{ cm}.$$

§ 62. Determinación de las tensiones en los tubos compuestos

Hemos visto anteriormente que el aumento del espesor del tubo no puede, en todos los casos, garantizar la resistencia necesaria. Cuando el espesor tiende al infinito $\sigma_{eq} = 2p$.

Cuando en el tubo de paredes gruesas es necesario mantener una alta presión, por ejemplo, de 15 000 atm, resulta necesario que el límite de fluencia del material sea, por lo menos, dos veces superior,

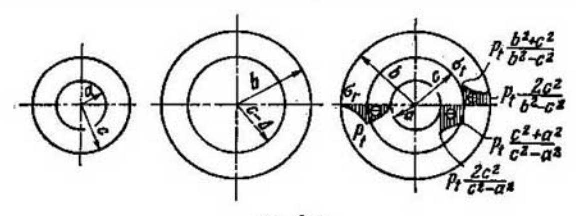


Fig. 319.

es decir, 30 000 kgf/cm². En la actualidad no existen materiales de tan alta resistencia. Es decir, para los recipientes de alta presión es necesario buscar otras soluciones constructivas nuevas. Una de ellas la constituye la creación de cilindros compuestos y unidos a presión. Este método se usa tanto en la técnica de altas presiones como en la artillería para consolidar los cañones de las piezas pesadas.

Supongamos dos cilindros (fig. 319). Designamos por a el radio interior del primer cilindro, y por c, el radio exterior. El radio interior del segundo cilindro es una magnitud Δ menor que el radio exterior del primer cilindro, es decir, $c - \Delta$. El radio exterior del segundo cilindro es b. Si calentamos el segundo cilindro, aumentará así su radio interior resultando que el primer cilindro se podrá introducir libremente en el segundo. Durante el enfriamiento entre los cilindros surgirá la presión de contacto p_k. Calculemos esta presión.

Durante el encaje el radio exterior del cilindro interior disminuye y los puntos del cilindro situados sobre la superficie de contacto recibirán un desplazamiento negativo u_1. El radio interior del tubo

exterior aumentará y aparecerá aquí un desplazamiento positivo $+u_2$. La suma $u_2+(-u_1)$ deberá ser igual a la apretura Δ,

$$u_2-u_1=\Delta. \qquad (9.15)$$

El desplazamiento u_1 se obtiene por la fórmula (9.12) suponiendo en ella $p_a=0$, $b_b=p_k$ y sustituyendo b y r por c. Así se obtiene,

$$u_1=-\frac{1-\mu}{E}\frac{c^3}{c^2-a^2}p_k-\frac{1+\mu}{E}\frac{a^2c}{c^2-a^2}p_k.$$

Por la misma fórmula (9.12) hallamos u_2. Para ello suponemos $p_b=0$, $p_a=p_k$ y $a=r=c$:

$$u_2=\frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{c^3}{b^2-c^2}p_k+\frac{1+\mu}{E}\frac{b^2c}{b^2-c^2}p_k.$$

Suponemos que el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson μ son iguales para los dos cilindros.

De acuerdo a la expresión (9.15) obtenemos,

$$p_k=\frac{E\Delta}{2c^3}\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{b^2-a^2}. \qquad (9.16)$$

Así pues, como resultado del ajuste, el cilindro interior queda sometido a una presión exterior p_k y el cilindro exterior, a una presión

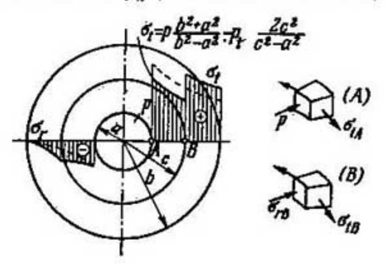


Fig. 320.

interior igual a la primera. El cuadro de la distribución de las tensiones en los cilindros unidos se da en la figura 319.

Si se somete ahora el cilindro compuesto a una presión interior, entonces las dos partes del cilindro trabajarán como una sola, resultando que las tensiones que se originan, se determinarán por la fórmula (9.13). Estas tensiones se sumarán algebraicamente con las tensiones originales debidas a la apretura (fig. 320). En los puntos interiores, los más tensados, las tensiones de trabajo y las de la apretura son de signo contrario. Por lo tanto, la tensión total aquí disminuye resultando que el cilindro compuesto es capaz de resistir mayor presión que el tubo simple. Se debe tener en cuenta, sin em-

bargo, que como consecuencia de la apretura, en la zona de contacto, en el cilindro exterior, aumentan las tensiones. Por lo tanto la apretura Δ se debe escoger para la presión de trabajo dada p, de manera tal que se garantice la resistencia tanto del cilindro interior como del exterior. Es fácil plantear la condición de igualdad de resistencia de los dos cilindros (fig. 320),

$$\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}.$$

De acuerdo a la expresión (9.10) obtendremos: para el punto A,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = p\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - p_k\frac{2c^2}{c^2-a^2} - (-p) \qquad (9.17)$$

y para el punto B,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right) + p_k\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} - \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right) - (-p_k).$$

Igualando estas dos expresiones, obtendremos

$$p\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2} = p_k\left(\frac{b^2}{b^2-c^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2}\right). \qquad (9.18)$$

Si introducimos aquí p_k, de la expresión (9.16) obtendremos la apretura Δ que garantiza la igualdad de resistencia en el caso de la presión de trabajo dada p,

$$\Delta = \frac{2p}{E}\frac{cb^2(c^2-a^2)}{b^2(c^2-a^2)+c^2(b^2-c^2)}. \qquad (9.19)$$

Si eliminamos, por último, de la expresión (9.17) la presión de contacto p_k (9.18) hallaremos,

$$\sigma_{eq} = p\frac{2b^2}{b^2-a^2}\left[1-\frac{1}{\frac{b^2}{b^2-c^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2}}\right].$$

El valor mínimo de esta magnitud corresponde a $c=\sqrt{ab}$:

$$\sigma_{eq}^{min} = p\frac{b}{b-a}. \qquad (9.20)$$

Las relaciones obtenidas se denomian *condiciones de Gadolin*, científico ruso que las obtuvo por primera vez.

Comparando las expresiones (9.20) y (9.14) observamos que la apretura de los tubos conduce a una reducción substancial de la tensión equivalente. Analicemos, a manera de comparación, la relación entre las expresiones de σ_{eq} obtenidas por estas fórmulas,

$$\frac{\sigma_{eq}^{min}}{\sigma_{eq}} = \frac{b+a}{2b}.$$

Si el radio interior a del cilindro es pequeño, entonces la apretura de los tubos, según las relaciones de Gadolin, conducirá a una reducción de casi la mitad de la tensión equivalente. En el caso de tubos de paredes delgadas, $a \approx b$, la apretura de los tubos no es efectiva.

En la técnica de las grandes presiones se emplea, aparte de la apretura, el autozunchado que consiste en que el cilindro se somete previamente a una presión interior mayor que la presión de trabajo de tal manera que en las capas interiores del cilindro aparezcan deformaciones plásticas. Después de retirar la carga en las capas exteriores del cilindro se mantienen las tensiones elásticas de tracción y en las capas interiores aparecen tensiones de compresión (fig. 321).

Al cargar después el cilindro con cierta presión, las tensiones residuales se suman con las de trabajo de tal manera que en las capas interiores ocurre una descarga parcial. El material del cilindro no recibirá deformaciones plásticas siempre que la presión de trabajo no supere la presión de compresión inicial.

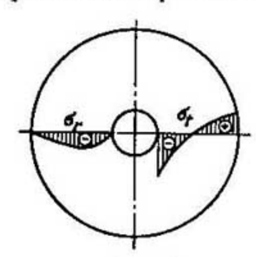


Fig. 321.

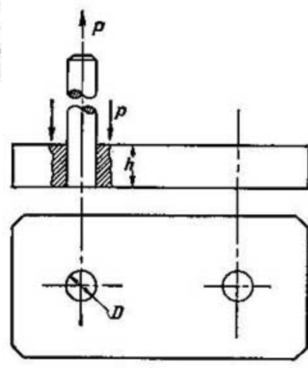


Fig. 322.

Ejemplo 9.2. Calcular los diámetros $2c$ y $2b$ y la magnitud de la apertura Δ para el cañón de dos capas, de diámetro interior $2a=100$ mm. La presión máxima en el momento del disparo es $p_{max}=2\,000$ kgf/cm². El material es acero. $E=2\cdot 10^6$ kgf/cm². $\sigma_{ft}=\sigma_{fc}=6\,000$ kgf/cm². El coeficiente de seguridad no debe ser menor de dos.

Por la fórmula (9.20) hallamos b,

$$\frac{6\,000}{2}=2\,000\,\frac{b}{b-a};\ b=3a.$$

El radio intermedio c constituye la media geométrica entre a y b,

$$c=\sqrt{ab}=a\sqrt{3}.$$

Los valores numéricos de los diámetros son: $2a=100$ mm; $2b=300$ mm; $2c=173$ mm.

La expresión (9.19), una vez introducido en ella $c=\sqrt{ab}$, será,

$$\Delta=\frac{p}{E}\sqrt{ab}.$$

De aquí se obtiene la apretura

$$\Delta=\frac{2\,000}{2\cdot 10^6}\sqrt{50\cdot 150}=0{,}0865\ \text{mm}.$$

Ejemplo 9.3. Una barra de acero está introducida a presión en una plancha de acero también (fig. 322). Determinar la fuerza que se debe aplicar a la barra

en la dirección axial para sacarla de la plancha. Se consideran dados: la apretura $\Delta=0,03$ mm, el diámetro de la barra $D=60$ mm, el espesor de la plancha $h=100$ mm y el coeficiente de rozamiento entre la plancha y la barra $f=0,25$.

Prescindiendo de las particularidades relacionadas con la distribución no uniforme de la apretura en el espesor de la losa consideramos que la fuerza que se busca coincide con la fuerza de rozamiento,

$$P=fp_k\pi Dh,$$

siendo p_k, la presión de contacto, que se obtiene por la fórmula (9.16), si consideramos que

$$a=0,\ b=\infty\ \text{y}\ c=\frac{D}{2},$$

$$p_k=E\frac{\Delta}{D}=2\cdot 10^6\frac{0,03}{60}=1\,000\ \text{kgf/cm}^2.$$

La fuerza que se busca será,

$$P=0,25\cdot 1\,000\pi\cdot 6\cdot 10=47\,100\ \text{kgf}.$$

§ 63. Discos de espesor constante que giran a gran velocidad

El problema de la determinación de las tensiones en un disco que gira a gran velocidad, como se dijo ya, se reduce al esquema de cálculo del cuerpo de revolución examinado anteriormente.

Es bien conocido que cuando el número de revoluciones es grande, las piezas como los discos de las turbinas de gas y de vapor, las muelas de rectificar y otras, pueden recibir deformaciones residuales apreciables o destruirse. Esto conduce, como regla general, a averías graves. Es por esto, que se plantean rigurosas exigencias a la resistencia de los discos que giran a gran velocidad.

Veamos un disco que gira con velocidad angular constante ω (fig. 323). Para simplificar el problema consideramos que el espesor del disco es constante e igual a h. La manera más simple de determinar las tensiones en el disco consiste en aplicar el principio de D'Alembert, considerando como fuerzas exteriores las fuerzas de inercia distribuidas sobre el volumen del disco. La fuerza de inercia que actúa sobre el elemento del volumen $hr\,d\varphi\,dr$ (fig. 323) es igual al producto de la masa $\frac{\gamma}{g}hr\,d\varphi\,dr$ por la aceleración normal ω^2r,

$$dP=\frac{\gamma h}{g}\omega^2r^2d\varphi\,dr,$$

siendo γ, el peso específico del material del disco. La fuerza dP, según el principio de D'Alembert, se dirige en sentido contrario a la aceleración, es decir, desde el eje del disco.

Volviendo a las ecuaciones obtenidas en el comienzo del capítulo, designamos, como hasta ahora, por u el desplazamiento radial, por σ_r y σ_t, las tensiones radial y circunferencial que surgen en el disco.

La tensión σ_z en este caso puede no considerarse puesto que no existen fuerzas axiales.

Las ecuaciones (9.1) y (9.2), obtenidas anteriormente, siguen aquí en vigor, mientras que la ecuación de equilibrio (9.3) debe ser precisada. Entre las fuerzas que actúan sobre el elemento debe incluirse la fuerza dP (fig. 324). Hallamos la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el radio r y la igualamos a cero,

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)\,h\,d\varphi - \sigma_r rh\,d\varphi - \sigma_t h\,dr\,d\varphi + \frac{\gamma}{g} h\omega^2 r^2\,d\varphi\,dr = 0,$$

obteniendo,

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = -\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2. \quad (9.21)$$

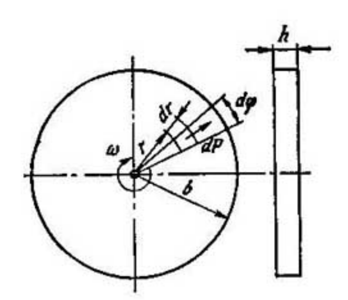


Fig. 323.

Las operaciones que siguen en nada se diferencian de las que se realizaron para el cilindro. Así llegamos, como en el caso anterior,

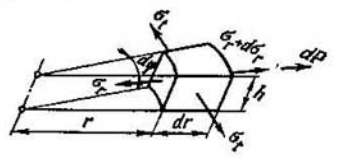


Fig. 324.

a la ecuación (9.5), pero con otro segundo miembro,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right] = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{g}r.$$

Después de una doble integración, en lugar de la expresión (9.7), obtendremos,

$$u = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{g}\frac{r^3}{8} + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (9.22)$$

De la expresión (9.4), suponiendo $\sigma_z = 0$, determinamos las tensiones radial y circunferencial,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) - C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)r^2,\\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) + C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(1+3\mu)r^2.\end{aligned}\right\} \quad (9.23)$$

Pasemos ahora a las condiciones de borde. En el borde exterior del disco la tensión radial σ_r es igual a cero, o sea,

$$\sigma_{r\,(r=b)} = 0.$$

En el borde interior del disco las condiciones están menos determinadas. Generalmente el disco, de una u otra manera, se une al árbol. Si el disco y el árbol constituyen un todo (fig. 325, *a*) entonces el disco podrá ser prolongado hasta el eje y, prescindiendo de la acción soportadora del árbol, y ser considerado macizo como primera aproximación (fig. 325, *b*). En este caso el punto $r=0$ también pertenece al disco. Para que el desplazamiento u y las tensiones σ_r y σ_t sean en el

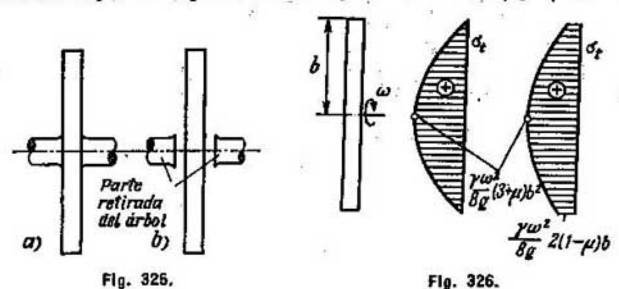


Fig. 325. Fig. 326.

centro limitados es necesario que $C_2=0$. Así pues, queda por determinar solamente la constante C_1 que se halla de la condición de igualdad a cero de la tensión σ_r en el borde exterior,

$$\frac{E}{1-\mu^2}C_1(1+\mu)-\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)R^2=0.$$

De aquí se obtiene,

$$C_1=\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{8g}b^2\frac{3+\mu}{1+\mu}.$$

La expresión (9.23) será entonces,

$$\sigma_r=\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)(b^2-r^2),\quad \sigma_t=\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)\left(b^2-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right).$$

En la figura 326 están representados los diagramas de las tensiones para este caso.

Si el disco tiene un orificio de radio a en el centro y está unido débilmente al árbol (fig. 327), entonces se podrá considerar que en borde interior la tensión σ_r es también igual a cero. Las constantes C_1 y C_2 se determinarán en este caso de las condiciones siguientes, cuando $r=b$,

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu)-C_2(1-\mu)\frac{1}{b^2}\right]-\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)b^2=0,$$

cuando $r=a$

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu)-C_2(1-\mu)\frac{1}{a^2}\right]-\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)a^2=0.$$

De aquí se obtiene,

$$C_1(1+\mu)=\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)(b^2+a^2),$$
$$C_2(1-\mu)=\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)a^2b^2.$$

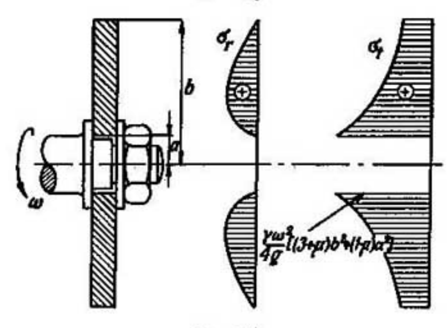


Fig. 327.

Las expresiones (9.23) serán en este caso,

$$\sigma_r=\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)\left(b^2+a^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2\right),$$
$$\sigma_t=\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)\left(b^2+a^2+\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right).$$

En la figura 327 se dan los diagramas de las tensiones correspondientes a $b=5a$.

Las tensiones máximas en el disco ocurren siempre en la parte central. Es por esto que los discos de las turbinas que giran a gran velocidad se hacen como regla general de espesor variable, de mayor espesor en el centro y de menos espesor en la periferia.

Capítulo X

PLACAS Y BOVEDAS

§ 64. Particularidades fundamentales de las placas y bóvedas

La mayoría de los elementos de las estructuras de ingeniería que se someten al cálculo se puede reducir al esquema de cálculo de la barra o la bóveda.

Como se dijo ya, se entiende por barra todo cuerpo que tiene una dimensión (longitud) mucho mayor que las otras dos. Hasta aquí se analizaron los elementos de las estructuras cuyo esquema es la barra. Pasemos ahora al estudio de las bóvedas.

Se entiende por *bóveda* todo cuerpo que tiene una dimensión mucho menor que las otras dos. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de las dos superficies de la bóveda se denomina *superficie media.* Si la superficie media de la bóveda es un plano, esta bóveda se denomina *placa*. Las placas se clasifican en función de la configuración del borde exterior. Las placas pueden ser circulares, rectangulares, trapezoidales, etc. Si la superficie media constituye parte de una esfera, de un cono o de un cilindro, la bóveda se denomina entonces esférica, cónica o cilíndrica respectivamente. La geometría de la bóveda se determina no sólo por la forma de la superficie media. Es necesario conocer también la ley de variación del espesor de la bóveda. Sin embargo, todas las bóvedas que se encuentran en la práctica tienen, como regla general, espesor constante.

Se llaman bóvedas *de revolución* o simplemente bóvedas *simétricas* aquellas cuya superficie media es una superficie de revolución. Suponemos en adelante que la carga que actúa sobre esta bóveda también es simétrica respecto al eje. El cálculo de este tipo de bóvedas se simplifica considerablemente. Esto ocurre porque todas las fuerzas interiores en esta bóveda no varían a lo largo del arco de la circunferencia y dependen solamente del radio variable o de la longitud de arco que se mide a lo largo de la generatriz del cuerpo de revolución. La distribución de las tensiones en las bóvedas que no son simétricas se obtiene de manera mucho más complicada.

Al esquema de la bóveda de revolución se reduce el cálculo de muchas estructuras, calderas y recipientes, piezas de máquinas y dispositivos, comenzando por piezas tan pequeñas como la caja elásti-

ca de un variómetro*) (fig. 328) de diámetro 40 mm y 0,2 mm de espesor y terminando por estructuras como la bóveda de un planetario representada en la figura 329. El esquema de la placa se encuentra en

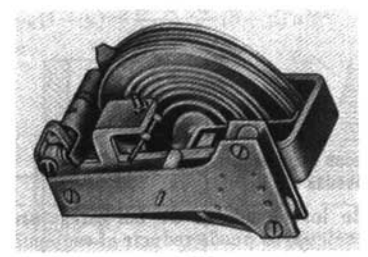


Fig. 328.

los cálculos del fondo plano de un recipiente, de las paredes de diversos recipientes, de los diafragmas planos en las estructuras de los aviones y de otros muchos elementos.

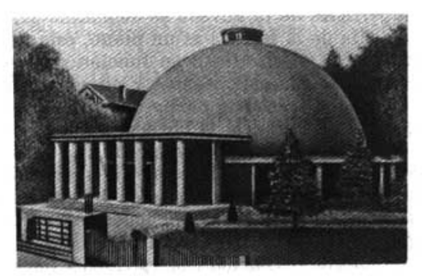


Fig. 329.

Está claro, que el cálculo de la pared de un depósito o la caja elástica del variómetro no se puede realizar por los métodos que se aplicaron al esquema de la barra en los capítulos anteriores.

El cálculo de las bóvedas de revolución se realiza con la máxima simplicidad cuando se puede considerar que las tensiones que surgen en la bóveda son constantes en el espesor y, por lo tanto, no hay flexión de la bóveda. La teoría de las bóvedas que basa en esta suposición se denomina *teoría membranal de las bóvedas*.

---

*) Dispositivo para la medición de la velocidad de elevación del avión.

Si la bóveda no presenta cambios bruscos y no tiene empotramientos rígidos y si, al mismo tiempo, no sostiene cargas ni momentos concentrados, entonces se la puede calcular con éxito por la teoría membranal. Cuando existen las particularidades indicadas, en los lugares donde se fija la bóveda y en los lugares donde varía bruscamente la configuración de la bóveda, aparecen grandes tensiones debidas al efecto de la flexión. La solución de estos problemas por métodos más exactos, teniendo en consideración los momentos flectores, demuestra que la zona de las tensiones elevadas, originadas por la flexión, es en la mayoría de los casos, muy limitada y, por lo tanto, en los lugares suficientemente lejanos de estas zonas especiales se pueden determinar las tensiones por la teoría membranal. La determinación de las tensiones en las zonas indicadas requiere una investigación especial. Se debe, por último, indicar que cuanto menor es el espesor de la bóveda, tanto más exacta será la ley que supone que las tensiones son constantes en el espesor de la bóveda y tanto más exactos serán los resultados de la teoría membranal.

Lo expuesto se demuestra en el cálculo del recipiente cilíndrico que se realizó en el § 61. Allí se demostró que, en el caso de un cilindro de paredes delgadas, la tensión circunferencial se puede considerar constante dentro del espesor. La tensión radial, en el caso de pequeño espesor, resultó ser despreciablemente pequeña en comparación con la tensión circunferencial, debido a que esta última resultó ser muy grande.

Las cuestiones de la teoría general de las bóvedas salen fuera de los marcos del curso de resistencia de materiales y constituyen, en la actualidad, una parte independiente y bien desarrollada de la mecánica.

Comencemos por los problemas más simples de la teoría membranal. Después se analizarán problemas relacionados con las tensiones originadas por la flexión en los casos más simples de solicitación de placas y de cilindros de paredes delgadas.

§ 65. Determinación de las tensiones en las bóvedas simétricas por la teoría membranal

Veamos una bóveda simétrica de espesor h (fig. 330). Designemos por ρ_m el radio de curvatura del arco del meridiano de la superficie media (fig. 330, *a*) y por ρ_t, el segundo radio principal, es decir, el radio de curvatura de la sección normal perpendicular al arco del meridiano. Este radio es igual al segmento de la normal entre la superficie media y el eje de simetría (fig. 330, *a*). ρ_m y ρ_t son, en el caso general, funciones del ángulo θ entre la normal y el eje de simetría.

Con dos pares de secciones meridionales y normales cónicas (fig. 330, *b*) separamos un elemento de la bóveda de dimensiones ds_1 y ds_2, como el indicado en la figura 331. Consideramos que sobre las

caras del elemento actúan las tensiones σ_m y σ_t. La primera de ellas se denominará tensión *meridional*. El vector de esta tensión se orienta según el arco del meridiano. La segunda tensión σ_t se denomina tensión *circunferencial*. Multiplicando las tensiones σ_m y σ_t por las áreas

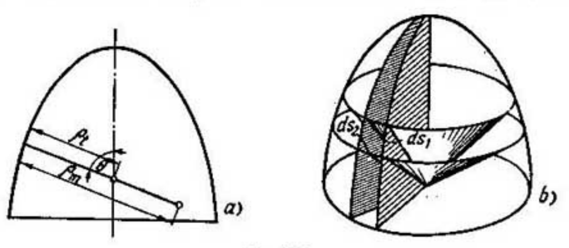


Fig. 330.

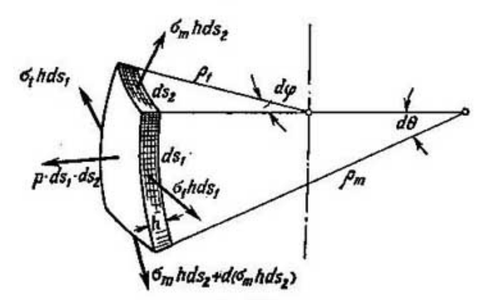


Fig. 331.

correspondientes de las caras del elemento se obtienen las fuerzas $\sigma_m\, h\, ds_2$ y $\sigma_t h\, ds_1$, representadas en la figura 331. A este elemento se le aplica también la fuerza de la presión normal $p\, ds_1\, ds_2$. Proyectando todas las fuerzas sobre la normal se obtiene,

$$p\, ds_1\, ds_2 - \sigma_m h\, ds_2\, d\theta - \sigma_t h\, ds_1\, d\varphi = 0.$$

Como

$$d\theta = \frac{ds_1}{\rho_m},\quad d\varphi = \frac{ds_2}{\rho_t},$$

obtendremos definitivamente

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}. \tag{10.1}$$

Esta relación se conoce como la *ecuación de Laplace*.

En el caso del elemento de la figura 311 se puede plantear también otra ecuación, proyectando todas las fuerzas sobre la dirección del eje de la bóveda, pero es más conveniente plantearla, no para el elemento, sino para la parte de la bóveda separada por la sección cónica normal (fig. 332).

Designando por P la fuerza resultante axial de las fuerzas exteriores hallaremos,

$$\sigma_m 2\pi rh \operatorname{sen} \theta = P. \qquad (10.2)$$

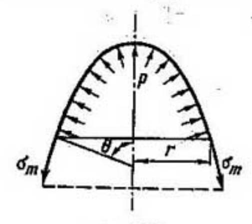


Fig. 332.

De esta ecuación se obtiene la tensión meridional σ_m. Así pues, según la teoría membranal, las tensiones σ_m y σ_t en la bóveda se determinan de las ecuaciones de equilibrio.

La tercera tensión principal constituida por la presión entre las capas de la bóveda se supone muy pequeña y se considera que el estado tensional de la bóveda es biaxial. En efecto, el valor máximo absoluto de la tensión radial es igual a la presión normal p, mientras que σ_m y σ_t, según la ecuación de Laplace, son del orden de $p\frac{\rho_m}{h}$ ó $p\frac{\rho_t}{h}$.

Antes de pasar al análisis de ejemplos concretos de cálculo por la teoría membranal, demostremos los dos teoremas siguientes.

Teorema 1. Si sobre cierta superficie actúa una presión uniformemente distribuida, entonces, independientemente de la forma de la superficie, la proyección de la resultante de las fuerzas de presión sobre el eje dado será igual al producto de la presión p por el área de la proyección de la superficie sobre el plano perpendicular al eje dado.

Supongamos dada la superficie F (fig. 333), sobre la cual actúa una presión uniformemente distribuida p. Determinar la proyección, sobre el eje x, de la resultante de las fuerzas de presión. Esta proyección P_x será,

$$P_x = \int_F p \cos \varphi \, dF,$$

siendo φ, el ángulo entre la normal a la superficie y el eje x.

El área de la proyección del elemento dF sobre el plano X perpendicular al eje x será,

$$dF' = dF \cos \varphi$$

y, por lo tanto,

$$P_x = p \int_F dF' = pF'.$$

Así pues, para determinar la proyección de la resultante de las fuerzas de presión sobre el eje x es necesario proyectar previamente la

superficie sobre el plano X y multiplicar después la presión por el área de esta proyección. Esto es lo que se pretendía demostrar.

Teorema 2. Si sobre cierta superficie actúa la presión de un líquido (fig. 334), entonces la componente vertical de las fuerzas de presión será igual al peso del líquido en el volumen situado sobre la superficie.

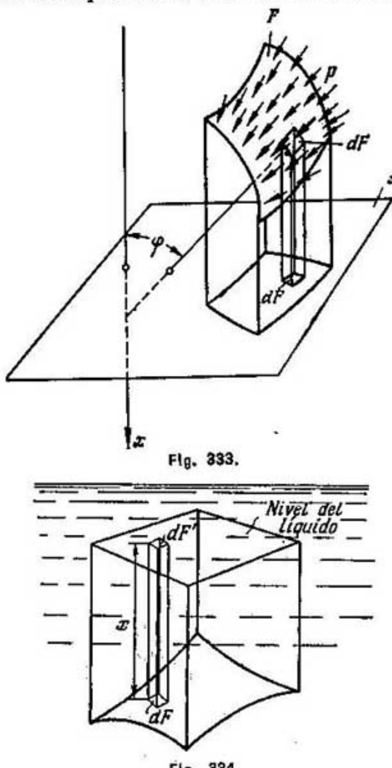


Fig. 333.

Fig. 334.

La componente vertical de las fuerzas de presión para el área dF es, de acuerdo al primer teorema, igual al producto de la presión que actúa sobre este área por la proyección del área sobre la superficie del líquido, es decir, es $p\ dF'$. Como $p=\gamma x$, siendo γ, el peso específico del líquido, la fuerza vertical que actúa sobre el área dF será $\gamma x dF'$.

Pero xdF' es el volumen del prisma elemental situado sobre el área dF. Por lo tanto, la fuerza que se busca será igual al peso del líquido en el volumen situado sobre la superficie F.

Aclarando este resultado, se debe indicar que la fuerza obtenida no depende de la forma del recipiente que contiene el líquido. Así, por ejemplo, en todos los tres casos representados en la figura 335 la fuerza que actúa sobre el fondo del recipiente será la misma e igual al peso del líquido en el volumen del cilindro *ABCD* situado sobre el fondo.

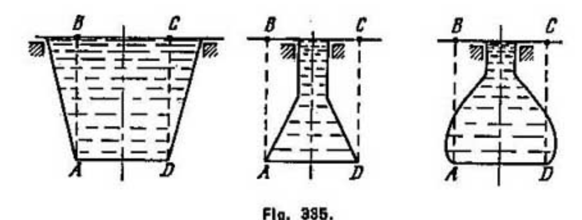


Fig. 335.

Veamos algunos ejemplos de determinación de las tensiones en los recipientes de paredes delgadas.

Ejemplo 10.1. La bóveda esférica de radio R y de espesor h se somete a una presión interior p (fig. 336, *a*). Determinar las tensiones que surgen en la bóveda.

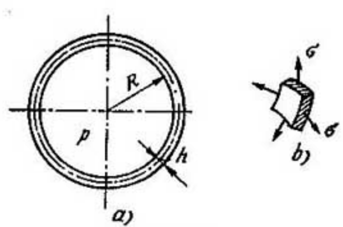


Fig. 336.

En la bóveda esférica $\rho_m = \rho_t = R$. De la condición de simetría completa se deduce,

$$\sigma_m = \sigma_t.$$

Por la ecuación de Laplace (10.1) se obtiene,

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}.$$

El estado tensional resulta biaxial (fig. 336, *b*),

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}$$

La tensión mínima σ_3 se considera igual a cero. De acuerdo con la teoría de Mohr, independientemente del valor de k, resulta,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{pR}{2h}. \qquad (10.3)$$

Ejemplo 10.2. El recipiente cilíndrico (fig. 337, *a*) se somete a la presión interior p. El radio del cilindro es R, su espesor h. Determinar las tensiones.

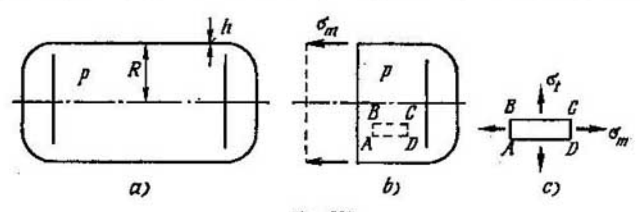


Fig. 337.

Separamos por una sección transversal una parte del cilindro (fig. 337,*b*) y planteamos para ella la ecuación de equilibrio (10.2),

$$\sigma_m 2\pi R h = P.$$

La componente axial de las fuerzas de presión, independientemente de la forma del fondo, según el primer teorema es $P = \pi R^2 p$. Así pues,

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}.$$

En el caso del cilindro $\rho_m = \infty$, $\rho_t = R$ y, por lo tanto, de la ecuación de Laplace (10.1) se obtiene

$$\sigma_t = \frac{pR}{h},$$

es decir, que la tensión circunferencial resulta ser dos veces mayor que la meridional.

El elemento *ABCD*, separado de la bóveda cilíndrica se encuentra en el estado tensional biaxial (fig. 337, *c*),

$$\sigma_1 = \sigma_t, \; \sigma_2 = \sigma_m, \; \sigma_3 = 0.$$

La tensión equivalente será,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{pR}{h}. \qquad (10.4)$$

Como vemos, en el caso del cilindro, la tensión equivalente resulta ser dos veces mayor que en el caso de la bóveda esférica del mismo radio y del mismo espesor.

Ejemplo 10.3. El recipiente semiesférico de radio R y de espesor h (fig. 338, *a*) contiene un líquido de peso específico γ. Determinar las tensiones en el recipiente y construir los diagramas de σ_m, σ_t y σ_{eq}.

Con una sección cónica normal de ángulo 2φ en el vértice, separamos la parte inferior de la bóveda esférica (fig. 338, *b*) y planteamos la ecuación de

equilibrio (10.2), siendo P, la resultante de la fuerza de la presión del líquido. Según el segundo teorema la fuerza P es igual al peso del líquido en el volumen situado sobre la parte separada de la bóveda.

Introducimos el ángulo auxiliar ψ y determinamos el volumen $ABCED$ (fig. 338, b),

$$V=\int_0^{\varphi} 2\pi R^3 \operatorname{sen}\psi\cos^2\psi\, d\psi$$

o

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos^3\varphi).$$

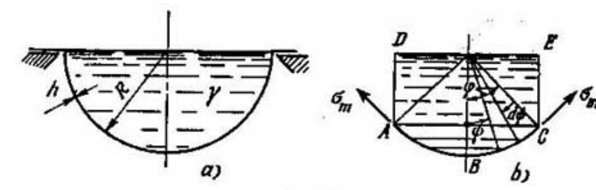


Fig. 338.

Así pues, obtenemos,

$$P=\frac{2}{3}\pi R^3\gamma (1-\cos^3\varphi),$$

$$\sigma_m=\frac{\gamma R^2}{3h}\frac{1-\cos^3\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}. \qquad (10.5)$$

Recurrimos ahora a la ecuación de Laplace (10.1)

$$\rho_m=\rho_t=R,$$
$$p=\gamma R\cos\varphi.$$

Introduciendo σ_m obtendremos de ella,

$$\sigma_t=\frac{\gamma R^2}{3h}\left[3\cos\varphi-\frac{1-\cos^3\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right]. \qquad (10.6)$$

Según las expresiones (10.5) y (10.6) construimos los diagramas de σ_m y σ_t que están representados en la figura 339. Como vemos, las tensiones σ_m y σ_t en el punto inferior de la esfera son iguales. En el punto superior σ_t es negativa. Allí donde σ_m y σ_t tienen el mismo signo se obtiene $\sigma_1=\sigma_m$, $\sigma_2=\sigma_t$, $\sigma_3=0$,

$$\sigma_{eq}=\sigma_1-k\sigma_3=\sigma_m$$

y allí donde σ_m y σ_t son de signo diferente,

$$\sigma_1=\sigma_m,\ \sigma_2=0,\ \sigma_3=\sigma_t,\ \sigma_{eq}=\sigma_m-k\sigma_t.$$

El diagrama de la tensión equivalente (fig. 339) es, como vemos, quebrado en el punto donde σ_t varía de signo. La tensión equivalente en el recipiente será,

$$\sigma_{eq}^{max}=\frac{\gamma R^2}{3h}(1+k),$$

siendo como siempre

$$k=\frac{\sigma_{tt}}{\sigma_{tc}}$$

El hecho de que en la parte superior del recipiente la tensión σ_t es de compresión, es, en este caso, natural.

La tensión meridional σ_m en la zona de apoyo es, claro está, de tracción. Como la presión p es aquí pequeña, el equilibrio del elemento separado (fig. 340)

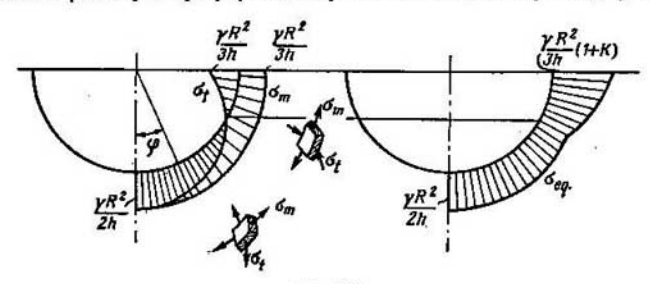


Fig. 339.

resultará posible solamente cuando la tensión circunferencial σ_t es de compresión. Si el recipiente estuviese apoyado en su parte inferior, entonces no ocurriría este fenómeno puesto que en el borde superior σ_m sería igual a cero.

La aparición de las tensiones de compresión σ_t cuando actúa la presión interior es propia no sólo del recipiente esférico. Por ejemplo, en el tanque cilíndrico lleno de líquido (fig. 341), en la zona donde se une la parte cilíndrica con

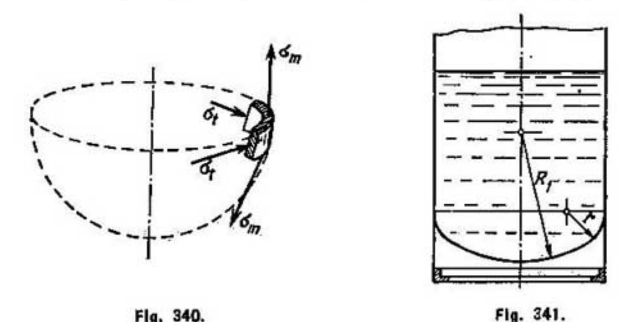


Fig. 340. Fig. 341.

el fondo, también pueden surgir, en determinadas condiciones, tensiones de compresión. Para que la bóveda no pierda la estabilidad es necesario reforzarla en este lugar.

Ejemplo 10.4. Determinar las tensiones en el neumático en forma de toro sometido a la presión interior p. Las dimensiones del balón están dadas en la figura 342, *a*.

Separamos por secciones normales a la superficie una parte de la bóveda toroidal (fig. 342, *b*) y planteamos, para ella, la ecuación de equilibrio, obte-

niendo

$$\sigma_m 2\pi h\ (a+R\ \text{sen}\ \varphi)\ \text{sen}\ \varphi = p\pi\ [(a+R\ \text{sen}\ \varphi)^2 - a^2],$$

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}\ \frac{2a+R\ \text{sen}\ \varphi}{a+R\ \text{sen}\ \varphi}.$$

De la ecuación de Laplace (10.1) para

$$\rho_m = R,\ \ \rho_t = \frac{a+R\ \text{sen}\ \varphi}{\text{sen}\ \varphi}$$

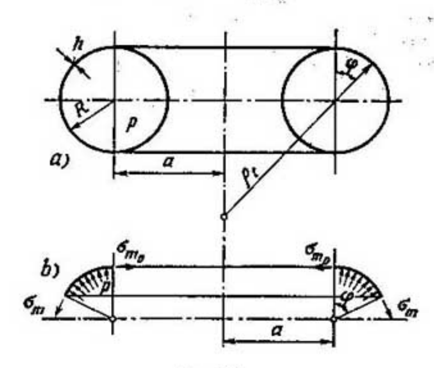


Fig. 342.

se obtiene, introduciendo los valores de ρ_m, ρ_t y σ_m,

$$\sigma_t = \frac{pR}{2h}.$$

La tensión máxima σ_m surge en los puntos interiores de la bóveda toroidal, cuando $\varphi = -\frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2h}\ \frac{2a-R}{a-R}.$$

Como las tensiones $\sigma_m^{\max}$ y σ_t tienen el mismo signo,

$$\sigma_{eq} = \sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2h}\ \frac{2a-R}{a-R}. \qquad (10.7)$$

En el caso particular, cuando $a=0$ el toro se convierte en una esfera y, por lo tanto, la expresión (10.7) coincidirá con la expresión (10.3) obtenida para la esfera. Cuando $a=\infty$ el toro se convierte en un cilindro y entonces la expresión (10.7) coincidirá con la expresión (10.4). Cuando $a=R$ el perímetro del radio interior se hace igual a cero y, por lo tanto, $\sigma_{eq}=\infty$.

§ 66. Flexión de placas circulares sometidas a cargas simétricas

Anteriormente analizamos la tracción de una bóveda sin relacionarla con la flexión. Veamos ahora el caso de flexión sin considerar la tracción. Lo más cómodo es analizar este problema en el caso de la flexión de una placa.

La teoría de la flexión de las placas es una parte bien desarrollada de la teoría aplicada de la elasticidad. Nos limitaremos a los problemas más simples.

Bajo la acción de las fuerzas exteriores, que actúan perpendicularmente al plano medio, la placa varía su curvatura. Esta variación

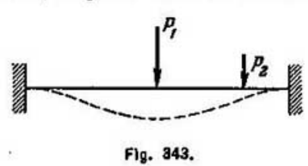


Fig. 343.

de la curvatura ocurre, como regla general, en dos planos simultáneamente y, como resultado, se obtiene la así denominada *superficie elástica* de curvatura pequeña, cuya forma se caracteriza por la ley de variación de las flechas w de la placa. En los cálculos de las placas se considera que la flecha w es considerablemente menor que el espesor h de la placa. Solamente admitiendo esta suposición se puede estudiar la flexión de la placa independientemente de la tracción. Las placas que cumplen esta condición se denominan, a veces, *placas finas*.

Al calcular las vigas, de hecho, se admitía también una suposición análoga. Por ejemplo, en el caso de la viga empotrada en sus extremos, que trabaja a flexión (fig. 343) la línea elástica de la viga resulta mayor que el eje de la viga sin deformar. Los alargamientos que, como consecuencia de esto, resultan se ignoran en comparación con los alargamientos debidos a la curvatura de la viga. Solamente cuando las flechas de la viga son pequeñas en comparación con la altura de la sección se puede prescindir del alargamiento del eje.

Las placas, cuyas flechas son comparables con el espesor, se calculan, teniendo en cuenta el alargamiento de la superficie media.

La teoría de la flexión de las placas y bóvedas se basa sobre ciertas suposiciones simplificativas. La primera de ellas consiste en que se considera *invariable* la normal. Esta suposición se conoce como *hipótesis de Kirchhoff* y consiste en que los puntos situados antes de la deformación sobre cierta recta normal a la superficie media, siguen formando, después de la deformación, una recta normal a la superficie deformada. Esta suposición, como también la hipótesis de las

secciones planas de la barra, indican que se puede prescindir de las deformaciones angulares de las bóvedas en comparación con los desplazamientos angulares. Esto es aceptable en la medida en que el espesor de la placa es pequeño en comparación con las otras dimensiones.

Consideraremos en adelante, que las tensiones normales en las secciones paralelas al plano medio son despreciablemente pequeñas en comparación con las tensiones originadas por la flexión, es decir, que no existe presión alguna entre las capas de la placa. Suposición análoga se admitió anteriormente, al deducir las fórmulas de la flexión transversal de la barra y al estudiar el estado tensional de las bóvedas por la teoría membranal.

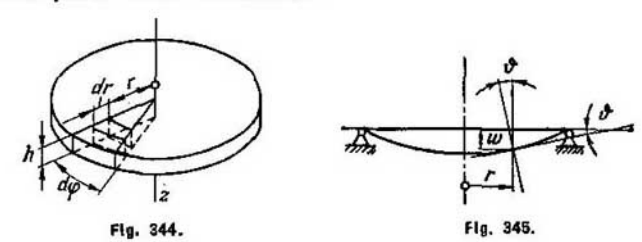


Fig. 344. Fig. 345.

Pasemos ahora a determinar las tensiones en las placas circulares. Veamos una placa de espesor constante h, solicitada por fuerzas situadas simétricamente con respecto al eje z de la placa (fig. 344). Las deformaciones, los desplazamientos y las tensiones que aparecen en la placa serán también simétricos respecto al eje z.

La flecha de la placa se designa por w y el ángulo de giro de la normal, por ϑ (fig. 345). Las magnitudes w y ϑ son funciones del radio r solamente y están relacionadas entre sí por la expresión obvia,

$$\vartheta = -\frac{dw}{dr}. \tag{10.8}$$

El signo negativo se escoge de acuerdo al esquema de la flecha dado en la figura 345. Cuando disminuye la flecha w, el ángulo ϑ aumenta. El signo no tiene especial importancia por depender solamente de la dirección en que se miden las flechas w.

En la figura 346 está representada una sección axial de la placa. Los puntos situados sobre la normal A_1B_1, después de la flexión de la placa, forman la normal $A_1'B_1'$ girada un ángulo ϑ. La normal A_2B_2 girará el ángulo $\vartheta + d\vartheta$.

El segmento CD situado a la distancia z del plano medio, y orientado radialmente recibe el alargamiento siguiente,

$$z(\vartheta + d\vartheta) - z\vartheta = zd\vartheta.$$

El alargamiento unitario será

$$\varepsilon_r = z\frac{d\vartheta}{dr}. \qquad (10.9)$$

El alargamiento unitario en el punto C en la dirección perpendicular al plano del dibujo se puede obtener, comparando las longitudes de las circunferencias correspondientes, antes y después de la deformación. Antes de la deformación de la placa, la longitud de la circunferencia que pasa por el punto C era $2\pi r$, mientras que después

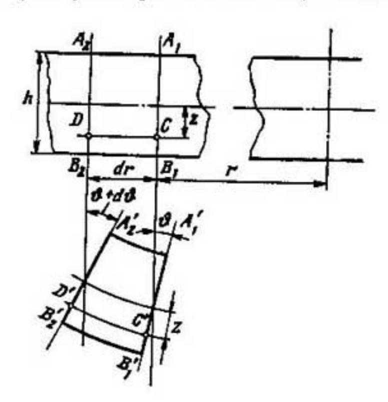


Fig. 346.

de la deformación, será $2\pi(r+z\vartheta)$. Por lo tanto, el alargamiento unitario circunferencial será,

$$\varepsilon_t = z\frac{\vartheta}{r}. \qquad (10.10)$$

Separamos, mediante dos secciones axiales que forman un ángulo $d\varphi$ y dos superficies cilíndricas de radios r y $r+dr$ (fig. 344) el prisma elemental de la placa indicado en la figura 347. Como en las secciones paralelas al plano medio no existen tensiones normales, los alargamientos y las tensiones estarán unidos por la ley de Hooke en la forma siguiente,

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t),$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r).$$

Expresando las tensiones por las deformaciones, obtendremos

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r+\mu\varepsilon_t),\\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t+\mu\varepsilon_r),\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

o, de acuerdo a las expresiones (10.9) y (10.10),

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right),\\ \sigma_t &= \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\vartheta}{r}+\mu\frac{d\vartheta}{dr}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

Sobre las caras del prisma (fig. 347) pueden actuar no solamente tensiones normales, sino también tensiones tangenciales. De la condición de simetría se deduce fácilmente que las tensiones tangenciales

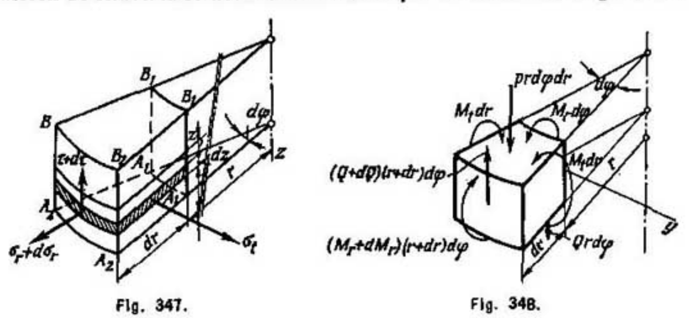


Fig. 347. Fig. 348.

pueden aparecer solamente en los planos perpendiculares al radio r y que se orienta verticalmente.

Veamos ahora las condiciones de equilibrio del prisma separado. Para ello, hallamos primero las resultantes de las fuerzas que actúan sobre las caras del elemento. Las tensiones tangenciales en la cara $A_1B_1A_1B_1$ (fig. 347) originan una fuerza resultante cortante dirigida según el eje z. La intensidad de esta fuerza, es decir, la magnitud de la fuerza que se refiere a la unidad de longitud del arco $rd\varphi$ se designa por Q kgf/cm. La fuerza cortante en la cara $A_1B_1A_1B_1$ será $Qrd\varphi$ y la fuerza cortante en la cara $A_2B_2A_2B_2$, $(Q+dQ)(r+dr)\,d\varphi$ (fig. 348).

Como las tensiones en las capas superiores e inferiores son iguales, pero de signo opuesto (fórmulas 10.12), serán nulas las fuerzas normales sobre las caras del elemento. Las tensiones normales σ_r y σ_t que actúan sobre las caras correspondientes se reducen a momentos resultantes en los planos verticales.

La intensidad de los momentos sobre las caras $A_1B_1A_1B_1$ y $A_1B_1A_2B_2$, es decir, las magnitudes de los momentos referidos a la

unidad de longitud de la sección se designan por M_r y M_t kgf cm/cm respectivamente. Las magnitudes M_r y M_t, para mayor comodidad, se denominarán en adelante simplemente momentos y Q, fuerza cortante.

Conociendo las tensiones σ_r y σ_t determinamos los momentos resultantes sobre las caras como sigue,

$$M_r r\,d\varphi = r\,d\varphi \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z\,dz, \quad M_t\,dr = dr \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t z\,dz.$$

De acuerdo a la expresión (10.12) obtendremos,

$$M_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)\int_{-h/2}^{+h/2} z^2\,dz, \qquad M_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dz}\right)\int_{-h/2}^{+h/2} z^2\,dz.$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2\,dz = \frac{h^3}{12}$$

se deduce,

$$\left.\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right), \\ M_t &= D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

siendo

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{10.14}$$

Esta magnitud se denomina *rigidez de la placa* (o de la bóveda) a la flexión.

Entre las fuerzas aplicadas al elemento (fig. 348) se incluye también la fuerza exterior $pr\,d\varphi\,dr$, siendo p la presión en kgf/cm² que puede variar en función del radio r. Proyectando todas las fuerzas que actúan sobre el elemento (fig. 348) sobre el eje de simetría obtendremos,

$$(Q + dQ)(r + dr)\,d\varphi - Qr\,d\varphi - pr\,d\varphi\,dr = 0,$$

de donde se halla,

$$pr = \frac{d}{dr}(Qr). \tag{10 15}$$

Planteamos ahora la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al eje y, tangente al arco del círculo de radio r en el plano medio,

$$(M_r + dM_r)(r + dr)\,d\varphi - M_r\,r d\varphi - pr\,dr\,d\varphi\frac{dr}{2} -$$
$$- M_t\,dr\,d\varphi + (Q + dQ)(r + dr)\,d\varphi\,dr = 0,$$

o, prescindiendo de las magnitudes de orden superior y pasando al límite,

$$M_t - \frac{d}{dr}(M_r r) = Qr \tag{10.16}$$

Las ecuaciones de equilibrio restantes se satisfacen automáticamente debido a las condiciones de simetría.

Introduciendo M_r y M_t de las expresiones (10.13) en la expresión (10.16) y suponiendo que la rigidez D es constante resulta,

$$r\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r} = -\frac{Qr}{D},$$

de donde se obtiene,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\vartheta r)\right] = -\frac{Q}{D}. \tag{10.17}$$

Esta última transformación se comprueba fácilmente derivando la última expresión.

Después de una doble integración de la expresión (10.17) hallamos,

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int\left[r\int Q\,dr\right]dr, \tag{10.18}$$

siendo C_1 y C_2, las constantes arbitrarias de integración que se deben determinar de las condiciones de borde, en cada caso concreto.

La fuerza cortante Q se puede obtener de la ecuación de equilibrio (10.15), pero esto resulta mucho más cómodo, analizando las condiciones de equilibrio de la parte central de la placa que se obtiene por la sección cilíndrica de radio r. Este método de determinación de la fuerza cortante se ilustrará en los ejemplos que más abajo siguen.

Una vez obtenida la función ϑ (10.18), hallamos, de la expresión (10.13), los momentos flectores M_r y M_t y de la expresión (10.8), la flecha w. Conociendo los momentos flectores es fácil obtener las tensiones. Comparando (10.12) con (10.13) se demuestra que

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\mu^2}\cdot\frac{M_r}{D};\quad \sigma_t = \frac{Ez}{1-\mu^2}\cdot\frac{M_t}{D}$$

e introduciendo aquí la expresión de D (10.14) obtenemos,

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3}z;\quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3}z.$$

Las máximas tensiones surgen cuando $z = \pm\frac{h}{2}$ y, por lo tanto,

$$\sigma_r^{\max} = \pm\frac{6M_r}{h^2};\quad \sigma_t^{\max} = \pm\frac{6M_t}{h^2}, \tag{10.19}$$

§ 67. Cálculo de las tensiones y los desplazamientos en las placas circulares

Analicemos en algunos ejemplos el orden de aplicación de las fórmulas obtenidas.

Ejemplo 10.5. Determinar las flechas y las tensiones en la placa solicitada por una carga uniformemente distribuida p, en los dos casos siguientes de apoyo de la placa: a) placa empotrada en su contorno y b) placa apoyada libremente en su contorno (fig. 349). El radio de la placa es R y su espesor h.

Comenzamos la solución del problema por la determinación de la fuerza cortante Q. En la parte central de la placa de radio r (fig. 349), independientemente del tipo de apoyo en el contorno exterior, la ecuación de equilibrio nos da,

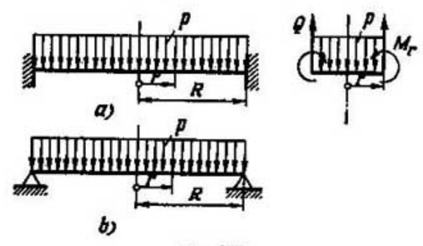


Fig. 349.

$$Q \cdot 2\pi r = p\pi r^2$$

o sea,

$$Q = \frac{pr}{2}.$$

De la expresión (10.18) después de una doble integración se obtiene,

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Tanto en el caso a) como en el caso b) el ángulo de giro ϑ en el centro de la placa (cuando $r=0$) es igual a cero. Esto puede ocurrir solamente cuando $C_2=0$. Así pues,

$$\vartheta = C_1 r - \frac{pr^3}{16D}. \tag{10.20}$$

Veamos ahora por separado los dos tipos de apoyo. En el primer caso, cuando $r=R$, el ángulo $\vartheta=0$, de donde se obtiene,

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D}, \quad \vartheta = \frac{p}{16D}(R^2 r - r^3).$$

De acuerdo a la expresión (10.13) resulta,

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{p}{16}[R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)], \\ M_t &= \frac{p}{16}[R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)]. \end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

De la expresión (10.8) obtenemos,

$$w=\frac{p}{16D}\left[C_3-\frac{1}{2}R^2r^2+\frac{r^4}{4}\right],$$

donde C_3 se obtiene de la condición de que el desplazamiento w en el contorno es igual a cero. Así,

$$\left.\begin{aligned}C_3&=\frac{1}{4}R^4\\ w&=\frac{p}{64D}(R^2-r^2)^2.\end{aligned}\right\}\qquad(10.22)$$

Como vemos, la placa se flexiona según una superficie de cuarto orden.

En el segundo caso de apoyo de la placa son nulas las tensiones radiales σ_r (o el momento M_r) en el contorno. Por lo tanto, de acuerdo a la primera de las expresiones (10.13) obtendremos para $r=R$,

$$\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\mu\vartheta}{r}=0.$$

De esta ecuación se obtiene la constante C_1. La ecuación (10.20) nos dará en este caso,

$$C_1-\frac{3pR^2}{16D}+\mu\left(C_1-\frac{pR^2}{16D}\right)=0,$$

de donde hallamos,

$$C_1=\frac{pR^2}{16D}\frac{3+\mu}{1+\mu},\quad \vartheta=\frac{p}{16D}\left[\frac{3+\mu}{1+\mu}R^2r-r^3\right].$$

De acuerdo a las expresiones (10.13) se determinan los momentos flectores,

$$\left.\begin{aligned}M_r&=\frac{p}{16}(3+\mu)(R^2-r^2),\\ M_t&=\frac{p}{16}(3+\mu)\left(R^2-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right).\end{aligned}\right\}\qquad(10.23)$$

La expresión de los desplazamientos es la siguiente,

$$w=\frac{p}{16D}\left[C_3-\frac{3+\mu}{1+\mu}\frac{R^2r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right].$$

La constante C_3 se determina, de nuevo, de tal manera que sea nulo el desplazamiento w en el contorno,

$$C_3=\frac{R^4}{4}\cdot\frac{5+\mu}{1+\mu},$$

de donde se obtiene,

$$w=\frac{p}{16D}\left[\frac{1}{4}\frac{5+\mu}{1+\mu}R^4-\frac{1}{2}\frac{3+\mu}{1+\mu}R^2r^2+\frac{1}{4}r^4\right].\qquad(10.24)$$

De acuerdo a las expresiones (10.21) y (10.23) se construyen los diagramas de los momentos representados en la figura 350.

Cuando el contorno de la placa está empotrado, las tensiones de tracción máximas aparecen en la superficie superior, cerca del contorno. De acuerdo a las fórmulas (10.19),

$$\sigma_1=\sigma_r=\frac{2pR^2}{16}\frac{6}{h^2},\quad \sigma_2=\sigma_t=\frac{2\mu pR^2}{16}\frac{6}{h^2},\quad \sigma_3=0.$$

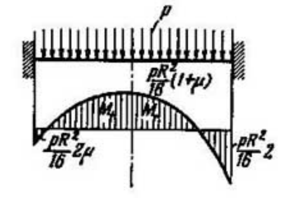
La tensión equivalente será,

$$\sigma_{eq}=\sigma_1-k\sigma_3=\frac{3}{4}\,\frac{pR^2}{h^2}.$$

Cuando el contorno se apoya libremente, las tensiones máximas de tracción aparecen en el centro, en la superficie inferior de la placa. Aquí,

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{3+\mu}{16}\,\frac{pR^2 6}{h^2},\quad \sigma_3=0,$$

$$\sigma_{eq}=\sigma_1-k\sigma_3=\frac{3}{8}\,(3+\mu)\,\frac{pR^2}{h^2}.$$



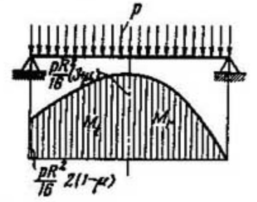


Fig. 350.

De acuerdo a las expresiones (10.22) y (10.24), las flechas máximas para los casos primero y segundo serán,

$$\text{a)}\ w_{max}=\frac{pR^4}{64D};$$

$$\text{b)}\ w_{max}=\frac{5+\mu}{1+\mu}\,\frac{pR^4}{64D}.$$

Ejemplo 10.6. Determinar las tensiones y las flechas en el muelle de disco de la figura 351, *a*.

El problema, claro está, se reduce al esquema de cálculo de la placa solicitada en el borde por fuerzas distribuidas P (fig. 351, *b*). El asiento del muelle se determina por la flecha de una sola placa, multiplicándola por n, siendo n, el número de placas en el muelle.

Hallemos primero la fuerza cortante Q. De la condición de equilibrio de la parte central de la placa (fig. 351, *c*) se obtiene,

$$Q\cdot 2\pi r=P;\quad Q=\frac{P}{2\pi r}.$$

De la ecuación (10.18) hallamos,

$$\vartheta=C_1r+\frac{C_2}{r}-\frac{P}{4\pi D}\,r\left(\ln r-\frac{1}{2}\right). \tag{10.25}$$

Variando el valor de la constante C_1 escribimos esta expresión en la forma siguiente,

$$\vartheta=C_1'r+\frac{C_2}{r}-\frac{P}{4\pi D}\,r\ln\frac{r}{a}. \tag{10.26}$$

Las constantes C_1' y C_2 se determinan de las condiciones de que el momento

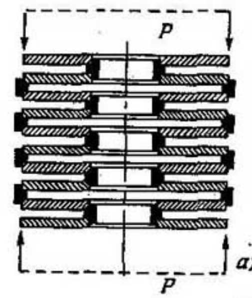
flector radial,

$$M_r = D\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)$$

sea igual a cero cuando $r=a$ y $r=b$. Esto nos proporciona dos ecuaciones,

$$C_1'(1+\mu) - \frac{C_2}{a^2}(1-\mu) = \frac{P}{4\pi D},$$

$$C_1'(1+\mu) - \frac{C_2}{b^2}(1-\mu) = \frac{P}{4\pi D}\left[(1+\mu)\ln\frac{b}{a} + 1\right]$$



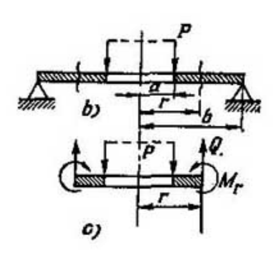


Fig. 351.

de la que se obtiene,

$$C_1'(1+\mu) = \frac{P}{4\pi D}\left[\frac{b^2}{b^2-a^2}(1+\mu)\ln\frac{b}{a} + 1\right],$$

$$C_2(1-\mu) = \frac{P}{4\pi D}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(1+\mu)\ln\frac{b}{a}.$$

Introducimos ahora ϑ, C_1' y C_2 en las expresiones de los momentos (10.13), obteniendo

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{b^2}{b^2-a^2}(1+\mu)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a} - (1+\mu)\ln\frac{r}{a}\right],$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{b^2}{b^2-a^2}(1+\mu)\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a} - (1+\mu)\ln\frac{r}{a} + 1 - \mu\right].$$

Los diagramas de los momentos están representados en la figura 352. La tensión máxima surge en el borde interior, donde

$$\sigma_{eq} = \sigma_t = \frac{6M_t^{max}}{h^2},$$

y

$$M_t^{max} = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{2b^2}{b^2-a^2}(1+\mu)\ln\frac{b}{a} + 1 - \mu\right].$$

Integrando la función ϑ (10.26) obtenemos, de acuerdo a (10.8),

$$w = C_3 - C_1'\frac{r^2}{2} - C_2\ln\frac{r}{a} + \frac{Pr^2}{8\pi D}\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\right).$$

Calculamos después C_2 de la condición de que, cuando $r=b$, el desplazamiento w sea igual a cero. Entonces,

$$w=C_1'\frac{1}{2}(b^2-r^2)+C_2\ln\frac{b}{r}+\frac{P}{8\pi D}\left[r^2\ln\frac{r}{a}-b^2\ln\frac{b}{a}+\frac{b^2-r^2}{2}\right].$$

Suponiendo $r=a$ e introduciendo C_1' y C_2 determinamos la flecha de una placa,

$$w_1=\frac{P}{8\pi D}\left[\frac{1}{2}\frac{3+\mu}{1+\mu}(b^2-a^2)+\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\ln^2\frac{b}{a}\right].$$

Esta magnitud, para el muelle en cuestión, deberá ser multiplicada por n.

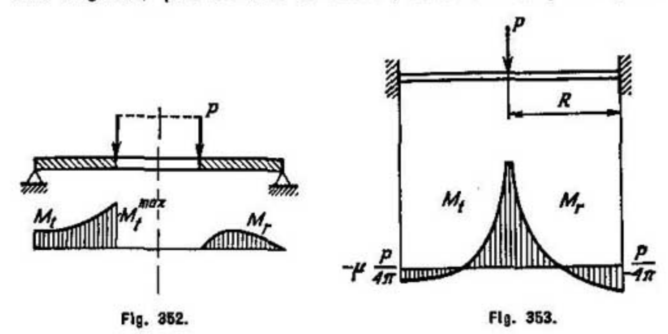


Fig. 352. Fig. 353.

Ejemplo 10.7. Determinar la flecha y las tensiones máximas en la placa solicitada por una fuerza concentrada en el centro (fig. 353).

Como en el ejemplo anterior, $Q=\frac{P}{2\pi r}$. Por lo tanto, la expresión (10.26) sigue en vigor. Escribámosla de nuevo,

$$\vartheta=C_1'r+\frac{C_2}{r}-\frac{P}{4\pi D}r\ln\frac{r}{R}.$$

En el centro (cuando $r=0$), el ángulo $\vartheta=0$. Por lo tanto, como $\lim_{r\to 0} r\ln\frac{r}{R}=0$, la constante $C_2=0$. La magnitud C_1' se determina de manera tal que la función ϑ sea igual a cero, cuando $r=R$. De aquí se deduce que $C_1'=0$ y, por lo tanto

$$\vartheta=\frac{P}{4\pi D}r\ln\frac{R}{r}.$$

Los momentos flectores son, de acuerdo a las expresiones (10.13),

$$M_r=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{R}{r}-1\right],\quad M_t=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{R}{r}-\mu\right].$$

En la figura 353 están representados los diagramas construidos de acuerdo a estas fórmulas. Como vemos, en el centro de la placa, los momentos flectores son infinitos, lo que es debido a que aquí también es infinita la fuerza cortante Q. En el centro, como se dice, existe una singularidad no eliminable. En las condiciones reales no existen fuerzas aplicadas en un punto, esto no es más que un esquema. La fuerza se aplica sobre una superficie pequeña (fig. 354) de cuya magnitud depende que las tensiones sean mayores o menores

La flecha en el centro de la placa, cuando actúa la fuerza concentrada, tiene una magnitud finita, sin que la esquematización de las condiciones reales de aplicación de las fuerzas conduzca aquí a contradicciones,

$$w=C_3-\frac{Pr^2}{8\pi D}\left(\ln\frac{R}{r}+\frac{1}{2}\right).$$

Como cuando $r=R$ la flecha $w=0$, obtendremos,

$$C_3=\frac{PR^2}{16\pi D},$$

de donde se deduce que,

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[\frac{1}{2}(R^2-r^2)-r^2\ln\frac{R}{r}\right].$$

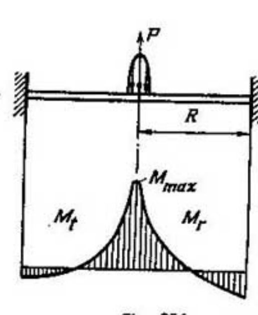


Fig. 354.

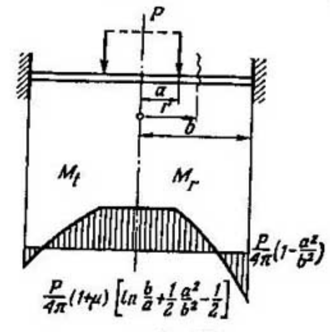


Fig. 355.

En el centro,

$$w_{\max}=\frac{PR^2}{16\pi D}.$$

Ejemplo 10.8. Construir el diagrama de los momentos flectores para la placa maciza empotrada en el borde y solicitada por la fuerza P distribuida a lo largo de la circunferencia de radio a (fig. 355).

La placa se puede considerar constituida por dos tramos. En el primero $Q=0$ y de acuerdo a la expresión (10.8),

$$\vartheta_1=C_1r+\frac{C_2}{r}.$$

Como en el centro $\vartheta_1=0$ podemos considerar que $C_2=0$, obteniendo,

$$\vartheta_1=C_1r. \tag{10.27}$$

En el segundo tramo,

$$Q=\frac{P}{2\pi r}.$$

Aquí se puede tomar directamente la expresión (10.26) de ϑ del ejemplo 10.6,

$$\vartheta_2=C_1'r+\frac{C_2}{r}-\frac{P}{4\pi D}r\ln\frac{r}{a}. \tag{10.28}$$

Las constantes de integración C_1, C_1' y C_2 se determinan ahora de las condiciones de contacto de los dos tramos. Cuando $r=a$ obtenemos $\vartheta_1=\vartheta_2$ y $M_{r1}=M_{r2}$, es decir, los ángulos de giro y los momentos flectores en la línea de contacto de los tramos deberán ser iguales.

La condición de igualdad de los momentos se escribe así,

$$\left(\frac{d\vartheta_1}{dr}+\mu\vartheta_1\right)_{r=a}=\left(\frac{d\vartheta_2}{dr}+\mu\vartheta_2\right)_{r=a},$$

y como $\vartheta_1=\vartheta_2$, se obtiene,

$$\left(\frac{d\vartheta_1}{dr}\right)_{r=a}=\left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=a}.$$

La tercera condición será, claro está, la siguiente: para $r=b$ el ángulo de giro $\vartheta_2=0$. Así pues, se obtienen tres ecuaciones,

$$C_1a=C_1'a+\frac{C_2}{a},\quad C_1=C_1'-\frac{C_2}{a^2}-\frac{P}{4\pi D},\quad C_1'b+\frac{C_2}{b}-\frac{Pb}{4\pi D}\ln\frac{b}{a}=0,$$

de las que se obtiene,

$$C_1=\frac{P}{4\pi D}\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{2}\right),$$

$$C_1'=\frac{P}{4\pi D}\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$C_2=-\frac{Pa^2}{8\pi D}.$$

En el primer tramo, tramo central, de la placa los momentos flectores son, de acuerdo a las expresiones (10.13) y (10.27), los siguientes,

$$M_r=M_t=\frac{P(1+\mu)}{4\pi}\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{2}\right)=\text{const.}$$

En el segundo tramo, teniendo en cuenta la expresión (10.28) de ϑ_2 se obtiene,

$$M_r=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\left(\ln\frac{b}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\right)+\frac{a^2}{2r^2}(1-\mu)-1\right],$$

$$M_t=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\left(\ln\frac{b}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\right)-\frac{a^2}{2r^2}(1-\mu)-\mu\right].$$

En la figura 355 se dan los diagramas de los momentos flectores. Si a es pequeña, entonces el momento flector máximo surgirá en la parte central. Cuando el radio a es grande, el momento máximo ocurre en el borde. Conociendo los momentos resulta fácil calcular las tensiones.

Así pues, el problema del cálculo de la placa de varios tramos no presenta dificultades de principio. Sin embargo aquí, en la mayoría de los casos, resulta necesario realizar cálculos bastante laboriosos. Para evitarlo, se puede plantear la ecuación universal de la placa, análoga a la ecuación universal de la línea elástica de la viga. Actualmente la resolución de este tipo de problemas se realiza generalmente con máquinas calculadoras electrónicas.

§ 68. Flexión de placas rectangulares

El cálculo de placas rectangulares resulta bastante más complicado que el cálculo de placas circulares simétricas. Esto ocurre, ante todo, porque las flechas y las tensiones en placas no simétricas son funciones, no de un solo argumento, sino de dos argumentos independientes. En el caso de una placa rec-

tangular (fig. 356), en calidad de argumentos se eligen generalmente las magnitudes x e y correspondientes al sistema de coordenadas cartesianas. La ecuación diferencial de la placa no circular es una ecuación en derivadas parciales y se resuelve, generalmente, mediante series. Sin detenernos en este problema, simplemente expondremos aquí algunos resultados definitivos de la teoría de las placas rectangulares.

Cuando la placa se apoya libremente sobre los cuatro lados y se somete a una carga uniformemente distribuida p, la flecha máxima surge en el punto de coordenadas $x=y=0$ (fig. 356),

$$w_{max}=\alpha\frac{pa^4}{Eh^3},$$

siendo a, el lado menor de la placa y α, el coeficiente que depende de la relación $\frac{b}{a}$.

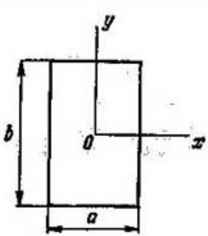


Fig. 356.

Los momentos flectores M_x y M_y máximos, referidos a la unidad de longitud de la sección ocurren en este mismo punto y son,

$$M_x^{max}=\beta pa^2,\quad M_y^{max}=\gamma pa^2.$$

Los coeficientes α, β y γ para algunos valores de $\frac{b}{a}$ y para $\mu=0,3$ están dados en la tabla 7.

Tabla 7

b/a	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	3	4	5	∞
α	0,0433	0,0616	0,0770	0,0906	0,1017	0,1106	0,1336	0,1400	0,1416	0,1422
β	0,0479	0,0626	0,0753	0,0862	0,0948	0,1017	0,1189	0,1235	0,1246	0,1250
γ	0,0479	0,0501	0,0506	0,0493	0,0479	0,0464	0,0404	0,0384	0,0375	0,0375

En el caso de la placa empotrada en los cuatro lados, la flecha máxima ocurrirá, como en el caso anterior, en el centro de la placa,

$$w_{max}=\alpha_1\frac{pa^4}{Eh^3}.$$

El momento flector máximo surge en los centros de los lados mayores, es decir, cuando $x=\pm\frac{a}{2}$ e $y=0$,

$$M_x^{max}=\beta_1 pa^2.$$

Los coeficientes α_1 y β_1, para ciertos valores de $\frac{b}{a}$ y para $\mu=0,3$ vienen dados en la tabla 8.

Tabla 8

b/a	1	1,25	1,50	1,75	2	∞
α_1	0,0138	0,0199	0,0240	0,0264	0,0277	0,0284
β_1	0,0513	0,0665	0,0757	0,0817	0,0829	0,0838

Más detalles sobre el cálculo de placas rectangulares y de otros tipos se pueden encontrar en el libro de Galiorkin B. G.*

§ 69. Flexión de la bóveda cilíndrica solicitada simétricamente

Anteriormente se analizaron los casos de tracción de las bóvedas sin considerar la flexión (teoría membranal) y de flexión de las placas, sin tener en cuenta la tracción. Veamos ahora el caso algo más general cuando en las secciones de la bóveda aparecen momentos flectores y fuerzas normales.

Analicemos el cálculo de las tensiones en un cilindro de paredes delgadas solicitado simétricamente. Este problema se resuelve sobre

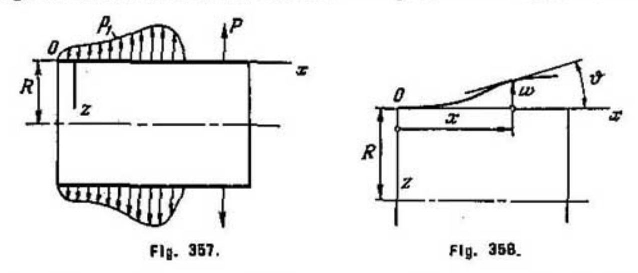


Fig. 357. Fig. 358.

la base de las mismas suposiciones que se admitieron, al calcular la flexión de las placas, es decir, que se admite la hipótesis sobre la invariabilidad de la normal y se supone que las capas de la bóveda no presionan unas sobre las otras.

El cilindro circular de paredes delgadas de radio R y de espesor h constante se somete a cierta carga simétrica respecto al eje (fig. 357). Las deformaciones y las tensiones que surgen en la bóveda también son, claro está, simétricas respecto al mismo eje y por lo tanto el cilindro deformado constituye un cuerpo de revolución. La forma de este cuerpo se determina por la generatriz flexionada del cilindro.

*) B. G. Galiorkin, *Placas delgadas elásticas*, Gosstroiizdat, 1933, ed. rusa.

Designemos por w el desplazamiento radial y por ϑ el ángulo de inclinación de la tangente a la generatriz de la superficie media del cilindro (fig. 358). Está claro que,

$$\frac{dw}{dx}=\vartheta. \qquad (10.29)$$

El desplazamiento w se mide hacia afuera del eje del cilindro.

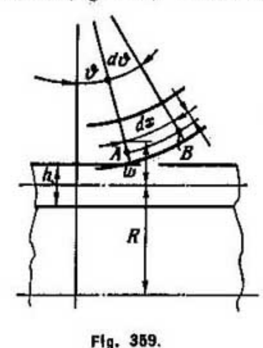


Fig. 359.

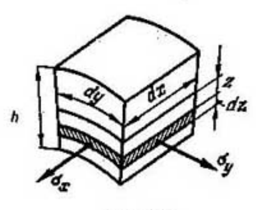


Fig. 360.

El alargamiento unitario e_x del segmento AB (fig. 359) situado a la distancia z de la superficie media se obtiene como la suma de dos componentes: del alargamiento ε_0 de la superficie media y del alargamiento originado por la curvatura de la generatriz del cilindro. Este último es $z\frac{d\vartheta}{dx}$. El alargamiento completo de la capa AB será,

$$\varepsilon_x=\varepsilon_0+z\frac{d\vartheta}{dx}. \qquad (10.30)$$

El alargamiento en la dirección circunferencial es,

$$\varepsilon_y=\frac{w}{R}. \qquad (10.31)$$

A estos alargamientos les corresponden las tensiones σ_x y σ_y relacionadas con aquéllos por la ley de Hooke,

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x),$$

o de acuerdo a las expresiones (10.30) y (10.31),

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_0+\mu\frac{w}{R}+z\frac{d\vartheta}{dx}\right],\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\mu\varepsilon_0+\frac{w}{R}+\mu z\frac{d\vartheta}{dx}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (10.32)$$

En las secciones del cilindro (tanto axiales como transversales) surgen momentos flectores y fuerzas normales que se determinan por las tensiones σ_x y σ_y de manera análoga a como se determinaron en el caso de la placa circular.

Veamos un elemento de la bóveda cilíndrica de dimensiones dx, dy (fig. 360). Las fuerzas normales en los planos hdy y hdx, referidos a la unidad de longitud del arco de la sección, serán,

$$T_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \, dz \, \frac{kgf}{cm}, \quad T_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \, dz \, \frac{kgf}{cm}.$$

Calculemos los momentos flectores en las mismas secciones,

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \, dz \, \frac{\text{kgf}\cdot\text{cm}}{\text{cm}}, \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \, z dz \, \frac{\text{kgf}\cdot\text{cm}}{\text{cm}}.$$

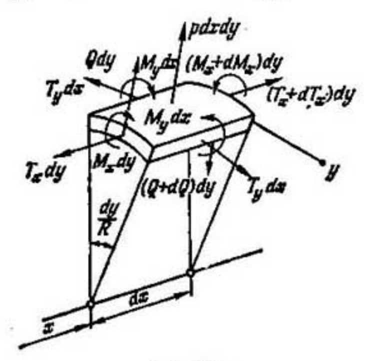


Fig. 361.

Teniendo en cuenta las expresiones (10.29) y (10.30) determinamos las fuerzas T_x y T_y y los momentos M_x y M_y en función del desplazamiento w,

$$T_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R}\right), \quad T_y = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{R} + \mu \varepsilon_0\right), \qquad (10.33)$$

$$M_x = D \frac{d^2w}{dx^2}, \quad M_y = \mu D \frac{d^2w}{dx^2}, \qquad (10.34)$$

siendo como hasta aquí,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Veamos ahora las ecuaciones de equilibrio. Volvemos de nuevo al elemento de la bóveda cilíndrica de dimensiones h, dx, dy y aplicamos a sus caras las fuerzas y momentos resultantes que son iguales a T_x, T_y, M_x y M_y multiplicados por dy y dx respectivamente (fig. 361). Aparte de los cuatro factores de fuerza citados aplicamos también

la fuerza cortante $Q\,dy$. Las fuerzas exteriores se caracterizan por la presión $p=p(x)$.

Al pasar de la cara de coordenadas x a la de coordenada $x+dx$, las fuerzas reciben los incrementos correspondientes. En las secciones axiales, debido a la simetría, permanecen constantes los factores de fuerza.

Proyectando las fuerzas sobre el eje del cilindro, obtendremos.

$$dT_x=0, \quad T_x=\text{const.}$$

Esto demuestra que la fuerza axial se determina por las condiciones de solicitación del cilindro en los extremos. Consideraremos en adelante que estas condiciones están dadas y que la fuerza T_x es conocida.

Proyectando las fuerzas sobre la dirección del radio, obtendremos la segunda ecuación de equilibrio,

$$-T_y\,dx\frac{dy}{R}-dQ\,dy+p\,dx\,dy=0,$$

ó

$$\frac{dQ}{dx}=p-\frac{T_y}{R}. \tag{10.35}$$

Obtenemos, por último, la tercera ecuación de equilibrio, igualando a cero la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al eje tangente al arco de la sección normal (en el dibujo es el eje y),

$$Q\,dy\,dx=dM_x\,dy,$$

de donde hallamos,

$$Q=\frac{dM_x}{dx} \tag{10.36}$$

El resto de las ecuaciones de equilibrio, debido a la simetría, se satisface automáticamente para valores cualesquiera de los esfuerzos activos.

Transformemos ahora las ecuaciones obtenidas. De las ecuaciones (10.33) excluimos ε_0 y de las ecuaciones (10.35) y (10.36), la fuerza cortante Q. Así obtendremos,

$$\left.\begin{aligned} T_y&=\frac{Eh}{R}w+\mu T_x, \\ \frac{d^2M_x}{dx^2}&=p-\frac{T_y}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{10.37}$$

Excluimos de estas ecuaciones T_y y resulta,

$$\frac{d^2M_x}{dx^2}=p-\frac{Eh}{R^2}w-\frac{\mu}{R}T_x.$$

Recurriendo, por último, a la primera de las expresiones (10.34) y excluyendo el momento flector M_x, se obtiene una ecuación con una incógnita que es el desplazamiento w,

$$\frac{d^4w}{dx^4}+4k^4w=\frac{p}{D}-\frac{\mu T_x}{RD}, \tag{10.38}$$

siendo

$$4k^4 = \frac{Eh}{R^2D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2h^2}. \tag{10.39}$$

Como vemos el problema en cuestión se reduce a la ecuación diferencial (10.38) que coincide con la ecuación (4.21) que fue obtenida en el caso de la flexión de la viga sobre base elástica (§ 33). La semejanza de estos problemas no da lugar a dudas. La bóveda cilíndrica puede interpretarse como un conjunto de franjas que se flexionan conjuntamente y que están unidas entre sí por fuerzas elásticas (fig. 362). Cuando la solicitación es simétrica, todas las franjas se

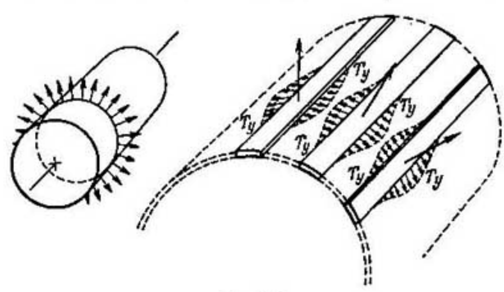


Fig. 362

flexionan de igual manera y la componente radial de las fuerzas T_y en cada sección resulta, como en el caso de la viga flotante, proporcional a la flecha local w.

Una vez resuelta la ecuación (10.38) y después de obtener w, por la ecuación (10.34) se determinan los momentos M_x y M_y, de la ecuación (10.37) se determina T_y y de la ecuación (10.36) se puede obtener la fuerza cortante,

$$Q = D\frac{d^3w}{dx^3} \tag{10.40}$$

Las tensiones máximas se determinan por las expresiones (10.32) para $z = +\frac{h}{2}$ ó $z = -\frac{h}{2}$:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\varepsilon_0 + \mu\frac{w}{R}\right) \pm \frac{h}{2}\frac{d^2w}{dx^2}\right], \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R}\right) \pm \right.$$
$$\left. \pm \mu\frac{h}{2}\frac{d^2w}{dx^2}\right].$$

Eliminando aquí, mediante las expresiones (10.33) y (10.34), las magnitudes $\left(E_0 + \mu\frac{w}{R}\right)$, $\left(\mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R}\right)$, $\frac{d^2w}{dx^2}$ y $\mu\frac{d^2w}{dx^2}$, obtendremos,

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y = \frac{T_y}{h} \pm \frac{6M_y}{h^2}. \tag{10.41}$$

Así pues, las fuerzas interiores, y después las tensiones, se expresan por el desplazamiento w.

La solución de la ecuación (10.38), como sabemos ya, se puede escribir así,

$$w = e^{-kx}(C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx) + \\ + e^{+kx}(C_3 \operatorname{sen} kx + C_4 \cos kx) + w^*, \qquad (10.42)$$

siendo w^*, la solución particular que se obtiene en función de la ley de variación de p a lo largo de la generatriz.

Para obtener las cuatro constantes, es necesario fijar cuatro condiciones de borde y resolver después el sistema de cuatro ecuaciones. En la mayoría de los casos este sistema resulta, como se dice, mal vinculado y se descompone en dos sistemas de dos ecuaciones cada uno. Con suficiente exactitud las constantes C_1 y C_2 se determinan independientemente de las constantes C_3 y C_4.

Esto se explica por el hecho de que los sumandos que figuran en la función w (10.42) tienen carácter distinto. El primer sumando,

$$e^{-kx}(C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx)$$

es una función que disminuye rápidamente. El segundo,

$$e^{+kx}(C_3 \operatorname{sen} kx + C_4 \cos kx)$$

es una función que aumenta rápidamente.

Si la longitud del cilindro l es suficientemente grande y la función

$$e^{-kx}(C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx),$$

cuando x se acerca a l adquiere valores despreciablemente pequeños, entonces se puede considerar que la deformación del cilindro en las proximidades del segundo extremo no depende de las condiciones en las inmediaciones del primero. Así pues, en el caso de un cilindro suficientemente largo, existe la posibilidad de analizar el estado tensional para valores pequeños de x, prescindiendo de la función creciente $e^{+kx}(C_3 \operatorname{sen} kx + C_4 \cos kx)$, es decir, suponiendo que $C_3 = C_4 = 0$. De la misma manera, suponiendo que $C_1 = C_2 = 0$ y manteniendo solamente el sumando creciente, se puede analizar el estado tensional del cilindro en el caso de valores de x próximos a l.

Veamos la aplicación de las fórmulas obtenidas en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10.9. El tubo cilíndrico largo, con un reborde rígido en el extremo, se somete a la presión interior p (fig. 363). Determinar las tensiones originadas por la flexión en las proximidades del reborde.

Consideramos que la fuerza axial de tracción T_x es igual a cero. Como la presión p no depende de x, la solución particular de la ecuación (10.38) será,

$$w^* = \frac{p}{4k^4 D}.$$

Introduciendo w^* en la expresión (10.42), obtendremos,

$$w=e^{-kx}(C_1 \operatorname{sen} kx+C_2 \cos kx)+e^{+kx}(C_3 \operatorname{sen} kx+C_4 \cos kx)+\frac{p}{4k^4D}.$$

Cuando x es suficientemente grande, el desplazamiento w deberá ser, claro está, una magnitud constante. Esto se encuentra en contradicción evidente con la existencia del sumando

$$e^{+kx}(C_3 \operatorname{sen} kx+C_4 \cos kx)$$

que crece ilimitadamente cuando aumenta x. Es fácil vencer esta dificultad, suponiendo que $C_3=C_4=0$. Entonces hallaremos,

$$w=e^{-kx}(C_1 \operatorname{sen} kx+C_2 \cos kx)+\frac{p}{4k^4D}.$$

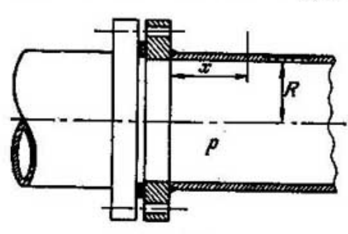


Fig. 363.

Las constantes C_1 y C_2 se escogen de tal manera, que en el origen de la coordenada x, es decir, en el lugar donde el reborde rígido se fija al cilindro el desplazamiento w y el ángulo de giro dw/dx sean iguales a cero. Obtendremos entonces,

$$C_1=C_2=-\frac{p}{4k^4D} \text{ y } w=\frac{p}{4k^4D}[1-e^{-kx}(\operatorname{sen} kx+\cos kx)].$$

Como $4k^4=Eh/R^2D$, resulta,

$$w=\frac{pR^2}{Eh}\left[1-e^{-kx}(\operatorname{sen} kx+\cos kx)\right]. \quad (10.43)$$

En la figura 364 está representado el diagrama de esta función.

Cuando x es suficientemente grande la función w adquiere el valor siguiente,

$$w=\frac{pR^2}{Eh} \quad (10.44)$$

Es fácil demostrar que esta magnitud es igual al incremento del radio del cilindro cuando se le tracciona libremente en la dirección circunferencial. En efecto, al solicitar el cilindro por una presión interior, en éste, como vimos en el capítulo anterior, surge la tensión circunferencial

$$\sigma_t=\frac{pR}{h}$$

a la cual corresponde el alargamiento

$$\varepsilon_t=\frac{pR}{Eh}.$$

Para determinar el incremento del radio del cilindro, es necesario multiplicar ε_t por R y, como resultado, se obtiene la expresión (10.44).

Basándonos en la expresión (10.43) resulta fácil establecer hasta donde, a lo largo de la generatriz, se extiende la influencia del empotramiento en el reborde. Si nos limitamos a la exactitud de un 5%, podremos afirmar que la zona de influencia se extiende aproximadamente hasta el valor de x para el cual la magnitud

$$e^{-kx}(\operatorname{sen} kx + \cos kx)$$

es siempre menor que 0,05,

$$e^{-kx}(\operatorname{sen} kx + \cos kx) < 0{,}05.$$

La suma $\operatorname{sen} kx + \cos kx$ no puede ser mayor que $\sqrt{2}$ y, por lo tanto,

$$e^{-kx} < 0{,}035,$$

de donde se obtiene.

$$kx > 3{,}34$$

o de acuerdo a la expresión (10.39),

$$x > \frac{3{,}34\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \approx 2{,}7\sqrt{Rh}.$$

Así pues, la zona de influencia del efecto del empotramiento en el borde se extiende sobre el tramo del cilindro de longitud $2{,}7\sqrt{Rh}$. Fuera de esta zona se

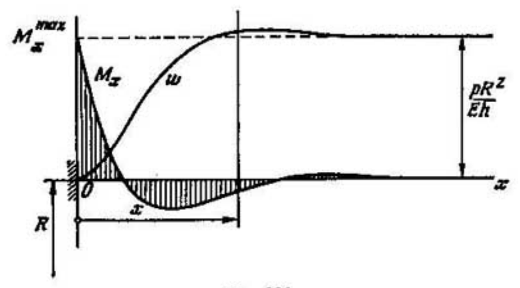


Fig. 364.

puede considerar que las tensiones, con exactitud suficiente para los fines prácticos, se determinan por la teoría membranal. La magnitud $\sqrt{Rh}$ es generalmente pequeña en comparación con la longitud del cilindro lo que demuestra que las tensiones originadas por la flexión tienen carácter puramente local. Esta particularidad de la distribución de las tensiones, en las proximidades del borde, se denomina *efecto de borde*.

Calculemos ahora el momento flector M_x por las fórmulas (10.34) y (10.43),

$$M_x = 2D\frac{pR^2}{Eh}k^2e^{-kx}(\cos kx - \operatorname{sen} kx)$$

ó

$$M_x = \frac{pRh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}e^{-kx}(\cos kx - \operatorname{sen} kx).$$

En la figura 364 está representado el diagrama de M_x. El valor máximo del momento flector se observa en el empotramiento,

$$M_x^{max} = \frac{pRh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}.$$

Como $T_x = 0$, la tensión meridional σ_x, de acuerdo a la fórmula (10.41) será,

$$\sigma_x^{max} = \frac{pR}{h} \frac{3}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \approx 1{,}82 \frac{pR}{h}$$

La tensión originada por la flexión en la dirección meridional es 1,82 veces mayor que la tensión calculada por la teoría membranal. El efecto de borde, como vemos, conduce a un aumento considerable de las tensiones máximas. Un aumento mayor aún ocurre en la zona de contacto de ciertas bóvedas como, por ejemplo, en el caso de un cilindro unido con el fondo esférico (fig. 365). Como

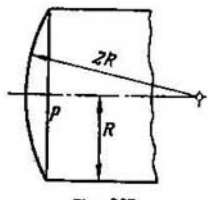


Fig. 365.

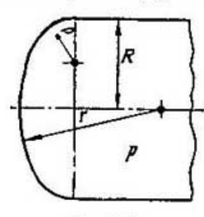


Fig. 366.

demnestran los cálculos, aquí, en el caso de igual espesor de las bóvedas, la tensión local equivalente es,

$$\sigma_{eq} = 1{,}05 \frac{pR}{h} \sqrt{\frac{R}{h}}.$$

Esta tensión es ya de un orden mayor que la que se obtiene por la teoría membranal. Para disminuir el efecto de borde, en la zona del acuerdo se usan transiciones suaves como se indica en la figura 366. En este caso, la tensión originada por la flexión se reduce considerablemente. Según los cálculos

$$\sigma_x^{max} = 0{,}145 \frac{pR}{h} \frac{R}{\rho},$$

lo que no se diferencia sensiblemente de las tensiones obtenidas por la teoría membranal.

De todo lo expuesto, no se debe deducir que la teoría membranal no es aplicable cuando en la bóveda existe el efecto de borde. Antes se indicó que si en la bóveda no existen cambios bruscos o empotramientos rígidos en los bordes, entonces la determinación de las tensiones por la teoría membranal es suficientemente exacta para todos los puntos de la bóveda. Cuando existen empotramientos locales, la teoría membranal resulta inaplicable solamente en los lugares situados en las zonas del efecto de borde, dando resultados satisfactorios en el resto de los puntos.

No siempre las tensiones originadas por la flexión y obtenidas por los métodos analizados anteriormente se pueden considerar las más peligrosas, ya que tienen carácter puramente local. Se sabe que, en el caso de materiales plásticos, el aumento brusco de las tensiones en una zona pequeña, cuando se trata de solicitación estática, no influye sensiblemente sobre la capacidad resistente del sistema. Así, por ejemplo, en el tubo cilíndrico en cuestión, en la zona donde se une con el reborde, al aumentar la presión, ocurrirá simplemente un aplastamiento local plástico del material sin que esto perjudique a la capacidad resistente del tubo. Al mismo tiempo las tensiones locales tienen gran importancia cuando se trata de materiales frágiles o de cargas que varían en función del tiempo. Esta cuestión se estudiará con detalle en el capítulo XIII.

Capítulo XI

FLEXION Y TORSION DE PERFILES DE PAREDES DELGADAS

§ 70. Particularidades esenciales de las barras de paredes delgadas

En la práctica de la construcción moderna de máquinas se emplean con mucha frecuencia las construcciones de paredes delgadas, que garantizan alta rigidez y resistencia y tienen, al mismo tiempo, un peso relativamente pequeño. Las particularidades específicas del cálculo de la resistencia de estas estructuras constituyen la causa de la aparición de un esquema de cálculo especial el esquema de la barra de paredes delgadas.

La particularidad fundamental de la barra de paredes delgadas es la relación característica de sus dimensiones geométricas. Una de las dimensiones de la sección transversal (el espesor δ) es mucho menor que la otra (la longitud s del contorno). Esta



Fig. 367.



Fig. 368.

longitud es, a su vez, mucho menor que la longitud del eje de la barra l (fig. 367). Así pues, la barra de paredes delgadas puede interpretarse, al mismo tiempo, como barra y como bóveda.

En los cálculos de la resistencia son muchos los elementos de las máquinas, cuyos esquemas de cálculo se reducen al de la barra de paredes delgadas. Estos son, ante todo, los elementos de refuerzo (fig. 368) de las bóvedas de los aviones y los cohetes. Al esquema de las barras de paredes delgadas se reducen los elementos del bastidor de los automóviles, del sistema de rodaje de los vagones y otras muchas construcciones que sirven para resistir cargas.

Los fundamentos básicos de la teoría de las barras de paredes delgadas fueron elaborados por S. P. Timoshenko. El desarrollo general y completo de esta teoría pertenece a V. S. Vlásov y se denomina la teoría de Vlásov.

El esquema de la barra de paredes delgadas mantiene las propiedades principales de la barra común y, por lo tanto, las fórmulas que fueron obtenidas anteriormente para los casos de tracción, flexión y torsión de barras siguen siendo, en lo fundamental, válidas también

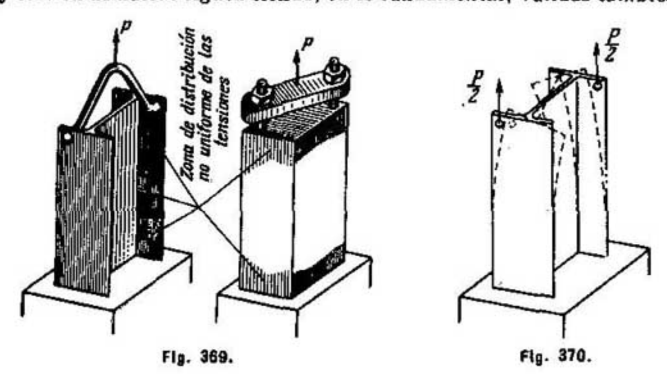


Fig. 369. Fig. 370.

en el caso de barras de paredes delgadas. Así, por ejemplo, en el capítulo II se estudió la torsión de la barra de sección en forma de perfil de paredes delgadas, abierto y cerrado. Las fórmulas obtenidas se refieren directamente a las barras de paredes delgadas y nos proporcionan los valores de las tensiones fundamentales en la torsión. Es igualmente aplicable a las barras de paredes delgadas también la fórmula que se obtuvo para las tensiones normales en la flexión,

$$\sigma = \frac{M_y}{I_x}.$$

Sin embargo, a pesar de tal semejanza con la barra, la de paredes delgadas, como consecuencia de las proporciones geométricas, tiene propiedades que se diferencian considerablemente de las de la barra de sección maciza. Así, por ejemplo, a las barras de paredes delgadas no siempre se puede aplicar el principio de Saint-Venant que se analizó en el § 8.

En calidad de ejemplo, en la figura 369 están representadas dos barras una de paredes delgadas y otra de sección maciza, traccionadas las dos por la fuerza P que se transmite a través de una grapa rígida. Con el rayado se indica la zona donde las tensiones se distribuyen de forma no uniforme en la sección transversal de la barra traccionada.

En el caso de la barra de sección maciza esta zona abarca una parte pequeña de su longitud, mientras que en el caso de la barra de paredes delgadas esta zona es incomparablemente mayor. Puede ocurrir que prácticamente, las tensiones se distribuyan de manera no uniforme en *todas* las secciones de la barra. Es decir, la profundidad de penetración del efecto de borde a lo largo del eje, en la barra de paredes delgadas, es *considerablemente mayor* que en la barra maciza.

Esto tiene una explicación física simple. Cada ala de la sección doble te está sometida a la acción de la fuerza $P/2$, aplicada excéntricamente (fig. 370). Si no existiese la pared del perfil, las alas se deformarían independientemente la una de la otra y la acción de cada momento sobre el ala se propagaría sobre toda su longitud. El problema radica en la rigidez del alma que une las alas. En el caso de una sección maciza esta unión es muy rígida y, por lo tanto, la desuniformidad de la distribución de las tensiones en la sección transversal queda limitada por una zona estrecha. En el caso de una sección delgada, la rigidez de la unión es pequeña y, por lo tanto, la desuniformidad indicada penetra mucho más lejos. Cuanto menor sea el espesor del alma tanto más acentuado será el efecto indicado.

En la figura 370 se ve también que en el caso del sistema de fuerzas dado, la sección no permanece plana. Ocurre lo que se denomina *alabeo* de la sección. Al mismo tiempo, la sección gira alrededor del eje de la barra. Así pues, en el caso de tracción pueden surgir desplazamientos propios de la torsión.

El alabeo ocurre también durante la torsión de barra de paredes delgadas. Si se limita el alabeo, por ejemplo, empotrando la barra en

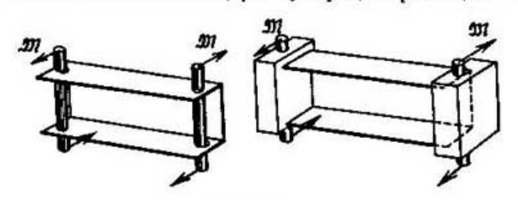


Fig. 371.

los extremos (fig. 371), entonces en las secciones transversales surgirán considerables tensiones normales, que originan un momento reactivo, aumentando así considerablemente la rigidez de la barra a la torsión. En el caso de barras de secciones macizas este fenómeno se revela en proporción mucho menor y, por lo tanto, no se tiene en consideración.

En la flexión transversal, en las secciones de la barra de paredes delgadas ocurren tensiones tangenciales de valor considerable, que se deben de considerar, al calcular la resistencia de la barra. En gene-

ral, el valor comparativo de las tensiones normales y tangenciales σ y τ en las secciones transversales de la barra, al pasar de la sección maciza a la de paredes delgadas varía considerablemente y esta cuestión requiere un estudio especial.

Las particularidades indicadas de las barras de paredes delgadas serán analizadas en este capítulo, pero para poder orientarse en estas cuestiones es necesario, ante todo, introducir toda una serie de nuevos conceptos relacionados con la geometría de la sección.

§ 71. Area sectorial

Como complemento de las características geométricas que ya conocemos (F, S_x, S_y, I_x, I_y, I_{xy}) introducimos otras nuevas. Estas características son propias solamente de las barras de paredes delgadas y se determinan sobre la base del concepto de *área sectorial*.

Fig. 372.

Veamos la línea media del contorno de la sección transversal (fig. 372). Escogemos en este contorno el origen O desde el cual se mide la longitud del arco s y trazamos desde este polo P dos líneas hacia los extremos del segmento elemental ds.

Designamos por $d\omega$ el doble del área del triángulo PAB. Está claro que

$$d\omega = r\,ds,$$

siendo r la distancia desde el polo hasta la tangente al contorno de la sección en el punto A. La integral

$$\omega = \int_0^s r\,ds \text{ cm}^2 \qquad (11.1)$$

se denomina *área sectorial*. Así pues, el área sectorial es igual al doble del área barrida por el radio vector PA al moverse el punto A por el contorno, desde el origen O hasta cierto valor s del arco. Si el radio vector gira según las manecillas del reloj, el incremento $d\omega$ del área será positivo, en caso contrario, negativo. El área sectorial es función del arco s y depende de la posición del origen de s y de la posición del polo P.

Cuando el polo y el origen están dados, en cada caso concreto se puede construir el diagrama del área sectorial. La construcción del diagrama generalmente se realiza sobre el arco del contorno de la sección, situando el valor de ω normalmente al contorno.

Supongamos que es necesario construir el diagrama de ω para el contorno de la figura 373, *a*. La posición del polo P y el origen O se

consideran dados. Dibujamos el contorno de la sección (fig. 373, *b*) sobre el cual será construido el diagrama. En nuestro caso éste consta de tramos rectos.

En cada tramo el valor de r es constante. Como se puede ver de la expresión (11.1) en este caso ω depende linealmente de s.

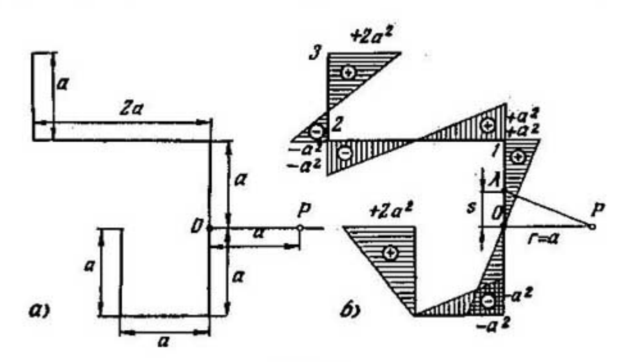


Fig. 373.

En el tramo O, 1, el vector PA gira según las manecillas del reloj y, por lo tanto, el diagrama de ω es aquí positivo,

$$\omega = + as.$$

En el tramo 1, 2 el vector gira en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, es decir, que ω disminuye, adquiriendo en el punto 2 el valor siguiente,

$$\omega = a^2 - 2a^2 = -a^2.$$

En el tramo 2, 3 el área sectorial crece de nuevo puesto que el vector vuelve a girar según las manecillas del reloj. En el punto 3,

$$\omega = -a^2 + 3a^2 = +2a^2.$$

De manera análoga se construye el diagrama de ω en los tramos situados al otro lado del origen O.

Veamos otros ejemplos de construcción de los diagramas de ω.

Ejemplo 11.1. Construir el diagrama del área sectorial del contorno cuando el polo P se encuentra en el propio contorno (fig. 374).

Si el extremo del radio vector se desliza por la recta sobre la cual se encuentra el polo, entonces el área sectorial permanecerá constante. En nuestro caso será igual a cero. En el resto de los tramos del contorno ω varía según las leyes dadas anteriormente (fig. 374).

Ejemplo 11.2. Construir el diagrama del área sectorial para el contorno circular. La posición del polo y el origen están dados en la figura 375.

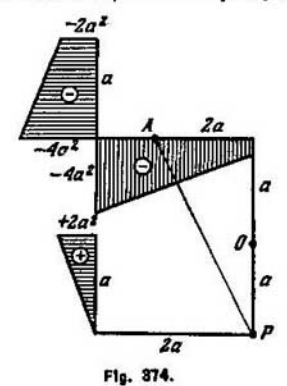


Fig. 374.

Determinamos r en función del ángulo central ψ. De la línea quebrada $PBDC$ se obtiene,

$$r = 2R\cos\psi - R.$$

Entonces

$$\omega = \int_0^s r\,ds = R^2\int_0^{\varphi}(2\cos\psi - 1)\,d\psi,$$

y, por lo tanto,

$$\omega = R^2(2\operatorname{sen}\varphi - \varphi).$$

Construimos en el contorno circular (fig. 375, *b*) el diagrama polar del área sectorial, ubicando ω sobre la normal al contorno.

En el caso de que el contorno tenga bifurcaciones (fig. 376) la construcción del diagrama del área sectorial se lleva a cabo, penetrando en cada rama y volviendo al punto de bifurcación.

Hallemos ahora la relación que existe entre el área sectorial y las coordenadas x e y en la sección. Supongamos que el origen de las coordenadas coincide con el polo (fig. 377). Está claro que, prescindiendo de las infinitésimas de orden superior, el elemento del área sectorial $d\omega$ será igual a la diferencia de las áreas duplicadas de los

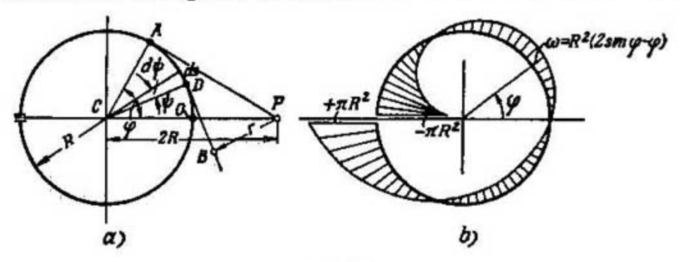


Fig. 375.

triángulos PAC y PBC, es decir,

$$d\omega = y\,dx - x\,dy. \qquad (11.2)$$

Basándose en esta relación es fácil obtener la dependencia entre el área sectorial y la posición del polo.

Supongamos dado el área sectorial en el segmento del arco Os respecto al polo P_1 (fig. 378) y que se trata de determinar el área sec-

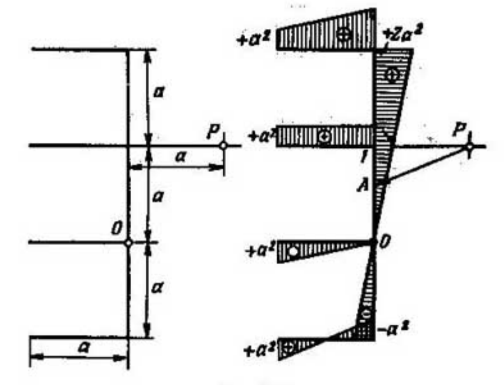


Fig. 376.

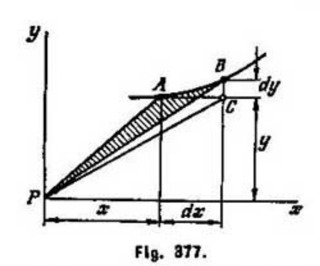


Fig. 377.

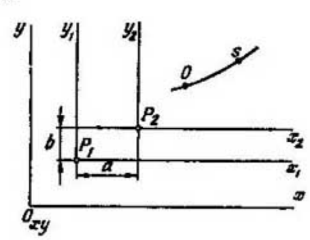


Fig. 378.

torial respecto al polo P_2 de coordenadas a, b en el sistema de ejes x_1y_1. Tenemos,

$$\omega_2(s) = \int_0^s (y_2\,dx_2 - x_2\,dy_2).$$

Pero,

$$x_2 = x_1 - a,\quad y_2 = y_1 - b,\quad dx_2 = dx_1,\quad dy_2 = dy_1.$$

Por lo tanto,

$$\omega_2(s) = \int_0^s [(y_1 - b)\,dx_1 - (x_1 - a)\,dy_1],$$

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x_1 - x_{01}) + a(y_1 - y_{01}),$$

siendo x_1 e y_1 las coordenadas del punto s y x_{01} e y_{01}, las coordenadas del punto O en el sistema original de coordenadas x_1, y_1.

Si las coordenadas de los puntos O y 1 se obtienen en un sistema arbitrario de coordenadas x, y (fig. 378) entonces,

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x - x_0) + a(y - y_0), \tag{11.3}$$

siendo $\omega_2(s)$, el área sectorial correspondiente al polo P_2, $\omega_1(s)$ el área sectorial correspondiente al polo P_1 y x, y y x_0, y_0 las coordenadas de los puntos *1* y *O* en el sistema de coordenadas x, y.

Así pues, de la expresión (11.3) se deduce que al desplazar el polo, el área sectorial varía en una magnitud que depende linealmente de las coordenadas x, y. La variación del origen a partir del cual se mide el arco s (punto *O*) altera el área sectorial, en todos los puntos del contorno, en una misma magnitud constante, ya que varía el límite inferior de integración (11.1).

§ 72. Características sectoriales y su determinación

En adelante tendremos que operar con las siguientes características geométricas integrales de las secciones de paredes delgadas,

$$\int_F \omega\, dF \text{ cm}^4,\quad \int_F x\omega\, dF \text{ cm}^5,\quad \int_F y\omega\, dF \text{ cm}^5,\quad \int_F \omega^2\, dF \text{ cm}^6$$

Cuando es constante el espesor del contorno δ estas integrales son,

$$\delta\int_s \omega\, ds,\quad \delta\int_s x\omega\, ds,\quad \delta\int_s y\omega\, ds,\quad \delta\int_s \omega^2\, ds.$$

La primera de ellas se denomina *momento estático sectorial*, la segunda y la tercera, *momentos sectoriales lineales del área*, y, por

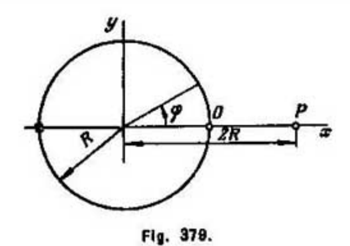


Fig. 379.

último, la cuarta de las integrales escritas, *momento sectorial de inercia* que se designa por I_ω.

Una vez construido el diagrama del área sectorial, el cálculo de las características indicadas no presenta dificultades de principio. Por ejemplo, en el caso del contorno circular de la figura 379, el área sectorial ω se obtuvo anteriormente en función del ángulo φ como sigue,

$$\omega = R^2(2\,\text{sen}\,\varphi - \varphi).$$

Entonces hallaremos,

$$\int_F \omega\, dF = R^3\delta \int_{-\pi}^{+\pi} (2 \operatorname{sen} \varphi - \varphi)\, d\varphi = 0.$$

$$\int_F x\omega\, dF = R^4\delta \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \varphi\, (2 \operatorname{sen} \varphi - \varphi)\, d\varphi = 0$$

y

$$\int_F y\omega\, dF = R^4\delta \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} \varphi\, (2 \operatorname{sen} \varphi - \varphi)\, d\varphi = 0,$$

$$I_\omega = \int_F \omega^2\, dF = R^5\delta \int_{-\pi}^{+\pi} (2 \operatorname{sen} \varphi - \varphi)^2\, d\varphi = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right) R^5\delta.$$

El hecho de que en este ejemplo resultaron iguales a cero la segunda característica y la tercera será explicado en el § 74.

Si se parte de otro polo y de otro origen de medición del arco y cuando los ejes x, y se orientan de otra manera, las características sectoriales serán, en el caso general, diferentes.

Cuando el contorno consta de tramos rectos resulta posible simplificar el cálculo de las características sectoriales, empleando el método de Vereschaguin.

Ejemplo 11.3. Para la sección de la figura 380, *a*, dados el polo *P* y el origen *O* se ha construido el diagrama del área sectorial. Calcúlense las cuatro características sectoriales analizadas anteriormente.

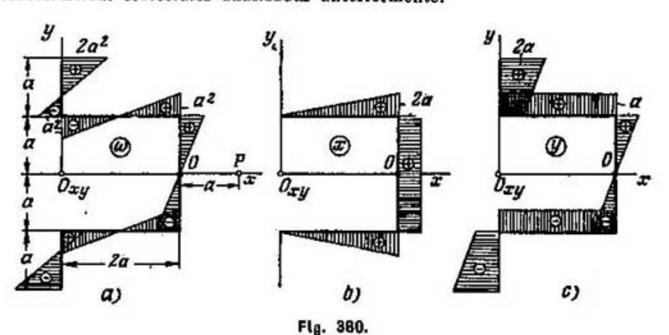


Fig. 380.

La primera de ellas es igual, claro está, a cero puesto que los diagramas de ω son en la parte superior y en la parte inferior de la sección iguales pero de signo opuesto,

$$\int_F \omega\, dF = 0.$$

Para determinar las características segunda y tercera, construimos los diagramas de x e y, es decir, los diagramas de las leyes de variación de las distancias de los puntos del contorno a los ejes y y x (fig. 380, b y c). Multiplicamos después los diagramas de ω por los diagramas de x e y por el método de Vereschaguin. Como el diagrama de x es positivo en todas partes, mientras que ω cambia de signo, al pasar el eje x, obtendremos

$$\delta \int_s x\omega \, ds = 0.$$

Multiplicando los diagramas de ω e y hallamos $\int_s y\omega \, ds$. Este resultado se multiplica después por δ y así se obtiene,

$$\int_F y\omega \, dF = \frac{8}{3} a^4 \delta.$$

Determinamos después el momento sectorial de inercia I_ω, para lo cual multiplicamos el diagrama de ω por sí mismo y multiplicamos después el resultado obtenido por δ,

$$I_\omega = 4a^5\delta.$$

§ 73. Tensiones tangenciales en la flexión transversal de barras de paredes delgadas

En la flexión transversal de una barra de paredes delgadas, en sus secciones, siguen prevaleciendo las tensiones normales σ que fundamentalmente determinan la resistencia de la barra. Sin embargo,

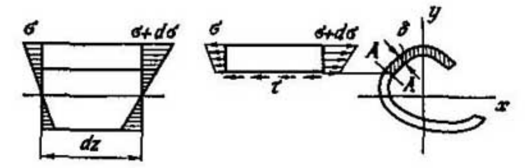


Fig. 381.

en el caso de esta barra, a diferencia del caso de la barra de sección maciza, adquieren un valor importante la magnitud y las leyes de distribución de las tensiones tangenciales.

Las tensiones tangenciales en secciones transversales de la barra de paredes delgadas se obtienen según el mismo principio que el de barra maciza. La diferencia entre las fuerzas normales correspondientes al tramo elemental situado a un lado de la sección longitudinal (fig. 381) se equilibra por las tensiones tangenciales τ. A diferencia de la barra de sección maciza, en este caso, la sección longitudinal de la barra de paredes delgadas se realiza por el plano AA *normal a la línea media del contorno* (fig. 381) y no por un plano paralelo a la capa

neutra. Esta sección tiene su mínimo espesor igual a δ. Las tensiones tangenciales que en ella surgen y que equilibran la diferencia de las fuerzas normales, son mayores que las que surgen en otras secciones longitudinales.

Volviendo a la deducción de la fórmula de Zhuravski del § 30, es fácil observar que esta deducción no varía, salvo que en lugar de b debe figurar δ. Como resultado se obtiene,

$$\tau=\frac{QS_x^*}{I_x\delta}. \qquad (11.4)$$

Como antes, en esta fórmula, Q es la fuerza cortante en la sección perpendicular al eje x, S_x^*, el momento estático de la parte rayada de la sección respecto al eje x (fig. 381) e I_x, el momento de inercia de toda la sección respecto al eje principal x.

Las tensiones tangenciales τ se suponen uniformemente distribuidas en el espesor δ de la sección. En la sección transversal de la barra surgen tensiones recíprocas a τ, que se orientan según la tangente a la línea del contorno (fig. 382). Cuando la dirección de la fuerza cortante Q no coincide con el eje principal de la sección, se obtiene,

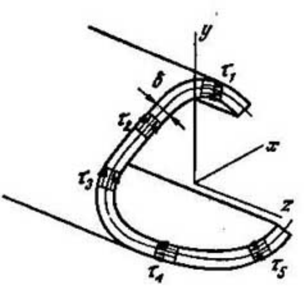


Fig. 382.

$$\tau=\frac{Q_yS_x^*}{I_x\delta}+\frac{Q_xS_y^*}{I_y\delta}, \qquad (11.5)$$

siendo Q_x y Q_y las componentes de la fuerza cortante según los ejes principales x e y.

Ejemplo 11.4. Determinar la ley de distribución de las tensiones tangenciales en el perfil U cuando se somete a una flexión transversal en el plano vertical (fig. 383). Según las dimensiones indicadas en la figura,

$$I_x=\frac{h^2\delta}{12}(h+6b).$$

En el tramo del ala de longitud s (fig. 383) se obtiene,

$$S_x^*=\frac{h}{2}\delta s.$$

Así pues, de acuerdo a la fórmula (11.4), se obtiene para el ala,

$$\tau=\frac{6Qs}{h\delta(h+6b)}. \qquad (11.6)$$

resultando que la tensión tangencial es proporcional a s. Lo mismo ocurre en el ala inferior.

Si se corta la sección en el alma, el momento estático de la parte de la sección situada sobre el nivel y será,

$$S_x^* = \frac{\delta}{2}\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

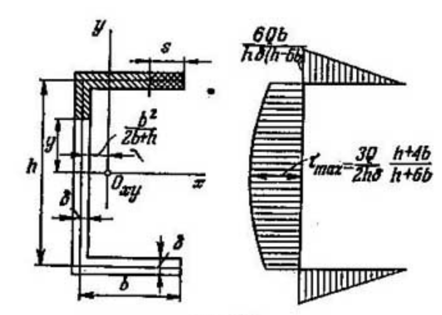


Fig. 383.

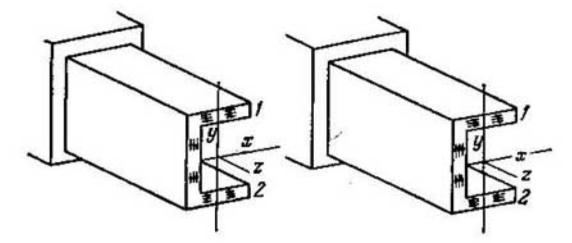


Fig. 384.

y entonces,

$$\tau = \frac{6Q\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2\right)}{h^2\delta\,(h+6b)}$$

La tensión tangencial es aquí una función cuadrática de y.

En la figura 383 está representado el diagrama de la distribución de las tensiones tangenciales a lo largo del contorno. Como vemos el signo de τ no varía en todo el contorno, lo que demuestra que la tensión tangencial obtenida mantiene la misma dirección en todos los puntos de la sección, es decir, se orienta o del borde *1* al borde *2* o del borde *2* al borde *1* según sea el signo de la fuerza cortante (fig. 384).

Ejemplo 11.5. Hallar la ley de distribución de las tensiones tangenciales en el perfil circular abierto en el caso de la flexión en el plano perpendicular al eje de simetría (fig. 385).

El momento de inercia de la sección respecto al eje x será,

$$I_x = \pi R^3 \delta.$$

El momento estático de la parte rayada de la sección se obtiene por la integral siguiente,

$$S_x^* = \delta \int_{\varphi}^{\pi} R^2 \operatorname{sen} \psi \, d\psi = R^2 \delta (1 + \cos \varphi).$$

De acuerdo a esto,

$$\tau = \frac{Q}{\pi R \delta} (1 + \cos \varphi)$$

es la expresión que permite construir el diagrama de τ (fig. 385).

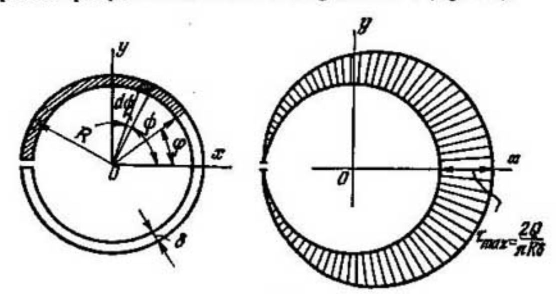


Fig. 385.

§ 74. Centro de flexión

El sistema de fuerzas que se encuentra en el plano de la sección, de acuerdo con las leyes de la mecánica, se puede desplazar a cualquier punto del plano, obteniendo una resultante y un momento.

La magnitud de la resultante no depende del punto de aplicación y siempre es igual a la fuerza cortante Q. Esto se puede demostrar, por ejemplo, en el caso del perfil circular abierto que se analizó (fig. 385). En este caso, la resultante de las fuerzas tangenciales según el eje y se obtiene de la integral siguiente,

$$\int_F \tau \cos \varphi \, dF = \frac{Q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi,$$

que, como es fácil demostrar, es igual a Q. Lo mismo ocurre en el caso de la sección U que se analizó anteriormente y, en general, en el caso de cualquier perfil.

En lo que se refiere al momento resultante en la sección, éste depende de la posición del punto de reducción de las fuerzas. Así, por ejemplo, en el caso de la misma sección circular abierta, el momento

de las fuerzas tangenciales respecto al centro del círculo (fig. 386) será,

$$M_0 = \int_F \tau R\, dF = \frac{QR}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos\varphi)\, d\varphi = 2QR$$

Al pasar a otro punto el momento varía, claro está, en la magnitud Qa, siendo a, la distancia entre el primer punto y el segundo. Así, si se desplazan las fuerzas al punto A (fig. 386, c), entonces,

$$M_A = M_0 - QR = QR.$$

Existe un punto, respecto al cual, el momento de fuerzas tangenciales en la sección, en la flexión transversal, es igual a cero. Este

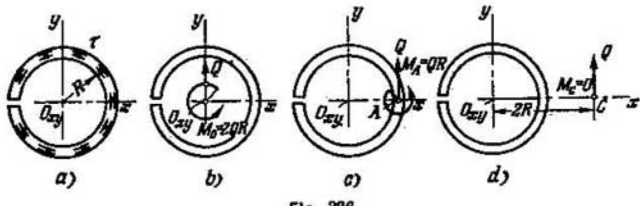


Fig. 386.

punto se denomina *centro de flexión*. En el ejemplo analizado, el centro de flexión se encuentra a la distancia $2R$ del centro del círculo (fig. 386, d).

En el caso de la sección U (fig. 387) se obtiene para el punto A,

$$M_A = 2\frac{h}{2} \int_0^b \tau\delta\, ds$$

De acuerdo a la expresión (11.6), una vez realizada la integración, se obtiene,

$$M_A = Q\frac{3b^2}{h + 6b},$$

de donde se deduce que el centro de flexión se encuentra a la distancia $\frac{3b^2}{h+6b}$ de la línea media del alma (fig. 387, c).

En el caso de secciones de dos ejes de simetría, el centro de flexión coincide, claro está, con el centro de gravedad.

En algunos de los casos más simples resulta posible determinar la posición del centro de flexión sin necesidad de recurrir a cálculos de ninguna clase. Por ejemplo, en el caso de los perfiles te y angular (fig. 388) el centro de flexión se encuentra en el punto de intersección de las líneas medias del ala y del alma. El momento de las fuerzas tangenciales respecto a este punto es siempre igual a cero.

Así pues, si el momento de las fuerzas tangenciales en la sección respecto al centro de flexión es igual a cero será igual a cero también el momento de las fuerzas exteriores respecto a este centro, pues de lo contrario, aparecerán en la barra deformaciones propias no sólo de la

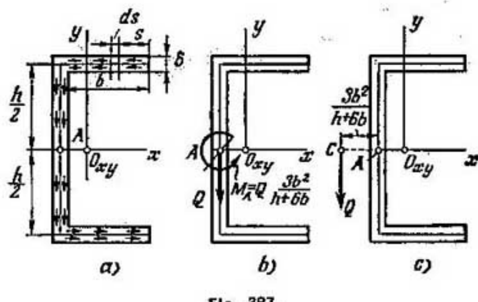


Fig. 387.

flexión transversal, sino también de la torsión. Será conveniente en adelante, al determinar los factores de fuerza interiores, desplazar las fuerzas tangenciales que actúan en la sección, no al centro de gravedad, sino al centro de flexión y entender por momento torsor el momento interior respecto al centro de flexión. Así, analizando, por

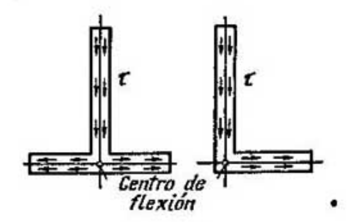


Fig. 388.

ejemplo, la barra representada en la figura 389, se podrá afirmar que, puesto que la línea de acción de la fuerza pasa por el eje z' (eje de los centros de flexión), el momento torsor en la sección será igual a cero y la barra no sufrirá torsión. Pero, por ejemplo, en el caso de la misma barra empotrada en un extremo y sometida a la acción del peso propio (fig. 390), ésta sí sufrirá torsión. El momento torsor en el empotramiento será,

$$M_t = Q \cdot 2R = ql \cdot 2R.$$

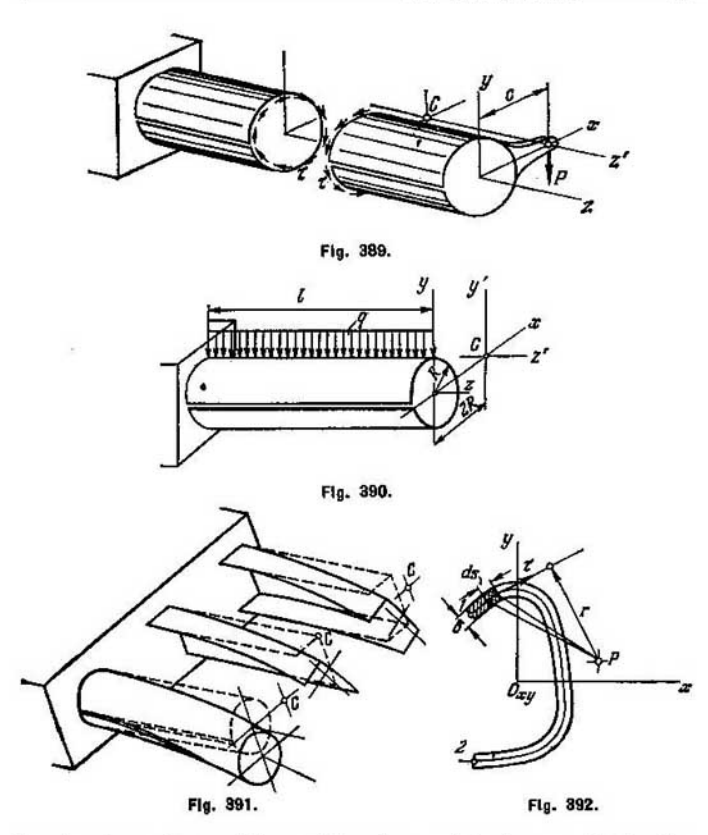


Fig. 389.

Fig. 390.

Fig. 391.

Fig. 392.

Las tensiones tangenciales adicionales, originadas por la torsión, se distribuyen en la sección por las leyes del perfil abierto, resultando

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{\delta^2 s} = \frac{3ql}{\pi\delta^2}$$

[véase la fórmula (2.28) del § 24]. Un cuadro semejante se observa en el caso de la flexión de un perfil arbitrario de paredes delgadas, cuando la resultante de las fuarzas exteriores no pasa, en la sección, por el centro de flexión (fig. 391).

Determinemos ahora la posición del centro de flexión en el caso general de un perfil de paredes delgadas asimétrico (fig. 392).

El momento de las fuerzas tangenciales respecto a cierto punto P será,

$$M_P = \int_F \tau\delta r\, ds.$$

El producto $r\,ds$ representa el diferencial del área sectorial $d\omega$ y, por lo tanto,

$$M_P = \int_F \tau\delta\, d\omega.$$

Eliminamos τ mediante la ecuación (11.5),

$$M_P = \frac{Q_y}{I_x}\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF}\, dF + \frac{Q_x}{I_y}\int_F S_y^* \frac{d\omega}{dF}\, dF. \tag{11.7}$$

Integrando por partes en el caso de la primera de las integrales obtenidas hallaremos,

$$\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF}\, dF = S_x^*\omega \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_F \frac{dS_x^*}{dF}\,\omega\, dF,$$

donde los subíndices de s_1 y s_2 indican que la magnitud $S_x^*\omega$ se refiere a los puntos *1* y *2* (fig. 392). Recordamos que S_x^* constituye el momento estático de una parte de la sección respecto al eje x,

$$S_x^* = \int_{F^*} y\, dF.$$

El área del tramo rayado correspondiente al punto *1* es igual a cero y, por lo tanto, $S_x^* = 0$. En el punto *2*, cuando se trata de *toda* la sección, esta magnitud es también nula, puesto que el eje x es central. Por lo tanto $S_x^*\omega\,|_{s_1}^{s_2} = 0$. Está claro que

$$\frac{dS_x^*}{dF} = y$$

y para la integral en cuestión se obtiene,

$$\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF}\, dF = -\int_F y\omega\, dF.$$

De manera análoga se transforma la segunda integral que figura en la expresión (11.7). Como resultado obtendremos,

$$M_P = -\frac{Q_y}{I_x}\int_F y\omega\, dF - \frac{Q_x}{I_y}\int_F x\omega\, dF.$$

Cuando el punto P coincide con el centro de flexión el momento M_P es igual a cero, independientemente de las magnitudes

de Q_x y Q_y. Esto es posible solamente cuando

$$\int_F y\omega\, dF = 0 \quad \text{y} \quad \int_F x\omega\, dF = 0. \tag{11.8}$$

Así pues, los momentos lineales sectoriales respecto a los ejes centrales principales y al polo que coincide con el centro de flexión son iguales a cero. El origen de ω no juega aquí ningún papel. Al cambiar el origen, el área sectorial varía en una magnitud constante lo que no altera las ecuaciones (11.8).

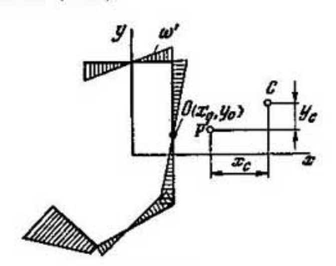


Fig. 393.

La posición del centro de flexión se obtiene prácticamente por el procedimiento siguiente. Se construye el diagrama de las áreas sectoriales ω' para un polo arbitrario P' (fig. 393). Suponemos después que las diferencias de las coordenadas del centro de flexión C y del polo P' son x_c e y_c. De acuerdo a la fórmula (11.3),

$$\omega = \omega' - y_c(x - x_0) + x_c(y - y_0).$$

La primera de las expresiones (11.8) nos da entonces

$$\int_F y\omega'\, dF - y_c \int_F xy\, dF + y_c x_0 \int_F y\, dF + x_c \int_F y^2\, dF - x_c y_0 \int_F y\, dF = 0.$$

Como los ejes x e y son ejes principales, obtendremos

$$\int_F xy\, dF = 0, \quad \int_F y\, dF = 0, \quad \int_F y^2\, dF = I_x,$$

resultando que,

$$\int_F y\omega'\, dF + x_c I_x = 0.$$

De manera análoga se transforma la segunda de las expresiones (11.8) y hallamos definitivamente

$$x_c = \frac{-\int_F y\omega'\, dF}{I_x}, \quad y_c = \frac{+\int_F x\omega'\, dF}{I_y}. \tag{11.9}$$

Ejemplo 11.6. Determinar la posición del centro de flexión en el caso del perfil rectangular de paredes delgadas seccionado en el vértice inferior izquierdo (fig. 394, *a*).

Los ejes centrales principales en este caso son paralelos a los lados del rectángulo. Con facilidad se obtiene,

$$I_x = \frac{10}{3} a^3\delta, \qquad I_y = \frac{7}{6} a^3\delta.$$

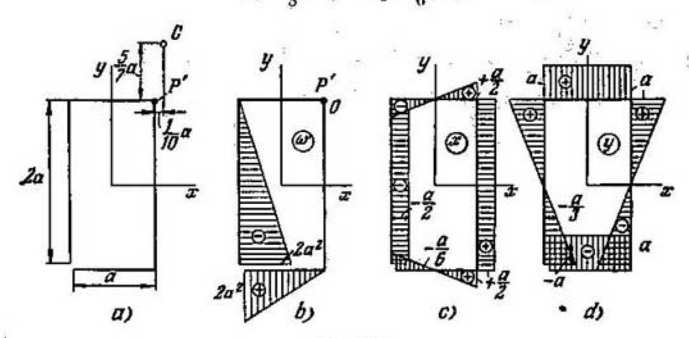


Fig. 394.

Para simplificar lo máximo posible el diagrama de ω', situamos el polo P' en el vértice superior derecho de la sección. Construimos después los diagramas de ω', x e y (fig. 390, *b*, *c*, *d*). Después de multiplicar los diagramas hallaremos,

$$\int_F x\omega'\, dF = \delta\left[\frac{1}{2}\, 2a^2\cdot 2a\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot a\cdot\frac{a}{6}\right] = \frac{5}{6} a^4\delta,$$

$$\int_F y\omega'\, dF = \delta\left[\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2a\cdot\frac{a}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot a\cdot a\right] = -\frac{1}{3} a^4\delta.$$

Por las fórmulas (11.9) se obtiene

$$x_c = +\frac{1}{10} a, \quad y_c = +\frac{5}{7} a.$$

Orientamos los segmentos x_c e y_c según los ejes principales a partir del polo P' (fig. 394, *a*).

§ 75. Alabeo de las secciones transversales de la barra de paredes delgadas sometida a torsión

El problema de la torsión de barras de paredes delgadas de sección cerrada y abierta se analizó en el capítulo II. En aquella ocasión se calculaban solamente las tensiones tangenciales en las secciones transversales de la barra. Analicemos ahora algunas particularidades adicionales relacionadas con la aparición de tensiones normales en las secciones transversales de la barra torsionada.

Este análisis se basa sobre la hipótesis del contorno rígido, es decir, se supone que el contorno de la sección transversal de la barra conserva su forma durante la torsión. Si, por ejemplo, la sección era circular, permanecerá después circular también, si era rectangular, permanecerá siendo rectangular. Al mismo tiempo, los puntos de la sección reciben diferentes desplazamientos a lo largo del eje de la barra. Ocurre lo que se denomina alabeo de la sección.

Veamos la torsión de una barra de perfil abierto (fig. 395). Supongamos que durante la torsión de la barra, las secciones transversales

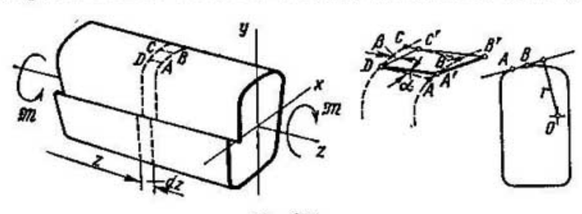


Fig. 395.

giran respecto a cierto punto inmóvil O que denominaremos *centro de torsión*.

El ángulo de distorsión γ en el área elemental $ABCD$ se obtiene como la suma de los ángulos α y β, es decir, $\gamma=\alpha+\beta$. Determinemos estos sumandos por separado.

De la figura se deduce que

$$\alpha=\frac{AA'}{dz}.$$

Pero como $AA'=r\,d\varphi$, siendo r la distancia del centro de torsión a la tangente a la línea del contorno en el punto A y $d\varphi$, el ángulo de giro mutuo de las secciones contiguas, obtendremos,

$$\alpha=\frac{r d\varphi}{dz}=r\theta.$$

Designamos por w el desplazamiento de los puntos de la sección en la dirección del eje z, obteniendo,

$$\beta=\frac{dw}{ds}.$$

Por lo tanto,

$$\gamma=r\theta+\frac{dw}{ds}.$$

De acuerdo a la ley de Hooke podremos escribir,

$$dw=\left(\frac{\tau}{G}-r\theta\right)ds. \qquad (11.10)$$

En la línea media del contorno abierto durante la torsión $\tau=0$ y, por lo tanto,

$$dw=-\theta r\,ds=-\theta\,d\omega,$$

ó

$$w=-\theta\int d\omega=-\theta\omega. \qquad (11.11)$$

Así pues, el alabeo de la sección de la barra de paredes delgadas sigue, a lo largo del contorno, la ley de variación del área sectorial.

Los desplazamientos w obtenidos (11.11) no están completamente determinados puesto que el área sectorial depende del origen desde el cual se mide el arco s y de la posición del polo. Al variar el origen, la magnitud de ω (y por lo tanto w también) varía en una magnitud constante. Al variar la posición del polo, w varía en magnitudes que

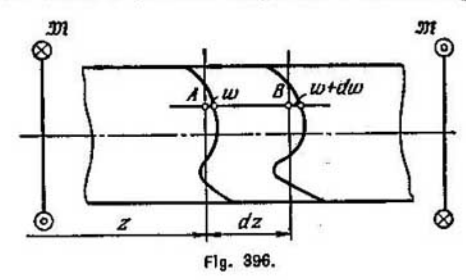


Fig. 396.

dependen linealmente de las coordenadas x e y. Estas variaciones corresponden al desplazamiento paralelo del plano de la sección, como un cuerpo rígido, a lo largo del eje y al giro respecto a los ejes x e y. En lo que se refiere al alabeo de la sección transversal la fórmula (11.11) lo determina plenamente.

Analizando la expresión (11.11) vemos también que el alabeo es proporcional al ángulo unitario de torsión. Si θ varía a lo largo del eje z, variará también w. Si limitamos el alabeo, introduciendo ligaduras, se limitará también el ángulo de torsión.

Cuando el alabeo varía según el eje z, en las secciones transversales de la barra aparecerán tensiones normales. En efecto, para cierto segmento AB de longitud dz (fig. 396) se obtiene,

$$\varepsilon=\frac{dw}{dz}=-\omega\frac{d\theta}{dz},$$

y de acuerdo a esto,

$$\sigma=-E\omega\frac{d\theta}{dz}. \qquad (11.12)$$

La aparición de las tensiones normales que varían a lo largo del eje z conduce obligatoriamente a la aparición de tensiones tangencia-

les secundarias τ_2 en la sección transversal de la barra. La tensión τ_2 se determina de manera análoga a como se realizó en la flexión transversal de la barra (véase § 30 y 73).

De la condición de equilibrio de la parte separada de la barra de paredes delgadas (fig. 397) se obtiene,

$$\tau_2\delta = -\int\limits_{F^*} \frac{d\sigma}{dz}\, dF,$$

o, teniendo en cuenta la expresión (11.12),

$$\tau_2\delta = E\frac{d^2\theta}{dz^2}\int\limits_{F^*} \omega\, dF. \tag{11.13}$$

Las tensiones tangenciales secundarias τ_2 se distribuyen uniformemente en el espesor del perfil y no son iguales a cero en la línea

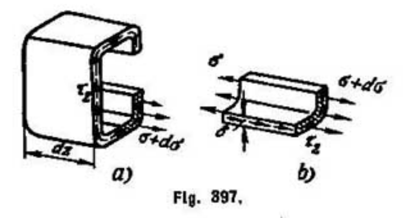


Fig. 397.

media de la sección como esto ocurre con las tensiones primarias τ.

Este resultado se encuentra en cierta contradicción con la suposición anterior, según la cual en la línea del contorno las tensiones tangenciales son iguales a cero [(véanse las fórmulas (11.10) y (11.11)]. Es decir, que cuando el ángulo de torsión θ es variable, la ley real de variación de w en la sección se diferencia de la ley del área sectorial. Esto, sin embargo, no influye sensiblemente sobre las dependencias fundamentales y las expresiones obtenidas determinan con suficiente exactitud las magnitudes de las tensiones normales y de las tensiones tangenciales secundarias, cuando θ es variable.

En lo dicho se puede advertir fácilmente cierta analogía con la flexión pura y la flexión transversal. En la flexión transversal las tensiones normales se determinaron, suponiendo que las secciones transversales, como en la flexión pura, permanecían planas, sin alabearse. Después, a través de las tensiones normales, se determinaban las tensiones tangenciales, cuya existencia contradecía a la suposición inicial sobre las secciones transversales planas. Esta contradicción, como en el caso que ahora se analiza, no conduce, sin embargo, a errores cuantitativos considerables.

§ 76. Torsión restringida de barras de paredes delgadas de sección abierta

Apliquemos las relaciones obtenidas al caso de la torsión restringida.

Se entiende por torsión restringida el caso cuando se limita el alabeo de las secciones. Por ejemplo, en la barra de paredes delgadas empotrada en un extremo (fig. 398) los desplazamientos w de todos los

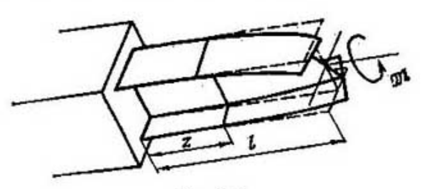


Fig. 398.

puntos de la sección de empotramiento son iguales a cero. A medida que nos alejamos de esta sección, el alabeo y el ángulo unitario de torsión aumentan.

Las tensiones normales en la sección forman un sistema de fuerzas autoequilibrado. Los momentos flectores respecto a los ejes x e y y la fuerza normal son iguales a cero,

$$\int_F \sigma y\, dF = 0, \quad \int_F \sigma x\, dF = 0, \quad \int_F \sigma\, dF = 0,$$

o de acuerdo a la expresión (11.12),

$$\int_F \omega y\, dF = 0, \quad \int_F \omega x\, dF = 0, \qquad (11.14)$$

$$\int_F \omega\, dF = 0. \qquad (11.15)$$

Aquí el área sectorial ω se refiere al centro de torsión. Por lo tanto, de las dos expresiones primeras se deduce que, en el caso de la torsión restringida, el centro de torsión coincide con el centro de flexión.

Al construir el diagrama de ω, el origen, desde el que se mide el arco s, se debe escoger de manera tal que se cumpla la condición (11.15). En el caso de un perfil simétrico, está claro, que el punto inicial se deberá situar sobre el eje de simetría. En el caso general se debe construir primeramente el diagrama de ω_0 para un origen arbitrario. Entonces,

$$\omega = \omega_0 + C.$$

De acuerdo a la condición (11.15)

$$\int_F \omega\, dF = \int_F \omega_0\, dF + CF = 0,$$

de donde se obtiene la constante C,

$$C = -\frac{\int_F \omega_0 dF}{F}. \qquad (11.16)$$

Esta magnitud se debe sumar a los valores de ω_0 en todos los puntos del contorno y, de esta manera, el diagrama obtenido satisfará la condición (11.15).

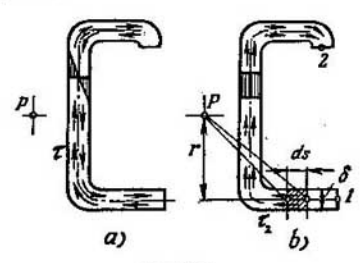


Fig. 399.

El diagrama de ω correspondiente al polo que coincide con el centro de flexión y que satisface la condición (11.15) se denomina diagrama del *área sectorial principal.*

Las tensiones tangenciales forman en la sección un momento torsor resultante que se puede interpretar como la suma de dos momentos,

$$M_t = M_1 + M_2. \qquad (11.17)$$

El primer sumando constituye el momento resultante de las tensiones tangenciales básicas τ (fig. 399, *a*). La magnitud de estas tensiones y la ley de su distribución en la sección las conocemos ya del capítulo II. De acuerdo a la fórmula (2.26)

$$M_1 = GI_t\theta, \qquad (11.18)$$

siendo I_t, la característica geométrica de la sección que ya conocemos (véase el § 24). El segundo sumando es el momento de las tensiones tangenciales secundarias τ_2 (fig. 399, *b*)

$$M_2 = \int_s \tau_2 \delta r\, ds = \int_F \tau_2 \delta\, d\omega,$$

o de acuerdo a la expresión (11.13)

$$M_s = E\frac{d^2\theta}{dz^2}\int\limits_F\left(\int\limits_{F^*}\omega dF\right)d\omega.$$

Integrando por partes hallaremos,

$$\int\limits_F\left(\int\limits_{F^*}\omega dF\right)d\omega = \omega\int\omega dF\Big|_{s_1}^{s_2} - \int\limits_F\omega^2 dF$$

Como para los puntos *1* y *2* del contorno (fig. 399) $\int\omega\, dF = 0$, obtendremos,

$$M_s = -EI_\omega\frac{d^2\theta}{dz^2}. \qquad (11.19)$$

La expresión (11.17) se reduce ahora a la siguiente,

$$GI_t\theta - EI_\omega\frac{d^2\theta}{dz^2} = M_t.$$

Designamos,

$$\frac{GI_t}{EI_\omega} = \alpha^2, \qquad (11.20)$$

obteniendo definitivamente la ecuación diferencial de la torsión restringida,

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2\frac{M_t}{GI_t}, \qquad (11.21)$$

siendo M_t una función conocida de z. Resolviendo la ecuación se halla

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z + \theta^*, \qquad (11.22)$$

siendo θ^*, la solución particular de la ecuación (11.21).

Ejemplo 11.7. Volvamos al caso de la barra empotrada en un extremo (fig. 398). Aquí,

$$M_t = \mathfrak{M} = \text{const}$$

y entonces,

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\frac{\alpha^2\mathfrak{M}}{GI_t}.$$

La solución particular de esta ecuación será,

$$\theta^* = \frac{\mathfrak{M}}{GI_t}$$

y, por lo tanto,

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z + \frac{\mathfrak{M}}{GI_t}.$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las siguientes condiciones de borde. Cuando $z = 0$ el desplazamiento axial $w = 0$. Por lo tanto, para $z = 0$ el ángulo $\theta = 0$, lo que se deduce de la fórmula (11.11). Así pues,

$$C_2 + \frac{\mathfrak{M}}{GI_t} = 0.$$

Cuando $z=l$ la tensión $\sigma=0$ o, de acuerdo a la expresión (11.12), $\frac{d\theta}{dz}=0$ y entonces,

$$C_1\alpha \operatorname{ch} \alpha l + C_2\alpha \operatorname{sh} \alpha l = 0.$$

Definitivamente se obtiene,

$$C_2 = -\frac{\mathfrak{M}}{GI_t}, \quad C_1 = \frac{\mathfrak{M}}{GI_t} \operatorname{th} \alpha l,$$

$$\theta = \frac{\mathfrak{M}}{GI_t}[1 + \operatorname{th} \alpha l \operatorname{sh} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha z].$$

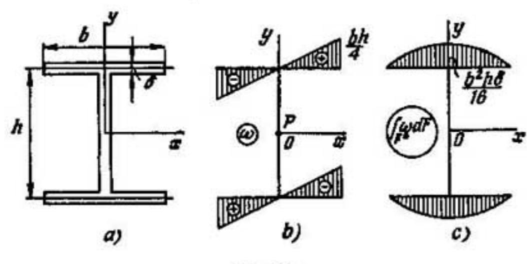


Fig. 400.

El desplazamiento angular máximo será

$$\varphi = \int_0^l \theta\, dz = \frac{\mathfrak{M}l}{GI_t}\left[1 - \frac{1}{\alpha l} \operatorname{th} \alpha l\right], \tag{11.23}$$

mientras que en el caso de la torsión pura (no restringida),

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{GI_t}.$$

Las tensiones normales máximas surgen del empotramiento

$$\sigma = -E\omega \frac{d\theta}{dz}\bigg|_{z=0} = -\frac{E\mathfrak{M}}{GI_t}\omega\alpha \operatorname{th} \alpha l. \tag{11.24}$$

Los momentos componentes M_1 y M_2 en una sección arbitraria serán los siguientes,

$$M_1 = GI_t\theta = \mathfrak{M}(1 + \operatorname{th} \alpha l \operatorname{sh} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha z),$$

$$M_2 = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -\mathfrak{M}(\operatorname{th} \alpha l \operatorname{sh} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha z).$$

Pasando a los cálculos numéricos, analicemos la sección doble te (fig. 400, *a*) cuyas dimensiones son,

$$h = 200 \text{ mm}, \ b = 100 \text{ mm}, \ \delta = 10 \text{ mm}, \ l = 1 \text{ m}.$$

El material es acero, $\mu = 0{,}3$ y $E = 2\cdot 10^6$ kgf/cm².

Construimos el diagrama del área sectorial principal (fig. 400, *b*) y, multiplicando los diagramas, determinamos I_ω

$$I_\omega = \frac{1}{24} b^3h^2\delta.$$

De acuerdo a la fórmula (2.30)

$$I_t = \frac{1}{3}\delta^3(2b+h).$$

Calculamos la magnitud de α (11.20),

$$\alpha^2 = \frac{4}{1+\mu}\frac{\delta^2(2b+h)}{b^3h^2} = 3{,}08\cdot 10^{-6}\frac{1}{\text{mm}^2}$$

y, por lo tanto,

$$\alpha = 1{,}75\cdot 10^{-3}\frac{1}{\text{mm}},\quad \alpha l = 1{,}75.$$

Por las tablas de las funciones hiperbólicas hallamos,

$$\frac{1}{\alpha l}\,\text{th}\,\alpha l = \frac{0{,}9411}{1{,}75} = 0{,}537$$

De la expresión (11.23) se obtiene,

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{GI_t}0{,}463.$$

En el caso analizado, debido a la limitación del alabeo, el desplazamiento angular en el extremo de la barra disminuye en más del doble.

Por la fórmula (11.24) calculamos la tensión normal máxima que, en nuestro caso, ocurre en el borde del ala, en el empotramiento,

$$|\sigma_{max}| = \frac{E\mathfrak{M}}{GI_t}\frac{bh}{4}\alpha\,\text{th}\,\alpha l = 161\cdot 10^{-4}\mathfrak{M}\,\text{kgf/cm}^2.$$

Aquí $\mathfrak{M}$ se debe introducir en kgf·cm. Las tensiones tangenciales se determinan por las fórmulas (2.31) y (11.13),

$$\tau_{1max} = \frac{3M_1}{\delta^2(2b+h)},\quad \tau_{2max} = -\frac{M_2}{I_\omega\delta}\int_{F^*}\omega\,dF.$$

En el empotramiento $M_1 = 0$, $M_2 = \mathfrak{M}$, por lo tanto, $\tau_{1max} = 0$, pero

$$\tau_{2max} = -\frac{\mathfrak{M}}{I_\omega\delta}\left(\int_{F^*}\omega dF\right)_{max} = \pm\frac{3}{2}\frac{\mathfrak{M}}{bh\delta} = \pm\,7{,}5\cdot 10^{-4}\,\mathfrak{M}\,\text{kgf/cm}^2.$$

Esta tensión ocurre en el punto de unión del ala con el alma $\left(\text{véase el diagrama de} \int_{F^*}\omega\,dF \text{ de la figura 400, } c\right)$. En el extremo libre de la barra, es decir, cuando $z = l$,

$$M_1 = 0{,}6614\,\mathfrak{M},\quad M_2 = 0{,}3386\,\mathfrak{M},$$

$$\tau_{1max} = 49{,}6\cdot 10^{-4}\,\mathfrak{M}\ \text{kgf/cm}^2,\quad \tau_{2max} = 2{,}5\cdot 10^{-4}\,\mathfrak{M}\ \text{kgf/cm}^2.$$

En el caso de la torsión no restringida obtendríamos,

$$\tau_{1max} = \frac{3\mathfrak{M}}{\delta^2(2b+h)} = 75\cdot 10^{-4}\,\mathfrak{M}\ \text{kgf/cm}^2,\quad \tau_{2max} = 0.$$

Ejemplo 11.8. Determinar el ángulo de giro de la sección A para la barra solicitada por dos momentos iguales y de signo contrario $\mathfrak{M}$ (fig. 401).

Cuando la barra no es de paredes delgadas, el ángulo buscado de giro resulta igual a cero, puesto que en el tramo OA el momento torsor no existe. En nuestro caso ocurre algo diferente. Ubicamos el origen de z en el empotramiento y analizamos dos tramos de la barra. En el primero, de acuerdo a la fórmula (11.22)

$$\theta_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z.$$

La función θ^* se convierte aquí en cero puesto que en este tramo $M_t = 0$. En el segundo tramo,

$$\theta_2 = C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z + \frac{\mathfrak{M}}{GI_t}.$$

En el empotramiento $w=0$. Por lo tanto, cuando $z=0$, $\theta_1=0$, de donde se obtiene que $C_2=0$.

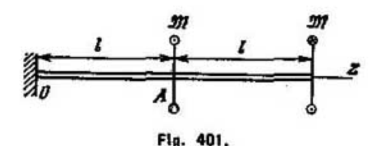


Fig. 401.

En la sección A, al pasar del primer tramo al segundo, la función w no deberá sufrir discontinuidad alguna y, por lo tanto, $\theta_1 = \theta_2$. Deberá ser continua también la función σ. Por lo tanto, en la sección A $d\theta_1/dz = d\theta_2/dz$. Por último, en el extremo libre de la barra, cuando $z=2l$, $\sigma=0$ ó $d\theta_2/dz=0$.

Las condiciones indicadas permiten plantear un sistema de ecuaciones para la determinación de C_1, C_3 y C_4,

$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \operatorname{sh} \alpha l - C_4 \operatorname{ch} \alpha l = \frac{\mathfrak{M}}{GI_t},$$

$$C_1 \operatorname{ch} \alpha l - C_3 \operatorname{ch} \alpha l - C_4 \operatorname{sh} \alpha l = 0, \quad C_3 \operatorname{ch} 2\alpha l + C_4 \operatorname{sh} 2\alpha l = 0,$$

de donde se obtiene,

$$C_1 = \frac{\mathfrak{M}}{GI_t} \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l}, \quad \theta_1 = \frac{\mathfrak{M}}{GI_t} \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} \operatorname{sh} \alpha z.$$

El ángulo de giro en cuestión, en la sección A, será el siguiente,

$$\varphi = \int_0^l \theta_1 \, dz = \frac{\mathfrak{M}}{\alpha GI_t} \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} (\operatorname{ch} \alpha l - 1),$$

donde α se determina por la fórmula (11.20).

El desplazamiento angular en este caso surge como consecuencia de la interacción de las fuerzas entre los tramos, relacionada con la limitación del alabeo. Esta cuestión se analizará con más detalle en el parágrafo siguiente.

§ 77. Caso general de solicitación de una barra de paredes delgadas. Bimomento

En el caso general de solicitación los desplazamientos axiales w se pueden expresar como sigue,

$$w = w_0 + \varphi_y x + \varphi_x y - \theta \omega,$$

siendo w_0, φ_y y φ_x las magnitudes que caracterizan el desplazamiento

y el giro de la sección como un todo rígido. La función ω se escoge de acuerdo con el diagrama principal del área sectorial.

Las tensiones normales en la sección serán,

$$\sigma = E\frac{dw}{dz} = E\left(\frac{dw_0}{dz} + \frac{d\varphi_y}{dz}x + \frac{d\varphi_x}{dz}y - \frac{d\theta}{dz}\omega\right). \qquad (11.25)$$

Multiplicamos esta expresión por dF, $x\,dF$, $y\,dF$ y $\omega\,dF$, sucesivamente e integramos sobre el área de la sección transversal. Se tiene en cuenta que los ejes x e y son ejes principales y que el diagrama de ω es el diagrama del área sectorial principal,

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma\,dF = EF\frac{dw_0}{dz}, \\ M_y &= \int_F \sigma x\,dF = EI_y\frac{d\varphi_y}{dz}, \\ M_x &= \int_F \sigma y\,dF = EI_x\frac{d\varphi_x}{dz}, \\ B &= \int_F \sigma\omega\,dF = -EI_\omega\frac{d\theta}{dz}. \end{aligned} \qquad (11.26)$$

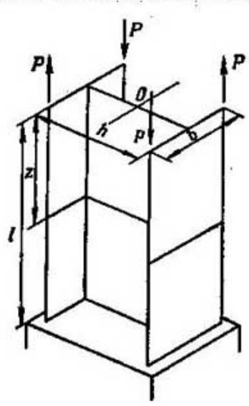


Fig. 402.

Se entiende aquí por B una característica de fuerza nueva que se determina por la expresión (11.26) y se denomina *bimomento*. Se mide el bimomento en kgf·cm². El bimomento se diferencia de los otros factores de fuerza interiores conocidos por ser el primero un factor autoequilibrado que no se puede obtener de la condición de equilibrio de la parte separada de la barra. Por ejemplo, si se solicita la barra de sección doble te por cuatro fuerzas iguales P (fig. 402), el bimomento en la sección extrema será, según la expresión (11.26),

$$B = \sum_{i=1}^{4} P_i\omega_i,$$

siendo ω_i, el valor del área sectorial del punto de aplicación de la fuerza P_i, es decir,

$$B = 4P\frac{bh}{4} = Pbh.$$

En las secciones de la barra no surge ni fuerza normal N, ni momentos flectores M_x y M_y.

Eliminando en la expresión (11.25) las magnitudes w_0, φ_y y φ_x, obtendremos,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y x}{I_y} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{B\omega}{I_\omega}. \qquad (11.27)$$

Los tres primeros sumandos son bien conocidos y no necesitan explicación. En lo que se refiere al cuarto, éste caracteriza las modificaciones que introduce el alabeo de la sección en las leyes lineales de distribución de las tensiones. La medida de fuerza de este alabeo es el bimomento.

Las tensiones tangenciales en la sección transversal de la barra, en el caso general de solicitación, se componen de las tensiones correspondientes a la torsión simple

$$\tau = \frac{M_t}{W_t},$$

de las tensiones tangenciales correspondientes a la flexión transversal [(véase la fórmula (11.5)] y, por último, de las tensiones tangenciales secundarias τ_2 (11.13) de la torsión restringida.

Los desplazamientos de la barra están relacionados con los momentos flectores M_x y M_y por las conocidas fórmulas

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y}{EI_y},$$

siendo, u y v los desplazamientos de la línea de los centros de flexión de las secciones en la dirección de los ejes x e y.

El ángulo de torsión unitario θ se obtiene de la fórmula (11.22) y depende no sólo de la magnitud del momento torsor, sino también del bimomento.

Ejemplo 11.9. Veamos el caso de solicitación de la barra por un bimomento (fig. 402).

El origen de z lo situamos en el extremo libre de la barra.
La ecuación (11.22) será en este caso,

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z.$$

Como en el extremo de la barra está dado un bimomento $B = Pbh$, de acuerdo a la expresión (11.26) obtendremos para $z = 0$,

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{Pbh}{EI_\omega}$$

y, por lo tanto,

$$C_1\alpha = -\frac{Pbh}{EI_\omega}.$$

Cuando $z = l$ el desplazamiento $\omega = 0$ y, por lo tanto, el ángulo $\theta = 0$. Hallaremos entonces,

$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_2 \operatorname{ch} \alpha l = 0.$$

Determinando C_1 y C_2 se obtendrá

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EI_\omega} [\operatorname{th} \alpha l \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z].$$

Lo más ilustrativo en este ejemplo es el caso cuando la longitud de la barra l es muy grande. En este caso $\operatorname{th} \alpha l \approx 1$ y

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha E I_\omega} e^{-\alpha z}.$$

Es decir, que en el caso de una barra larga el ángulo unitario de torsión originado por el bimomento decrece, según la ley exponencial. La velocidad con que disminuye éste depende de α. Hallemos el valor de z para el cual el ángulo unitario θ constituye una magnitud del orden del 5% del valor máximo. Es decir, determinemos la penetración práctica de la acción del bimomento a lo largo del eje de la barra,

$$e^{-\alpha z} \approx 0{,}05.$$

De aquí se obtiene,

$$z \approx \frac{3}{\alpha} = 3 \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}}.$$

En el caso particular de una sección doble te,

$$z \approx \frac{3}{2\delta} \sqrt{\frac{(1+\mu)\, b^3h^3}{2b+h}}.$$

Cuanto menor es el espesor δ tanto más lejos se propaga la acción del bimomento. En esto consiste una de las diferencias de la barra de paredes delgadas de la de

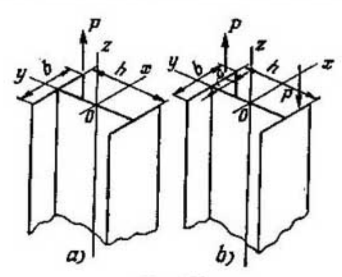


Fig. 403.

sección maciza, lo que ya se indicó en el § 70. Del ejemplo analizado se ve que en el caso de tracción o compresión excéntricas de las barras de paredes delgadas se debe considerar no solamente la fuerza normal y los momentos flectores en las secciones transversales, sino también la magnitud del bimomento. Por ejemplo, en el caso de la barra de sección doble te solicitada por la fuerza P aplicada excéntricamente (fig. 403, *a*) tendremos,

$$N = P, \quad M_x = P\frac{h}{2}, \quad M_y = P\frac{b}{2}, \quad B = P\frac{bh}{4}.$$

La tracción de la barra va acompañada aquí por la flexión y, al mismo tiempo, las secciones reciben desplazamientos angulares propios de la torsión.

En el caso de la barra solicitada por un par de fuerzas (fig. 403, *b*), en la sección extrema también surge un bimomento cuya magnitud $B = Pch$ depende de la distancia c. Así pues, si en el caso de una barra de sección maciza la posición del plano de acción del momento exterior no jugaba ningún papel, en el caso de barras de paredes delgadas la posición de este plano sí es importante.

Capítulo XII

PRINCIPIOS DEL CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE LAS ESTRUCTURAS QUE TRABAJAN POR ENCIMA DEL LIMITE DE ELASTICIDAD

§ 78. Particularidades características del cálculo y esquematización del diagrama de tracción

Todas las cuestiones que hasta aquí se analizaron se referían al cálculo de los elementos de las estructuras dentro del dominio de las deformaciones elásticas. Sin embargo, la diversidad de los problemas que surgen en la práctica sale fuera de los marcos que fija la ley de Hooke y, muy a menudo, nos vemos ante la necesidad de analizar problemas relacionados con las deformaciones plásticas de los cuerpos. A estos casos se refieren principalmente las investigaciones de algunas operaciones tecnológicas como, por ejemplo, el enrollamiento de los muelles o el estampado de diferentes piezas. Se calculan, teniendo en cuenta las deformaciones plásticas, los elementos, fuertemente tensados, de las construcciones del tipo de las bóvedas de los cohetes y otros muchos.

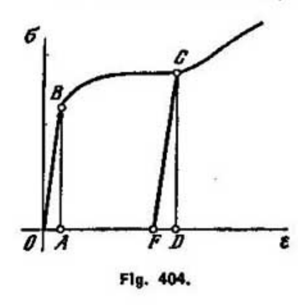


Fig. 404.

Al resolver este tipo de problemas, la ley de Hooke pierde su validez y la proporcionalidad directa entre las tensiones y las deformaciones se sustituye por otra dependencia, más compleja, que se determina por la forma del diagrama de tracción. Si bien en los problemas comunes las deformaciones no superan la magnitud de OA (fig. 404), en los cálculos donde se admiten las deformaciones plásticas esta limitación no existe ya y la magnitud ε resulta ser mucho mayor, a pesar de que sigue permaneciendo despreciablemente pequeña en comparación con la unidad. En este caso, se dice que, el cálculo se realiza dentro de los límites de las deformaciones plásticas pequeñas. Está claro que también se puede plantear el problema de los cálculos para deformaciones plásticas grandes, sin limitar el valor de las últimas. Estos problemas surgen, por ejemplo, al analizar las operaciones tecnológicas de forja y del estirado. Estos problemas no se analizarán aquí.

Debido a que las deformaciones plásticas son pequeñas, a los problemas que se analizan en este capítulo es plenamente aplicable el principio de invariabilidad de las dimensiones iniciales, es decir, que, al plantear las ecuaciones de equilibrio, se puede considerar que el sistema deformado plásticamente se diferencia poco del sistema sin deformar.

El segundo principio fundamental, principio de superposición de las fuerzas, en este caso no se cumple. Esto se ilustra de manera clara en el ejemplo de la figura 405. Supongamos que sobre la barra actúan las fuerzas P_1 y P_2 y que la primera de ellas es suficientemente grande para originar en la barra deformaciones plásticas. Los alargamientos de la barra correspondientes a la aplicación directa de las fuerzas y a la aplicación invertida son, como vemos, diferentes.

Tampoco coinciden las relaciones entre las tensiones y las deformaciones en los casos de carga y de descarga. Es por esto que se hace

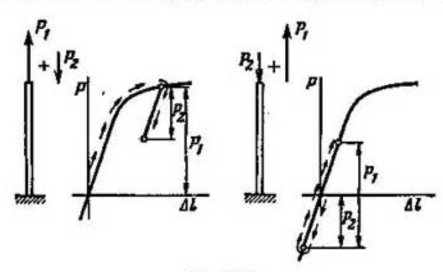


Fig. 405.

diferencia entre la deformación activa y pasiva de la probeta. En el caso de la deformación activa las tensiones crecen, mientras que en el caso de la deformación pasiva, disminuyen. Así pues, el tramo *OBC* del diagrama (fig. 404) corresponde a la deformación activa y el tramo *CF*, a la pasiva. La deformación que se mide por el segmento *OD* (fig. 404) se puede interpretar como la suma de una deformación puramente plástica, deformación irreversible *OF*, y de otra deformación elástica *FD*, que desaparece después de retirar la carga. Así pues, la deformación de la probeta no es ni puramente plástica ni puramente elástica.

En el caso de cargas grandes, algunas veces, se puede prescindir de las deformaciones elásticas en comparación con las plásticas. Si las deformaciones plásticas y las elásticas son del mismo orden se suelen denominar deformaciones elástico-plásticas. Este mismo término se refiere, también, a las deformaciones de los diversos cuerpos en los que existen zonas de deformaciones elásticas y zonas de deformaciones plásticas.

En vista de la aparición de deformaciones plásticas en las estructuras, adquiere gran importancia la cuestión de los principios generales de realizar los cálculos. En el caso de deformaciones plásticas, como regla general, no se puede aplicar el método de cálculo por tensiones admisibles. En este caso se juzga sobre la utilidad de la estructura o por la magnitud de los desplazamientos que se desarrollan o por la magnitud de la carga de rotura, carga límite.

Para introducir la dependencia $\sigma=f(\varepsilon)$ en las fórmulas de cálculo, el diagrama de tracción se esquematiza. En el caso de las deformaciones elásticas, en el tramo *OA* (fig. 404) el diagrama de tracción se acerca

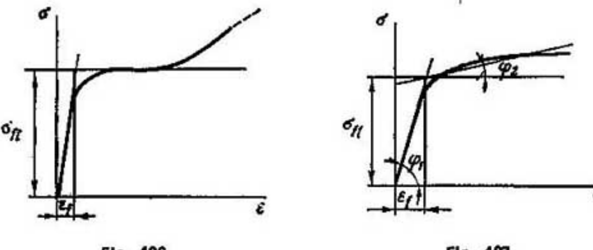


Fig. 406.

Fig. 407.

a la línea recta y, con gran exactitud, se puede admitir que σ es proporcional a ε. Así se establece la ley de Hooke.

La posterior esquematización de los tramos del diagrama se realiza de distintas maneras, según sea el tipo del diagrama y el método que se ha decidido emplear para la solución del problema concreto que se analiza.

Si el diagrama del material tiene escalón de fluencia como, por ejemplo, en el caso de los aceros pobres en carbono, se puede simplificar el diagrama por dos rectas (fig. 406). Hasta el límite de fluencia tiene lugar la dependencia lineal común y después, cuando la tensión σ se iguala al límite de fluencia σ_{fl}, la primera no depende ya de la deformación, es decir,

$$\sigma=\sigma_{fl}.$$

Está claro que en el caso de deformaciones suficientemente grandes (fig. 406) esta ley deja de ser válida, como antes ocurrió con la ley de Hooke. El diagrama de la figura 406 se denomina diagrama de la plasticidad ideal.

Es posible imaginarse la dependencia entre σ y ε constituida por dos rectas también en el caso de ciertos diagramas que no tienen el escalón de fluencia (fig. 407). Cuando $\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ obtenemos,

$$\sigma=E\varepsilon,$$

cuando $\varepsilon \geqslant \varepsilon_f$

$$\sigma - \sigma_{fl} = D(\varepsilon - \varepsilon_f),$$

siendo E y D los coeficientes angulares de las rectas. D es generalmente bastante menor que E. Estos diagramas son propios de la mayor parte de los aceros aleados.

En el caso de algunos materiales, como, por ejemplo, en el caso del cobre recocido, el diagrama carece del tramo elástico bien definido

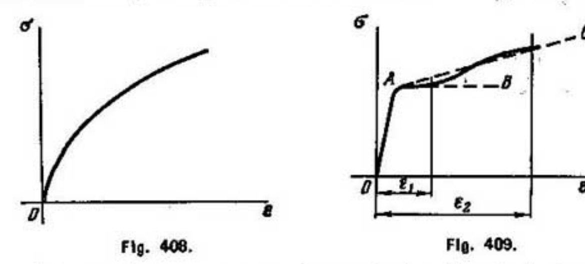


Fig. 408. Fig. 409.

(fig. 408) y puede ser representado por la función siguiente,

$$\varepsilon = A\sigma^n,$$

siendo A y n, constantes que se escogen de manera tal que la dependencia admitida en el tramo de trabajo de variación de ε, se acerque lo más posible a la curva experimental.

Es importante destacar que la esquematización de un mismo tramo del diagrama depende también de los límites de variación de las deformaciones en el problema en cuestión. Así, por ejemplo, si las deformaciones que se esperan son $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ (fig. 409), entonces el diagrama se debe esquematizar con las rectas OA y AB. Si se estudia el comportamiento del sistema para grandes deformaciones, por ejemplo, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, entonces el diagrama se puede esquematizar con las rectas OA y AC.

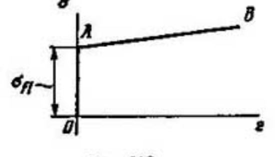


Fig. 410.

En una serie de casos se puede prescindir de las deformaciones elásticas en comparación con las plásticas. En este caso, el diagrama de tracción se esquematiza con las rectas OA y AB (fig. 410). Mientras las tensiones no superan el límite de fluencia, el cuerpo se puede interpretar como rígido. Cuando las tensiones son mayores, se considera plástico. El material con estas propiedades se denomina material *rígido-plástico*.

Sea como sea, en todos los casos, la función que representa el diagrama de tracción se escoge, ante todo, en función de la forma de

la curva. Si en adelante resulta que la función escogida para la solución del problema dado conduce a operaciones laboriosas, se escoge entonces otra de tal manera que no se afecte la exactitud con que se refleja la curva y que la laboriosidad de los cálculos no sea excesiva.

En muchos casos en lugar de la expresión analítica escogida $\sigma=f(\varepsilon)$ se emplea directamente el gráfico o se recurre a los métodos semigráficos o numéricos. Con algunos de los métodos más simples nos familiarizaremos más adelante.

§ 79. Tensiones y desplazamientos en los sistemas más simples constituidos por barras, cuando existen deformaciones plásticas

Veamos algunos ejemplos para analizar las particularidades fundamentales del comportamiento de los sistemas cuando existen deformaciones plásticas. Estos problemas se resuelven de la manera más simple en el caso de sistemas constituidos por barras.

Ejemplo 12.1. Determinar el alargamiento absoluto que surge en el alambre de longitud l colgado libremente, bajo la acción del peso propio, si el alambre es de cobre recocido y el diagrama de tracción correspondiente es el de

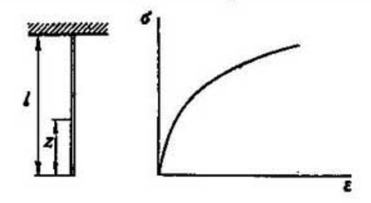


Fig. 411.

la figura 411. La relación entre el alargamiento ε y la tensión σ se puede representar por la función,

$$\varepsilon = A\sigma^n.$$

Las constantes A y n se consideran dadas.

A la distancia z del extremo del alambre

$$\sigma = \gamma z,$$

siendo γ, el peso específico del cobre. La deformación,

$$\varepsilon = A\gamma^n z^n.$$

El alargamiento absoluto se obtiene, integrando esta expresión sobre la longitud del alambre,

$$\Delta l = \int_0^l A\gamma^n z^n\,dz = A\gamma^n \frac{l^{n+1}}{n+1}.$$

Ejemplo 12.2. Determinar los esfuerzos en las barras y el desplazamiento del nudo A (fig. 412, *a*) en función de la fuerza P. Determinar también las deformaciones residuales que aparecen en el sistema después de aplicar la fuerza P y después de retirarla. El diagrama de tracción del material tiene un tramo de plasticidad ideal (fig. 412, *b*).

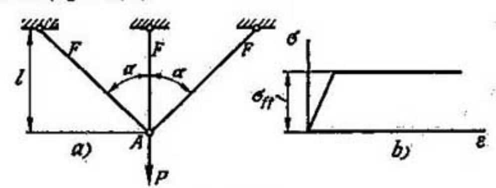


Fig. 412.

Cuando la fuerza P es pequeña, en todas las barras aparecen deformaciones elásticas. Los esfuerzos en las barras se determinan por los métodos comunes de cálculo de sistemas hiperestáticos. Como este problema se analizó ya (véase la pág. 45) nos limitamos a escribir los valores de los esfuerzos en las barras,

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}, \\ N_2 &= \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

siendo N_1, la fuerza normal en la barra extrema y N_2, en la barra central. El desplazamiento del punto A es igual al alargamiento de la barra central,

$$\delta_A = \frac{N_2 l}{EF} = \frac{Pl}{EF}\,\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}.$$

Esta dependencia sigue siendo válida hasta que en la barra central, donde el esfuerzo normal es mayor que en las barras de los extremos, no aparezcan deformaciones plásticas, lo que ocurrirá cuando

$$N_2 = \sigma_{fl} F, \tag{12.2}$$

o cuando,

$$P = \sigma_{fl} F\,(1+2\cos^3\alpha).$$

La tensión en la barra central permanece después constante e igual a σ_{fl}. La fuerza N_2 también permanece constante e igual a $\sigma_{fl} F$. Los esfuerzos en las

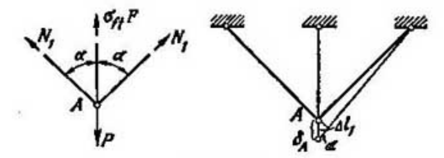


Fig. 413.

barras laterales se determinan en este caso de la condición de equilibrio del nudo (fig. 413). El sistema hiperestático se convierte así en sistema isostático,

$$N_1 = \frac{P-\sigma_{fl}F}{2\cos\alpha}. \tag{12.3}$$

El desplazamiento del punto A (fig. 413) será $\frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}$ 6,

$$\delta_A = \frac{N_1 l}{EF\cos^2\alpha} = \frac{(P-\sigma_{fl}F)\,l}{2EF\cos^3\alpha}.$$

En adelante, las tensiones en las barras laterales también se igualan al límite de fluencia. De la expresión (12.3) se deduce que esto ocurre cuando

$$P = \sigma_{fl}F\,(1+2\cos\alpha).$$

En este caso el sistema se convierte en un mecanismo puesto que, al seguir aumentando la carga P, no se cumple ya la condición de equilibrio del sistema. La fuerza normal no puede ser, de acuerdo con el diagrama de tracción, en cada una de las barras mayor que $\sigma_{fl}F$ y, como resultado, la componente vertical de las tres fuerzas será igual a $\sigma_{fl}F\,(1+2\cos\alpha)$ y permanecerá constante.

Así pues, al sistema no se le puede aplicar una fuerza mayor que la indicada. Esta fuerza deberá considerarse como fuerza *límite* para el sistema dado. En algunos casos se la denomina también fuerza de rotura. Está claro que el concepto de carga de rotura no refleja cabalmente el contenido del fenómeno. Si el diagrama de tracción real tiene para valores grandes de ε el tramo de consolidación, entonces puede ocurrir que las fuerzas interiores equilibren después a una fuerza P mayor que la límite. Esto ocurre, sin embargo, para desplazamientos muy grandes y para cambios de la forma geométrica del sistema tan considerables, que este último puede considerarse en estado de rotura.

En la figura 414 están representadas las variaciones de los esfuerzos N_1 y N_2 y del desplazamiento δ_A en función de la fuerza P.

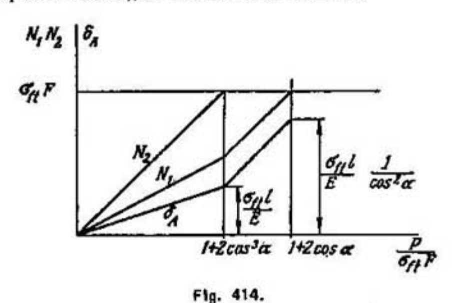


Fig. 414.

Analicemos ahora la cuestión de las deformaciones residuales que quedan en el sistema después de la descarga. Está claro que se tiene en cuenta la solicitación del sistema por fuerzas tales que originan en la barra central deformaciones plásticas, ya que en el caso de deformaciones elásticas no aparecerán deformaciones residuales. Por otra parte, la carga deberá ser inferior a la carga límite.

El proceso de descarga es equivalente a la aplicación de una fuerza exterior igual a la fuerza de carga, pero de signo opuesto. Por lo tanto, las tensiones residuales en el sistema se pueden interpretar como la suma algebraica de las tensiones que surgen, al aplicar consecutivamente las fuerzas de la carga y las de la descarga, iguales a las primeras, pero de signo contrario.

Debido a que en este caso no es aplicable el principio de superposición de las fuerzas, la aplicación de las fuerzas de carga y de descarga deberá realizarse en el orden directo (fig. 415). Las deformaciones originadas por la descarga son

elásticas ya que el material sigue aquí la ley de Hooke. Por lo tanto, durante la descarga, en las barras aparecerán los esfuerzos determinados por las expresiones (12.1). En el caso de la carga los esfuerzos se determinarán por las expresiones (12.2) y (12.3). Así pues, los esfuerzos residuales en las barras serán,

$$N_{1\,res}=\frac{P-\sigma_{ft}F}{2\cos\alpha}-\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha},\quad N_{2\,res}=\sigma_{ft}F-\frac{P}{1+2\cos^3\alpha}.$$

En estas expresiones se entiende por P la carga hasta la cual se prolongó el proceso de carga. Su magnitud se encuentra entre los límites determinados por el

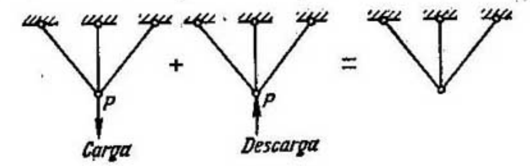


Fig. 415.

comienzo de la aparición de las primeras deformaciones plásticas y el valor de la carga límite.

$$\sigma_{ft}F(1+2\cos^3\alpha)\leqslant P\leqslant\sigma_{ft}F(1+2\cos\alpha).$$

Las tensiones residuales están autoequilibradas, es decir, que el nudo de las barras (fig. 416) se encuentra en equilibrio, incluso cuando no existen fuerzas exteriores,

$$2N_{1\,res}\cos\alpha+N_{2\,res}=0.$$

Introduciendo aquí los valores de N_{1res} y N_{2res} nos convencemos de que las expresiones de las fuerzas obtenidas cumplen dicha condición.

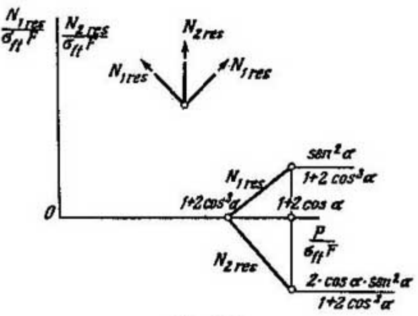


Fig. 416.

En la figura 416 está representado el diagrama de las fuerzas residuales en función de la fuerza de carga P. En la barra central, la fuerza N_{2res} es de compresión y en las barras laterales las fuerzas residuales son de tracción.

Al solicitar el sistema de nuevo éste se deforma elásticamente hasta que la fuerza de la segunda solicitación no sea igual a la fuerza de la solicitación pri-

mera. Si se sigue cargando el sistema, en las barras aparecerán deformaciones plásticas que varían según las leyes establecidas anteriormente para la primera solicitación.

Ejemplo 12.3. Analizar el trabajo de la barra escalonada (fig. 417, *a*), al solicitarla por la fuerza P. El diagrama de tracción está representado esquemáticamente por dos rectas (fig. 417, *b*) cuyas ecuaciones son,

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma = E\varepsilon & \text{para} & \sigma \leqslant \sigma_f, \\ \sigma - \sigma_f = D(\varepsilon - \varepsilon_f) & \text{para} & \sigma \geqslant \sigma_f. \end{array}\right\} \tag{12.4}$$

Se considera que el diagrama de compresión coincide con el de tracción.

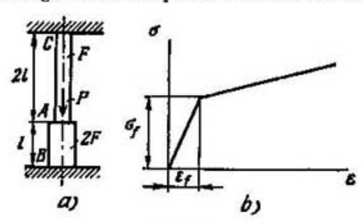


Fig. 417.

En la primera etapa de la solicitación, cuando el material se atiene a la ley de Hooke, los esfuerzos en los tramos superior e inferior se determinan por los métodos comunes de cálculo de sistemas hiperestáticos. Como,

$$N_{AB} + N_{AC} = P \tag{12.5}$$

y los alargamientos en los tramos AB y AC son iguales,

$$\frac{N_{AC}2l}{EF} = \frac{N_{AB}l}{2EF}, \tag{12.6}$$

resulta

$$N_{AC} = \frac{1}{5}P, \quad N_{AB} = \frac{4}{5}P.$$

El desplazamiento de la sección A será,

$$\delta_A = \frac{N_{AC}2l}{EF} = \frac{2Pl}{5EF}.$$

Estas relaciones son válidas mientras la tensión en el tramo inferior no alcanza el valor de σ_f, para

$$P = \frac{5}{2}\sigma_f F.$$

El tramo inferior se deforma después de manera plástica y el superior, de manera elástica. La ecuación (12.5) permanece invariable, mientras que la ecuación (12.6) se transforma de acuerdo a la expresión (12.4),

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_f}{D} + \varepsilon_f. \tag{12.7}$$

Entonces en lugar de la expresión (12.6) obtendremos,

$$\frac{N_{AC}2l}{EF} = l\left[\frac{1}{D}\left(\frac{N_{AB}}{2F} - \sigma_f\right) + \varepsilon_f\right],$$

que una vez resulta conjuntamente con (12.5) nos dará,

$$N_{AC}=\frac{P-2\sigma_t F\left(1-\frac{D}{E}\right)}{1+4\frac{D}{E}},\quad N_{AB}=\frac{4P\frac{D}{E}+2\sigma_t F\left(1-\frac{D}{E}\right)}{1+4\frac{D}{E}}. \qquad (12.8)$$

El desplazamiento de la sección A será

$$\delta_A=\frac{N_{AC}2l}{EF}=\frac{2l}{EF}\frac{P-2\sigma_t F\left(1-\frac{D}{E}\right)}{1+4\frac{D}{E}}.$$

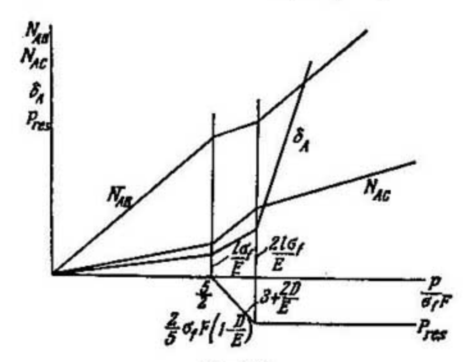


Fig. 418.

De la primera expresión (12.8) determinamos la fuerza que origina, en el tramo superior, una tensión igual al límite de fluencia

$$P=\sigma_t F\left(3+2\frac{D}{E}\right).$$

En la tercera etapa de solicitación hallamos,

$$2l\varepsilon_{AC}=l\varepsilon_{AB}$$

o de acuerdo a la expresión (12.7),

$$2\left[\frac{1}{D}\left(\frac{N_{AC}}{F}-\sigma_t\right)+\varepsilon_f\right]=\frac{1}{D}\left(\frac{N_{AB}}{2F}-\sigma_f\right)+\varepsilon_f.$$

Resolviendo esta ecuación conjuntamente con la ecuación (12.5) obtenemos,

$$\left.\begin{aligned}N_{AC}&=\frac{1}{5}P+\frac{2}{5}\sigma_t F\left(1-\frac{D}{E}\right),\\ N_{AB}&=\frac{4}{5}P-\frac{2}{5}\sigma_t F\left(1-\frac{D}{E}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (12.9)$$

El desplazamiento del punto A en la tercera etapa de solicitación será,

$$\delta_A=2l\varepsilon_{AC}=\frac{2l}{5D}\left[\frac{P}{F}-3\sigma_t\left(1-\frac{D}{E}\right)\right].$$

La dependencia entre los esfuerzos N_{AB} y N_{AC} y el desplazamiento δ_A y la fuerza P está representada en la figura 418. En este mismo gráfico se da también el esfuerzo residual P_{res} en la barra que resulta después de la descarga. Este esfuerzo será igual para los dos tramos y se obtiene, restando el esfuerzo de la descarga «elástica» 1/5 P de la magnitud N_{AC} [fórmulas (12.8) a (12.9)].

§ 80. Flexión elástico-plástica de la barra

Veamos el caso de la flexión pura de una barra recta cuando surgen deformaciones plásticas. Para simplificar el problema consideramos que la sección transversal de la barra tiene dos ejes de simetría (fig. 419) y que los diagramas de tracción y compresión del material son iguales. Está claro que en este caso la línea neutra coincidi-

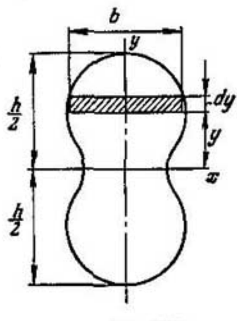


Fig. 419.

Fig. 420.

rá con el eje de simetría x (fig. 419). La relación analítica entre la tensión σ y la deformación ε no se especifica y consideramos que esta relación está dada de manera gráfica (fig. 420).

Suponemos que en el caso de la barra es válida, como de costumbre, la hipótesis de las secciones planas. Entonces obtendremos (véase la página 136),

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \tag{12.10}$$

siendo $\frac{1}{\rho}$, la curvatura de la línea elástica de la barra flexionada e y, la distancia a la línea neutra. El momento flector en la sección de la barra será,

$$M = \int_F \sigma y \, b \, dy. \tag{12.11}$$

Ahora es posible obtener por el método semigráfico la relación entre la curvatura de la barra $1/\rho$ y el momento M y, una vez dado el momento, determinar la magnitud de las tensiones que surgen en la barra. El método más sencillo para realizar este cálculo es el si-

guiente. Se fija cierto valor de la curvatura $1/\rho$ y por la fórmula (12.10) se obtiene el alargamiento máximo

$$\varepsilon_{max} = \frac{h}{2}\frac{1}{\rho}.$$

Se dibuja al lado de la sección transversal el diagrama de tracción (fig. 421) y se marca en él el punto A correspondiente al valor de ε_{max} obtenido. Este alargamiento ocurre en las capas más alejadas de la línea neutra. Por eso, frente al punto superior de la sección se

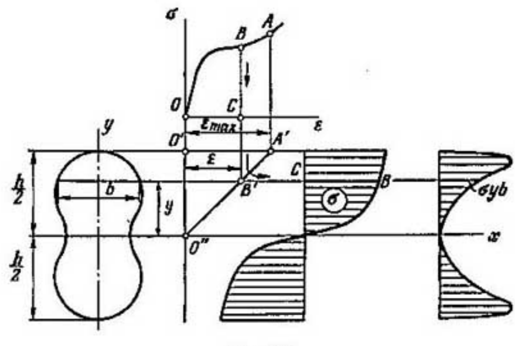


Fig. 421.

escoge el segmento $O'A'$ y después el punto O''. Como los alargamientos se distribuyen en la altura según la ley lineal, unimos los puntos O'' y A' por una recta que constituye el diagrama de las deformaciones en la sección.

Después construimos el diagrama de las tensiones. Para cierto valor de y, dado el alargamiento ε (punto B'), obtenemos la tensión σ (punto B). Situando en el diagrama el segmento BC se obtiene, a la derecha, el diagrama de la distribución de las tensiones sobre la altura. Se construye después en la altura el diagrama del producto σyb. El área de la curva obtenida determina, según la expresión (12.11), la magnitud del momento flector. Así pues, mediante las operaciones realizadas se obtiene uno de los puntos del gráfico de $1/\rho$ en función del momento M. Fijando un nuevo valor de la curvatura, se puede, repitiendo todas las operaciones anteriores, hallar un nuevo valor de momento y determinar la posición de otro punto de la misma curva.

Una vez construida esta curva (fig. 422) y dado cierto valor del momento, se determina la curvatura de la barra. Se construye des-

pués el diagrama de las tensiones correspondientes a la curvatura $1/\rho$ que a su vez corresponde al momento dado M.

Sobre esta base es fácil además determinar las tensiones residuales que se mantienen en la barra después de la descarga. Esto se realiza por el método descrito anteriormente, sumando las tensiones imaginarias de la descarga con las tensiones que surgen durante el proceso de carga. En el caso en cuestión las tensiones de la descarga varían en la sección según la ley lineal,

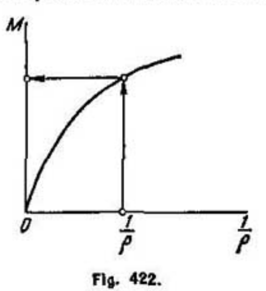


Fig. 422.

$$\sigma = \frac{Ny}{I_x}.$$

Sumando este gráfico lineal al de las tensiones de trabajo (fig. 423) se obtiene el diagrama de las tensiones residuales. Es importante indicar que las tensiones obtenidas están autoequilibradas. En la sección no surgen ni fuerza normal ni momento flector.

El proceso indicado anteriormente de determinación de las tensiones en la barra flexionada resulta más fácil cuando el ancho de la

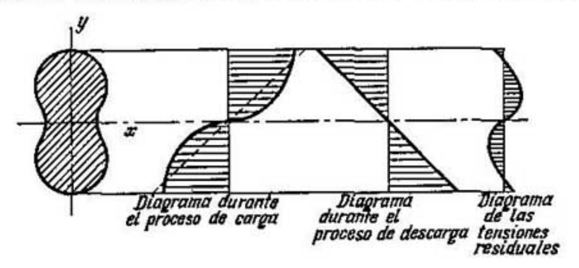


Fig. 423.

sección b es constante, es decir, cuando la barra es de sección rectangular, y se simplifica más aún cuando el diagrama de tracción tiene el tramo de plasticidad ideal.

Veamos este caso particular. Consideremos una sección rectangular de lados b y h y el diagrama de tracción representado en la figura 424. Es fácil demostrar que la sección transversal de la barra se divide en dos zonas, elástica una y plástica la otra. La magnitud y_f que determina la línea divisoria de estas dos zonas, se obtiene de la expresión (12.10)

$$y_f = \varepsilon_f \rho. \qquad (12.12)$$

A medida que aumenta el momento y, por lo tanto, también, la curvatura y_f disminuye, es decir, que la zona elástica se reduce.

El momento flector en la sección, como antes, se determina de la expresión (12.11) que en nuestro caso es,

$$M = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma y \, dy.$$

Dividiendo esta integral en dos, según las zonas, obtendremos,

$$M = 2b \int_{0}^{y_f} \sigma y \, dy + 2b\sigma_f \int_{y_f}^{h/2} y \, dy.$$

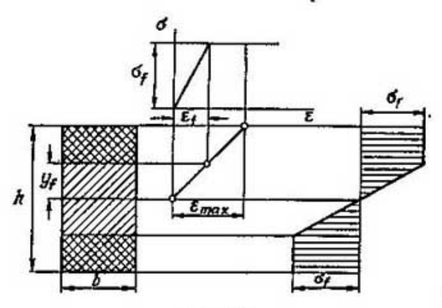


Fig. 424.

Como en la zona elástica,

$$\sigma = E \frac{y}{\rho},$$

después de realizar la integración hallaremos,

$$M = \frac{2}{3} b \frac{E}{\rho} y_f^3 + b\sigma_f \left(\frac{h^2}{4} - y_f^2\right).$$

Teniendo en cuenta que y_f, de acuerdo a la expresión (12.12), es

$$y_f = \varepsilon_f \rho = \frac{\sigma_f \rho}{E},$$

de la expresión anterior obtendremos

$$M = \frac{bh^2}{4} \sigma_f - \frac{1}{3} b\sigma_f^3 \frac{\rho^2}{E^2}, \qquad (12.13)$$

de donde hallamos,

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \frac{b\sigma_f^3}{E^2}}{\frac{1}{4} bh^2\sigma_f - M}}. \qquad (12.14)$$

Al aumentar el momento M, aumenta la curvatura de la barra que se hace infinita, cuando

$$M = \frac{1}{4} bh^2\sigma_f. \tag{12.15}$$

En este caso $\rho=0$ e y_f (12.12) resulta igual a cero. Es decir, que la deformación plástica abarca toda la sección y el diagrama de las tensiones en la sección transversal de la barra se representa por dos rectángulos (fig. 425). La capacidad resistente de la barra, en este caso, se agota sin que pueda resistir ésta cargas mayores. Está claro

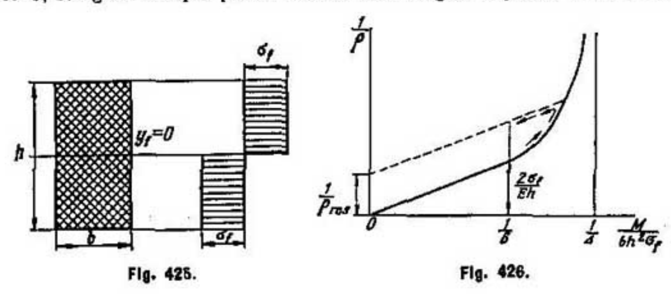


Fig. 425. Fig. 426.

que, de hecho, la curvatura de la barra no puede ser infinita y el caso analizado se debe considerar como caso límite.

La valides de la ecuación (12.14) se limita por el momento M tanto por arriba, como por abajo. Cuando el valor del momento es pequeño y no existe la zona de las deformaciones plásticas, la curvatura se determina por las fórmulas obtenidas, suponiendo que la relación entre σ y ε es lineal,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{12M}{Eh^3b}. \tag{12.16}$$

Esta relación será válida hasta que

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{bh^2} \leqslant \sigma_f,$$

es decir,

$$M \leqslant \frac{1}{6} bh^2\sigma_f.$$

La fórmula (12.14) es válida cuando

$$\frac{1}{6} bh^2\sigma_f \leqslant M \leqslant \frac{1}{4} bh^2\sigma_f.$$

En la figura 426 está representada la curvatura $\frac{1}{\rho}$ en función del momento M.

De las expresiones (12.14) y (12.16) se puede obtener directamente la curvatura residual que mantiene la barra después de retirar la carga,

$$\frac{1}{\rho_{res}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\frac{b\sigma_f^3}{E^2}}{\frac{1}{4}bh^2\sigma_f - M}} - \frac{12M}{Eh^3b}, \qquad (12.17)$$

siendo M la magnitud del momento correspondiente a la carga.

La curvatura residual se puede obtener también del diagrama, como se indica en la figura 426.

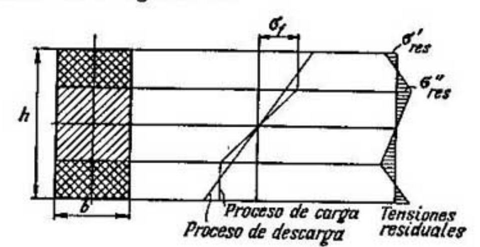


Fig. 427.

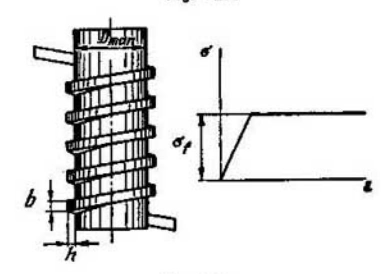


Fig. 428.

El diagrama de las tensiones residuales está constituido por una línea quebrada (fig. 427). Esta se obtiene, restando el diagrama lineal de la descarga del diagrama de la carga. Las tensiones residuales máximas son,

$$\sigma_{res} = \sigma_f - \frac{6M}{bh^2}, \quad \sigma''_{res} = \sigma_f - \frac{12My_f}{bh^3}.$$

Ejemplo 12.4. El muelle de la figura 428 se obtiene, enrollando en frío un alambre sobre la montura. Calcular el diámetro de la montura D_{mon} de tal

manera que después de enrollado, el muelle tenga el diámetro medio de la espira dado $D_{mue}=25$ mm. La sección del alambre es rectangular de altura $h=$ $=2,5$ mm,

$$\sigma_f=50 \text{ kgf/mm}^2 \text{ y } E=2\cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2.$$

Suponiendo que el ángulo de elevación de la espira es pequeño, consideramos que la espira del muelle es plana. Según la condición, la curvatura residual de la espira es,

$$\frac{1}{\rho_{res}}=\frac{2}{D_{mue}}=\frac{2}{25}\,\text{mm}^{-1}.$$

Veamos la expresión (12.17). Se desconoce el momento M que en ella figura. Para determinarlo, escribimos la ecuación (12.17) como sigue,

$$\left(\frac{1}{\rho_{res}}+12\frac{M}{bh^2\sigma_f}\frac{\sigma_f}{Eh}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_f}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_f}{Eh}\right)^2,$$

ó

$$\left(\frac{2}{25}+\frac{M}{bh^2\sigma_f}\,12\cdot 10^{-3}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_f}\right)=\frac{1}{3}\,10^{-6}.$$

La magnitud $\frac{M}{bh^2\sigma_f}$ se encuentra entre los valores $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$. Resolviendo la ecuación por tanteos obtendremos,

$$\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_f}=0,485\cdot 10^{-4}.$$

Calculamos, por la fórmula (12.14), el radio de curvatura del alambre solicitado,

$$\rho=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_f}}{\frac{1}{3}\frac{\sigma_f^2}{E^2h^2}}},$$

de donde se obtiene $\rho=12,05$ mm. La dimensión de la montura se obtiene, restando de esta magnitud la mitad del espesor del alambre,

$$\rho_{mon}=12,05-1,25=10,8 \text{ mm}, \quad D_{mon}=21,6 \text{ mm}.$$

Ejemplo 12.5. El muelle del reloj se fabrica, enrollando una cinta de acero en un núcleo cilíndrico (fig. 429, *a*). Una vez libre, la lámina adquiere la forma espiral (fig. 429, *b*). Determinar la ecuación de esta espiral, si las propiedades del material se caracterizan por el diagrama de la plasticidad ideal.

La lámina enrollada adquiere la forma de la espiral de Arquímedes,

$$r=\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi,$$

siendo r y φ, las coordenadas polares (fig. 429, *a*), d, el diámetro del núcleo y h el espesor de la lámina.

Como el espesor de la cinta h es pequeño y el paso de la espiral es, por lo tanto, pequeño, se puede considerar que el radio polar es igual al radio de curvatura,

$$\rho\approx r.$$

Entonces, de la ecuación (12.13), se obtiene la magnitud del momento flector durante el enrollamiento,

$$M=\frac{1}{4}bh^2\sigma_f-\frac{1}{3}b\frac{\sigma_f^3}{E^2}\left(\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi\right)^2.$$

Introduciendo M en la ecuación (12.17) obtendremos,

$$\frac{1}{\rho_{res}}=\frac{1}{r}=\frac{1}{\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi}-3\frac{\sigma_t}{Eh}+4\left(\frac{\sigma_t}{Eh}\right)^3\left(\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi\right)^2.$$

Esta expresión es la ecuación que se busca de la espiral.

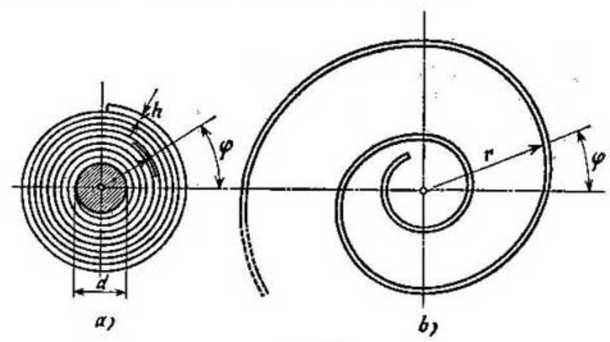


Fig. 429.

Con el aumento del ángulo φ disminuye la curvatura residual y puede hacerse igual a cero para cierto valor de φ. Esto quiere decir que en esta sección y en el tramo exterior restante de la cinta, no surgen deformaciones plásticas durante el enrollamiento y ésta permanece recta.

§ 81. Torsión de una barra de sección transversal circular en el caso de deformaciones plásticas

Para investigar la barra en el caso de la torsión elástico-plástica es necesario disponer del diagrama de la distorsión del material, es decir, de la relación entre el ángulo de distorsión γ y la tensión τ (fig. 430). Consideraremos que disponemos de tal diagrama. Esta puede ser obtenida mediante los ensayos a torsión de tubos de paredes delgadas. En adelante demostraremos que este diagrama se puede obtener también, transformando el diagrama común de tracción $\sigma=f(\varepsilon)$. Admitiendo, como en el caso de la torsión «elástica», la hipótesis de las secciones planas, obtendremos,

$$\gamma=\rho\theta, \tag{12.18}$$

[véase la fórmula (2.5) del capítulo II]. El momento torsor en la sección será,

$$M_t=2\pi\int_0^R \tau\rho^2\,d\rho.$$

Introducimos en esta expresión la variable γ (12.18) en lugar del radio ρ. Entonces,

$$M_t = \frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2\, d\gamma, \qquad (12.19)$$

siendo

$$\gamma_{max} = R\theta. \qquad (12.20)$$

La integral que figura en la expresión (12.19) constituye el momento de inercia del triángulo curvilíneo OAB (fig. 431,*a*) respecto al eje τ. En el caso del diagrama dado se puede determinar previamente en función de γ_{max} (fig. 431,*b*).

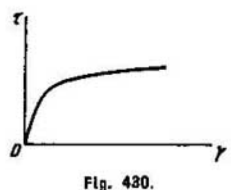


Fig. 430.

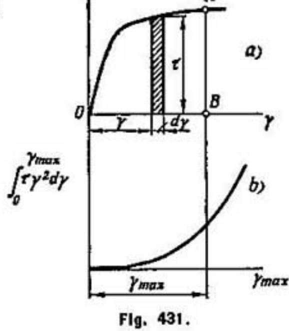


Fig. 431.

Ahora es ya fácil construir por puntos la relación entre el ángulo de torsión unitario θ y el momento M_t.

Fijando el valor de θ determinamos, de acuerdo a la expresión (12.20), γ_{max} y hallamos del diagrama el valor de la integral,

$$\int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2\, d\gamma$$

para calcular después, por la fórmula (12.19), el valor de M_t. Así se obtiene un punto de la relación entre θ y M_t. Repitiendo esta operación varias veces obtenemos toda la curva $\theta = f(M_t)$. Cuando el momento es pequeño y la curva

$$\int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2\, d\gamma = f(\gamma_{max})$$

no se puede construir con exactitud suficiente, recurrimos a la dependencia lineal común dentro de los límites de la ley de Hooke,

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p}. \qquad (12.21)$$

Todas las operaciones posteriores para el establecimiento de la ley de distribución de las tensiones en la sección transversal de la barra para la determinación de las tensiones residuales y de los ángulos residuales son análogas a las que se analizaron en el parágrafo anterior para el caso de la flexión de la barra.

Sin repetir aquí estas operaciones, las ilustraremos solamente en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 12.6. El muelle cilíndrico enrollado de la figura 432, *a* se comprime hasta que las espiras no entren en contacto. Determinar el paso del muelle después de la descarga, si antes de ella era $s=10$ mm. Las dimensiones del muelle

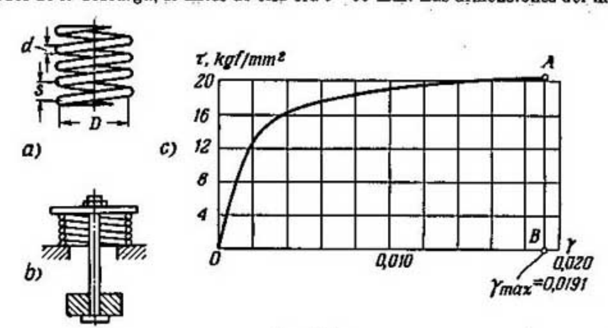


Fig. 432.

son las siguientes: $D=20$ mm, $d=4$ mm, el módulo de la distorsión $G=$ $=7\,700$ kgf/mm². El diagrama de la distorsión del material está dado por la curva de la figura 432, *c*.

Cuando el asiento del muelle es igual a una espira

$$\lambda_1 = s - d.$$

Al mismo tiempo,

$$\lambda_1 = \frac{D}{2}\,\theta l,$$

siendo l, la longitud de la espira que es igual a πD. Así pues,

$$s - d = \frac{\pi}{2} D^2 \theta. \tag{12.22}$$

De aquí se obtiene el ángulo de torsión unitario θ, que surge en el alambre cuando se juntan las espiras,

$$\theta = \frac{10-4}{\frac{\pi}{2} 20^2} = 0{,}00955 \ \text{mm}^{-1}.$$

Después se obtiene,

$$\gamma_{max} = \frac{d}{2}\,\theta = 0{,}0191.$$

Ubicamos la magnitud de γ_{max} sobre el diagrama de la distorsión (fig. 432, *c*) y, dividiendo el área en partes, calculamos el momento de inercia del triángulo *OAB* respecto al eje τ. Una vez realizados los cálculos obtendremos,

$$\int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2\, d\gamma = 0{,}455\cdot 10^{-4}\ \text{kgf/mm}^2.$$

Hallamos, por la fórmula (12.19), el momento torsor,

$$M_t = \frac{2\pi\cdot 0{,}455\cdot 10^{-4}}{0{,}00955^3} = 328\ \text{kgf}\cdot\text{mm}$$

y por la fórmula (12.21), el ángulo de torsión unitario correspondiente a las deformaciones elásticas,

$$\theta = \frac{328}{7\,700\,\dfrac{\pi\cdot 4^4}{32}} = 0{,}00170\ \text{mm}^{-1}.$$

Hallamos ahora la «recuperación» elástica del muelle después de la descarga. De la expresión (12.22) obtendremos,

$$s_{res} - d = \frac{\pi}{2}\, 20^2\cdot 0{,}00170 = 1{,}07\ \text{mm}.$$

El paso del resorte será

$$s_{res} = 1{,}07 + 4 = 5{,}07\ \text{mm}.$$

Para mayor plenitud calculemos la ley de distribución de las tensiones residuales en la sección transversal del resorte. Para ello comenzamos por construir

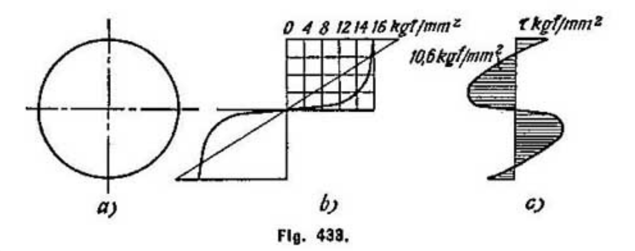


Fig. 433.

el diagrama de las tensiones correspondiente a la carga. De acuerdo a la expresión (12.18), el ángulo de distorsión a la distancia ρ del centro del círculo será,

$$\gamma = 0{,}00955\rho.$$

Fijando ciertos valores de ρ calculamos la tensión τ y, punto por punto, construimos el diagrama de la figura 433, *b*. De este diagrama se restan las tensiones que se obtienen por la fórmula de la descarga elástica,

$$\tau = \frac{M\rho}{I_p} = \frac{328\cdot 32\rho}{\pi 4^4} = 1{,}30\rho\ \text{kgf/mm}^2.$$

La diferencia entre las tensiones de la carga y la descarga nos dará la magnitud de las tansiones residuales (fig. 433, *c*).

§ 82. Fundamentos del cálculo según el método de las cargas límites

En los cálculos de la resistencia de las estructuras el más difundido es el método de cálculo que parte de las tensiones. De acuerdo a este método fueron expuestos todos los capítulos anteriores del curso. Sin embargo, como ya se ha dicho, éste no es el único método.

En una serie de casos es preferible introducir el cálculo por cargas de rotura o por cargas límites de las cuales las cargas de trabajo constituyen una parte determinada.

La razón entre la carga límite y la de trabajo se denomina coeficiente de seguridad por cargas límites. Su magnitud se fija, como generalmente se hace, en función de las particularidades de la estructura que se diseña.

En los problemas que analizamos en este capítulo ya tuvimos la oportunidad de familiarizarnos con el concepto de carga límite. Así, por ejemplo, en el sistema constituido por tres barras (fig. 412) esta fuerza resultó ser,

$$P_{\text{lim}} = \sigma_t F (1 + 2\cos\alpha)$$

y en el caso de la barra de sección rectangular el momento flector,

$$M_{\text{lim}} = \frac{1}{4}\sigma_t bh^2.$$

Generalizando los resultados obtenidos se puede decir que se entiende por carga límite, en el caso general, la carga que agota la capacidad del sistema de admitir carga creciente, o la carga que origina variaciones tan considerables de las dimensiones geométricas del sistema que éste deja de cumplir las funciones para las que fue diseñado.

La manera más fácil de asimilar los métodos de determinación de las cargas límites es analizar problemas concretos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 12.7. Determinar la carga de rotura en el caso del sistema de tres barras (fig. 434) considerando que el diagrama de tracción de las barras tiene un tramo de consolidación y que la rotura ocurre cuando la tensión es σ_{rt} (fig. 434).

La ecuación del tramo elástico del diagrama es,

$$\sigma = E\varepsilon$$

y la del tramo de consolidación,

$$\sigma - \sigma_t = D(\varepsilon - \varepsilon_t).$$

Consideraremos carga de rotura aquella que conduce al fallo de la barra central. Esto ocurre cuando el alargamiento ε_2 es igual a ε_r. Calculemos el alargamiento ε_1 que en este caso aparecerá en cada una de las barras laterales,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha.$$

Teniendo en cuenta que

$$l_1=\frac{l}{\cos\alpha}$$

obtendremos

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2\cos^2\alpha.$$

Es decir, que en el momento de la rotura de la barra central, el alargamiento de las laterales será,

$$\varepsilon_1=\varepsilon_r\cos^2\alpha.$$

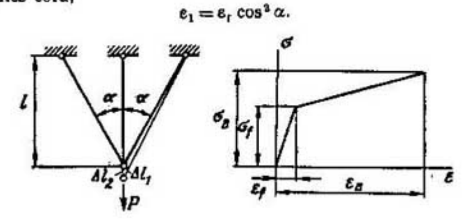
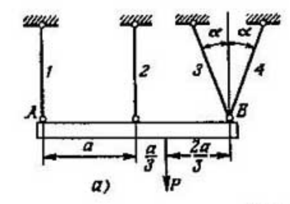


Fig. 434.



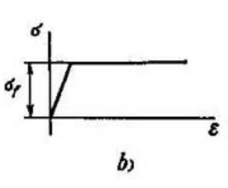


Fig. 435.

Las tensiones serán las siguientes: en la barra central σ_{rt} y en las laterales o,

$$\sigma_1=\sigma_f+D(\varepsilon_r\cos^2\alpha-\varepsilon_f),$$

si

$$\varepsilon_r\cos^2\alpha>\varepsilon_f$$

ó

$$\sigma_1=E\varepsilon_r\cos^2\alpha,$$

si

$$\varepsilon_r\cos^2\alpha<\varepsilon_f.$$

La carga límite será,

$$P_{\text{lim}}=\sigma_r F+2\sigma_1 F\cos\alpha.$$

Introduciendo σ_1 hallaremos,

$$P_{\text{lim}}=\sigma_r F+2\sigma_f F\cos\alpha+2FD(\varepsilon_r\cos^2\alpha-\varepsilon_f)\cos\alpha$$

para $\varepsilon_r\cos^2\alpha>\varepsilon_f$, ó

$$P_{\text{lim}}=\sigma_r F+2EF\varepsilon_r\cos^3\alpha$$

para $\varepsilon_r\cos^2\alpha<\varepsilon_f$.

Ejemplo 12.8. Determinar la carga límite para el sistema de la figura 435, *a*. Se supone que la viga es rígida y que las barras tienen igual sección transversal y son del mismo material cuyo diagrama de tracción está representado en la figura 435, *b*.

Si aumentamos paulatinamente la fuerza P, aumentarán también los esfuerzos en las barras. Cuando la carga adquiere cierto valor la tensión en la barra *1* (o en las barras *3* y *4*) será igual a σ_f. Esta no será sin embargo la carga límite. Será límite la carga que origine deformaciones plásticas apreciables en la barra *2* también. Entonces el sistema se convertirá en un mecanismo y la viga, como un cuerpo rígido, girará respecto al punto A o B (más adelante veremos con respecto a cual de ellos girará la barra).

Supongamos primero que el límite de fluencia se alcanza en las barras *1* y *2*. Entonces, planteando la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al punto B (fig. 436, *a*) determinamos la carga límite. En este caso,

$$\sigma_f F 2a + \sigma_f F a = P_{\text{lim}} \frac{2}{3} a, \quad P_{\text{lim}} = \frac{9}{2} \sigma_f F.$$

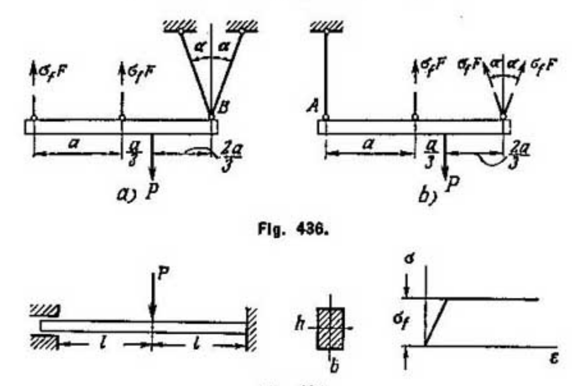


Fig. 436.

Fig. 437.

Analizamos ahora la segunda variante. Suponemos que el límite de fluencia se alcanza en las barras *2*, *3* y *4* y planteamos la suma de los momentos respecto al punto A (fig. 436, *b*)

$$\sigma_f F 4a \cos\alpha + \sigma_f F a = P_{\text{lim}} \frac{4}{3} a, \quad P_{\text{lim}} = \frac{3}{4} \sigma_f F (1 + 4\cos\alpha).$$

De los dos valores de P_{lim} obtenidos escogemos el menor. Independientemente del valor de α, el segundo valor de P_{lim} será el menor.

Ejemplo 12.9. Determinar la carga límite para la viga de la figura 437. La sección transversal es rectangular y el diagrama es correspondiente a la plasticidad ideal.

Para resolver este problema y otros semejantes a él, conviene introducir el concepto de articulación plástica.

Analicemos el proceso de propagación de la zona de las deformaciones plásticas en la viga, al aumentar la carga. Las deformaciones plásticas surgen primeramente en los puntos situados sobre las superficies superior e inferior, en las secciones más cargadas. Las zonas de las deformaciones plásticas correspondientes a cierto valor de la carga P aparecen rayadas en la figura 438. Al crecer la carga las zonas de las deformaciones plásticas se extienden. Se puede considerar caso límite el caso cuando en cierta sección donde actúa el momento flector ma-

ximo, las zonas plásticas se unen, como esto se representa en la figura 438 por la línea de puntos. Entonces las deformaciones plásticas abarcarán toda la sección y el momento flector en ella alcanzará así el valor límite. Como se demostró en el § 80, en el caso de una sección rectangular,

$$M_{\text{lim}}=\frac{1}{4}\sigma_{\text{f}}bh^2.$$

El momento flector no puede ser mayor que el momento límite. La sección donde surge el momento límite se puede interpretar como una articulación con un momento constante originado por la fricción. Esta articulación se denomina

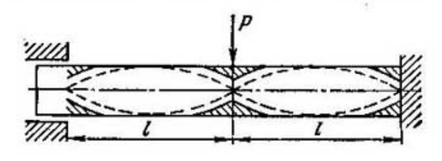


Fig. 438.

articulación plástica. Está claro que si en la viga o en el pórtico surgen varias articulaciones plásticas, estos sistemas se pueden convertir en mecanismos.

Volviendo a la viga en cuestión, vemos que su estado límite se caracteriza por la aparición de tres articulaciones plásticas (fig. 439). De la condición de

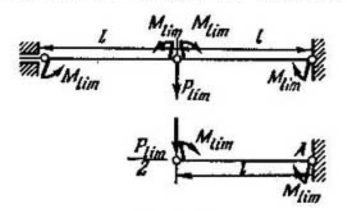


Fig. 439.

equilibrio de la mitad de la viga obtendremos,

$$P_{\text{lim}}=\frac{4M_{\text{lim}}}{l} \qquad (12.23)$$

ó

$$P_{\text{lim}}=\sigma_{\text{f}}\frac{bh^2}{l}.$$

Para completar el ejemplo analizado, en la figura 440 están dados algunos sistemas biperestáticos y los mecanismos articulados correspondientes.

En el caso *a*)

$$P_{\text{lim}}=\frac{3M_{\text{lim}}}{l}.$$

En el caso *b*)

$$P_{\text{lim}}=\frac{4M_{\text{lim}}}{l}.$$

En el caso *c*)

$$P_{\text{lim}}=\frac{2M_{\text{lim}}}{l}.$$

En el caso *d*)

$$q_{\text{lim}}=\frac{2M_{\text{lim}}}{la}\,\frac{l+a}{l-a}.$$

La magnitud de a se establece de la condición del máximo del momento flector en las articulaciones A. Suponiendo que a la distancia a de los apoyos la

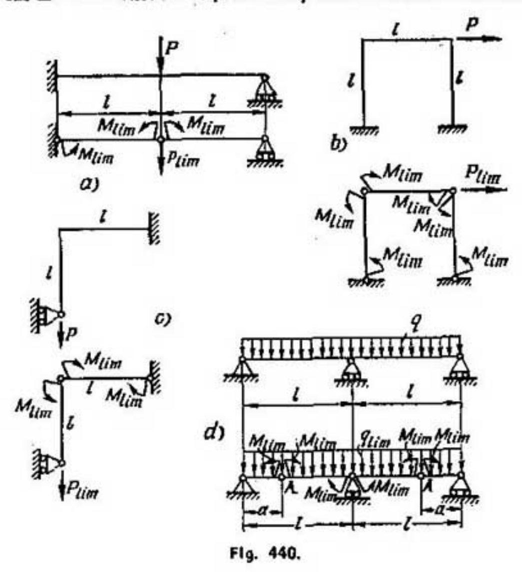


Fig. 440.

fuerza cortante es $Q=0$, obtendremos,

$$a=l\,(\sqrt{2}-1),\quad q_{\text{lim}}=\frac{2M_{\text{lim}}}{l^2}\,(\sqrt{2}+1)^2.$$

Al variar la configuración de la sección transversal, en estas expresiones varía solamente la magnitud de M_{lim}.

Ejemplo 12.10. Determinar M_{lim} para las secciones transversales circular y triangular.

En los dos casos la zona de fluencia abarca toda la sección (fig. 441) y, por lo tanto, el momento límite es igual al momento expresado por la tensión constante σ_f. En el caso del círculo,

$$M_{\text{lim}}=2\sigma_f\,\frac{\pi d^2}{8}\,c.$$

Como $c=\frac{2d}{3\pi}$,

$$M_{lim}=\frac{\sigma_f d^3}{6}.$$

En el caso de la sección triangular se debe, ante todo, obtener la posición del eje divisorio, es decir, la magnitud de h_1. Esta se determina de la condición de igualdad a cero de la fuerza normal en la sección o de la igualdad de las áreas de la zona superior traccionada y de la zona inferior comprimida.

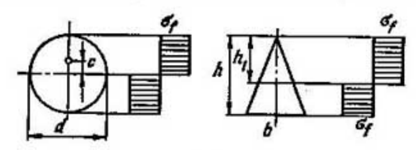


Fig. 441.

El momento límite es igual a la suma de los momentos de las fuerzas correspondientes a las dos zonas,

$$M_{lim}=\frac{1}{3}\sigma_f bh^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

§ 83. Fundamentos de la teoría de la plasticidad

Hasta aquí hemos analizado los estados tensionales más simples. Analizábamos solamente la tracción o compresión axial y la distorsión pura. En estos casos se consideraban conocidas las características del material en el estado tensional correspondiente y, por lo tanto, la solución de los problemas no presentaba dificultades de principio.

Al pasar a problemas más complejos surge, ante todo, la pregunta de cómo relacionar analíticamente las tensiones y las deformaciones en otros estados tensionales y, lo que es muy importante, cómo, conociendo los resultados de los ensayos de la probeta a tracción, aplicarlos a los casos de estados tensionales complejos.

En el dominio de las deformaciones elásticas este problema se resuelve relativamente fácil.

En la tracción es válida la ley de Hooke, en su forma más simple,

$$\sigma=E\varepsilon.$$

En el caso del estado tensional complejo las relaciones lineales de la ley generalizada de Hooke son,

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)], & \gamma_{yz}&=\frac{\tau_{yz}}{G},\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)], & \gamma_{zx}&=\frac{\tau_{zx}}{G},\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)], & \gamma_{xy}&=\frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\right\} \qquad (12.24)$$

Las condiciones de paso del estado elástico al plástico se pueden obtener por las fórmulas de una de las hipótesis del estado límite. Como sabemos ya, en la actualidad existen varios criterios que determinan el paso del estado elástico al plástico. Los más aceptables son: la teoría de Mohr de la cual se deduce, como un caso particular, la hipótesis de las tensiones tangenciales máximas y la hipótesis de la energía de la variación de la forma. La más cómoda para la elaboración de las relaciones de plasticidad es la última. Según esta hipótesis el paso del estado elástico al plástico ocurre cuando la magnitud,

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}, \tag{12.25}$$

denominada *intensidad de las tensiones*, alcanza el límite de fluencia (véase el § 58).

La magnitud σ_i en el estado elástico se puede expresar a través de las deformaciones, mediante las relaciones (12.24). Después de ciertas transformaciones se obtiene,

$$\sigma_i = E\frac{2}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)}.$$

Designamos

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \times \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)} \tag{12.26}$$

y denominaremos esta magnitud *intensidad de las deformaciones*.

En el estado elástico es válida la relación,

$$\sigma_i = E\varepsilon_i \tag{12.27}$$

que se puede interpretar como una de las formas de la ley de Hooke generalizada.

Es necesario establecer ahora la relación entre las componentes de las tensiones y de las deformaciones en el estado plástico. La determinación de estas relaciones y la solución, sobre la base de las mismas, de toda una serie de problemas de la mecánica de los cuerpos continuos constituye el contenido de la teoría de la plasticidad.

Las relaciones entre las componentes de las tensiones y las componentes de las deformaciones en la zona plástica deberán ser tales que, en el caso de deformaciones elásticas, éstas se conviertan en relaciones (12.24). Pero esto no es suficiente. Es necesario también que de estas relaciones de plasticidad se pueda deducir la hipótesis de los estados tensionales límites admitida anteriormente, es de-

cir, en este caso, la hipótesis de la energía de la variación de la forma. Entonces las relaciones que se buscan constituirán una amplificación lógica de las leyes establecidas con anterioridad.

Para las leyes de plasticidad conviene escoger la misma forma de escritura que para las leyes de elasticidad. Entonces en lugar de escribir

$$\sigma = f(\varepsilon),$$

siendo $f(\varepsilon)$ una función dada gráficamente por el diagrama de tracción, podemos escribir,

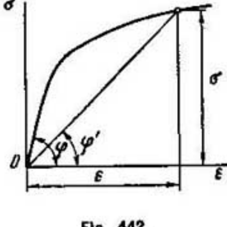


Fig. 442.

$$\sigma = E'\varepsilon, \qquad (12.28)$$

donde E' se considera función de la deformación ε.

Del diagrama de la figura 442 se desprende que

$$E' = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Cuando las deformaciones son elásticas (fig. 442)

$$\varphi' = \varphi, \quad E' = E.$$

Al pasar al estado tensional complejo sería muy cómodo generalizar de la misma forma las relaciones (12.27), admitiendo

$$\sigma_i = E'\varepsilon_i, \qquad (12.29)$$

siendo E', también una magnitud variable. Así se obtiene una relación única (12.29) para todos los tipos de estados tensionales.

En el caso de las deformaciones elásticas la expresión (12.29) se convierte en (12.27), mientras que el paso del estado elástico al plástico se caracteriza por la igualdad

$$\sigma_i = \sigma_t.$$

Según la expresión (12.25) se obtiene así la hipótesis de la energía de la variación de la forma. Gran cantidad de experimentos, realizados para comprobar esta suposición, demostraron que es válida para una clase muy amplia de casos concretos.

Así pues, queda establecido que la función tipo (12.29)

$$\sigma_i = E'\varepsilon_i$$

depende esencialmente de las propiedades del material y casi no depende del tipo del estado tensional. Esta afirmación sirve de punto de partida en la teoría de la plasticidad.

La segunda suposición de la teoría de la plasticidad la constituye la condición de que la variación del volumen,

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

permanece completamente elástica. Esto está en buena concordancia con los resultados de los ensayos. Incluso con las presiones que nos proporciona la técnica moderna no se consigue, en el caso de compresión triaxial, la aparición de deformaciones plásticas en el material.

Cuando se deforma el material, las deformaciones plásticas, como regla general, son mucho mayores que las elásticas. Como e es una magnitud del mismo orden que las deformaciones de los alargamientos elásticos, generalmente se admite que, durante las deformaciones plásticas, el volumen varía de manera insignificante. Entonces, al elaborar las fórmulas que relacionan las componentes de las tensiones y las componentes de las deformaciones en la zona plástica, se admite

$$\mu = \frac{1}{2}.$$

Planteemos ahora las relaciones que se buscan. Indiquemos, ante todo, que en el caso de tracción monoaxial, cuando,

$$\sigma_x = \sigma, \ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0,$$
$$\varepsilon_x = \varepsilon, \ \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon, \ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0,$$

la intensidad de las tensiones σ_i (12.25) y la intensidad de las deformaciones ε_i (12.26) se convierten respectivamente en σ y ε. Es decir que la expresión (12.29) coincide con la expresión (12.28), siendo esta última la expresión analítica de la curva del diagrama común de tracción. Pero, de acuerdo a la primera suposición de la teoría de la plasticidad (12.29) es única para todos los estados tensionales. Por lo tanto, en nada se diferencia de la relación común dada por el diagrama de tracción. Es necesario solamente colocar sobre los ejes de coordenadas no σ y ε, sino σ_i y ε_i (fig. 443). Entonces obtendremos,

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

es decir la magnitud del módulo variable.

Escribimos ahora de manera análoga a las expresiones (12.24), las relaciones de plasticidad,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right], \quad \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.30)$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

se transforma, teniendo en cuenta que $\mu = \frac{1}{2}$, es decir,

$$G' = \frac{1}{3} E' = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}.$$

Las relaciones de plasticidad expuestas no son absolutamente exactas, pero se consideran justas, por lo menos, para los tipos de solicitación cuando las fuerzas exteriores, durante el proceso de carga, crecen proporcionalmente a cierto parámetro, por ejemplo, al tiempo.

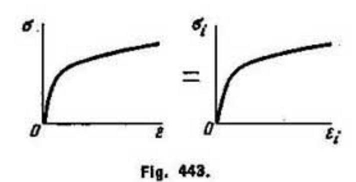


Fig. 443.

Se puede demostrar que en este caso los ejes principales del estado tensional, al variar las fuerzas exteriores, mantienen su dirección. Este tipo de deformación se denomina *deformación simple* y el tipo de carga, *carga simple*.

Veamos algunos ejemplos de ciertos problemas, para la solución de los cuales es necesario el aparato de la teoría de la plasticidad.

Ejemplo 12.11. Al resolver el problema de la torsión elástico-plástica de una barra de sección transversal circular, chocamos con la necesidad de disponer del diagrama de la distorsión del material en el dominio de las deformaciones plásticas. Este diagrama se puede obtener o directamente del ensayo a torsión o transformando el diagrama de tracción mediante las relaciones de plasticidad.

El problema se plantea de la manera siguiente: dado el diagrama de tracción $\sigma = f(\varepsilon)$, construir el diagrama de la distorsión $\tau = f(\gamma)$.

Recurrimos a las fórmulas (12.25) y (12.26). En el caso de tracción $\sigma_i = \sigma$ y $\varepsilon_i = \varepsilon$. En la distorsión, suponiendo $\mu = \frac{1}{2}$, se obtiene $\sigma_i = \tau\sqrt{3}$, $\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}$. Como la relación $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, es única para todos los estados tensionales resulta que las relaciones $\sigma = f(\varepsilon)$ y $\tau\sqrt{3} = f\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}\right)$ son idénticas. La transformación del diagrama consiste pues en la simple sustitución de σ por $\tau\sqrt{3}$ y de ε por $\frac{\gamma}{\sqrt{3}}$. Para obtener el diagrama de la distorsión es necesario en cada punto del diagrama de tracción dividir la ordenada por $\sqrt{3}$ y multiplicar la abscisa también por $\sqrt{3}$ (fig. 444).

Ejemplo 12.12. Determinar el aumento del diámetro del tanque cilíndrico (fig. 445, *a*) en función de la magnitud de la presión p. El diagrama de tracción del material está dado en la figura 445, *b*. $D=1\,800$ mm y $h=10$ mm.

Las tensiones axial y circunferencial en las paredes del cilindro son,

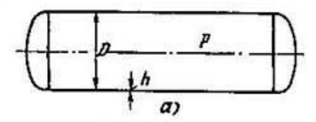
$$\sigma_x=\sigma_m=\frac{pD}{4h}, \quad \sigma_y=\sigma_t=\frac{pD}{2h}.$$

Según la fórmula (12.30),

$$\varepsilon_t=\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_t-\frac{1}{2}\sigma_m\right)$$

ó

$$\varepsilon_t=\frac{3}{8}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\frac{pD}{h}.$$



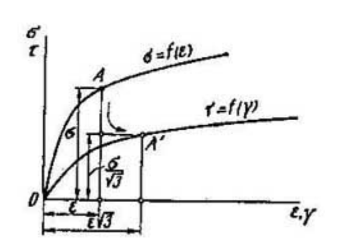


Fig. 444.

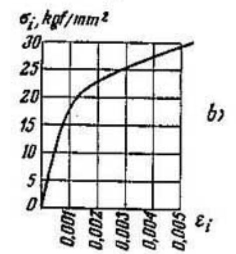


Fig. 445.

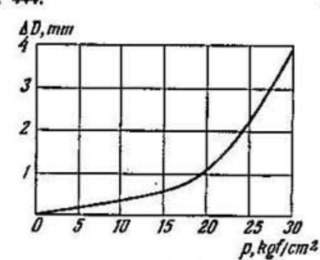


Fig. 446.

El aumento del diámetro será,

$$\Delta D=D\varepsilon_t=\frac{3}{8}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\frac{pD^2}{h}. \tag{12.31}$$

De la fórmula (12.25) se obtiene,

$$\sigma_i=\sqrt{\sigma_m^2-\sigma_m\sigma_t+\sigma_t^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{pD}{h}.$$

El orden de construcción de la relación entre ΔD y la presión p es el siguiente: fijando un valor de p se obtiene σ_i y después, del diagrama del ensayo, ε_i. De la expresión (12.31) hallamos ΔD y, punto por punto, se construye el diagrama de la relación en cuestión (fig. 446).

La solución obtenida es válida, claro está, cuando se trata de valores pequeños de ΔD que son despreciables en comparación con el diámetro D. De lo contrario, sería necesario en las expresiones de σ_x y σ_y considerar la variación del diámetro.

Ejemplo 12.13. Para obtener la fuerza de la onda de choque que surge durante una explosión se emplean con frecuencia membranas finas de plomo (fig. 447). Bajo la acción de la presión, la membrana recibe cierta flecha residual y por la magnitud de ésta se juzga sobre la fuerza de la onda. Determinar la relación entre la flecha de esta membrana y la presión.

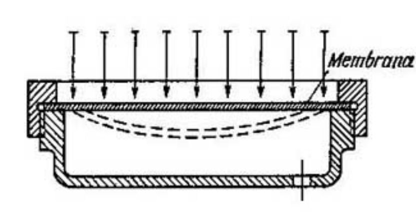


Fig. 447.

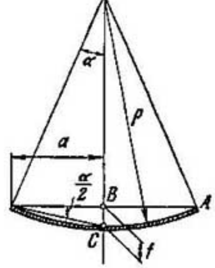


Fig. 448.

El problema se resuelve de manera aproximada, suponiendo que las tensiones se distribuyen uniformemente en el espesor de la membrana y que la forma de la membrana flexionada se aproxima a una superficie esférica. Esta suposición, sin afectar considerablemente a los resultados cuantitativos, simplifica en gran medida la solución *.

Designamos por ρ el radio de curvatura de la superficie esférica y por α, la mitad del ángulo central del segmento (fig. 448). Está claro que $\rho=a/\text{sen}\,\alpha$ ó, teniendo en cuenta que α es una magnitud pequeña,

$$\rho\approx\frac{a}{\alpha},$$

siendo a, el radio de la membrana.

La flecha de la membrana será,

$$f=a\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\approx\frac{a\alpha}{2}.$$

* La solución exacta del problema pertenece a A. A. Iliushin y se expone en su libro «*Plasticidad*», Gostejizdat, 1948, ed. rusa.

Las tensiones meridionales y circunferenciales en la membrana valen,

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{p\rho}{2h} = \frac{pa^2}{4hf}. \qquad (12.32)$$

Por último, los alargamientos en la membrana se pueden obtener por la diferencia entre la longitud del arco AC y la cuerda AB,

$$\varepsilon = \frac{\rho\alpha - \rho \operatorname{sen} \alpha}{\rho \operatorname{sen} \alpha} \approx \frac{\alpha^2}{6} = \frac{2}{3}\frac{f^2}{a^2}. \qquad (12.33)$$

Veamos ahora las relaciones de plasticidad (12.30). Admitimos que

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_m \quad \text{y} \quad \sigma_y = \sigma_t.$$

Entonces

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_m - \frac{1}{2}\sigma_t\right), \quad \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_m\right),$$

de donde se obtiene,

$$\sigma_m = \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_m + \frac{1}{2}\varepsilon_t\right), \quad \sigma_t = \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_m\right).$$

Introduciendo σ_m y σ_t en la tercera de las expresiones (12.30) hallamos,

$$\varepsilon_z = -(\varepsilon_m + \varepsilon_t).$$

Introducimos ε_z en la expresión de la intensidad de la deformación (12.26). Entonces,

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_m\varepsilon_t + \varepsilon_t^2}.$$

Pero $\varepsilon_m = \varepsilon_t = \varepsilon$ y, por lo tanto, $\varepsilon_i = 2\varepsilon$ o, de acuerdo a la expresión (12.33),

$$\varepsilon_i = \frac{4}{3}\frac{f^2}{a^2}. \qquad (12.34)$$

Por último, teniendo en cuenta que $\sigma_z = 0$ y $\sigma_m = \sigma_t$, la expresión de σ_i (12.25) se reduce a la siguiente,

$$\sigma_i = \sigma_m = \frac{pa^2}{4hf}. \qquad (12.35)$$

El orden a seguir para la construcción de la relación que se busca es el siguiente. Se fija la flecha f y, por la fórmula (12.34), se calcula ε_i. Se determina después, por el diagrama de tracción $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, la magnitud de σ_i y, por la fórmula (12.35), la presión p correspondiente a la flecha admitida. Así, punto por punto, se construye el diagrama en cuestión.

Capítulo XIII

RESISTENCIA EN EL CASO DE TENSIONES QUE VARIAN CICLICAMENTE

§ 84. Nociones sobre la resistencia a la fatiga

Muchas de las piezas de las máquinas, durante su trabajo, se someten a tensiones que varían en función del tiempo cíclicamente. Así, por ejemplo, las piezas del mecanismo de biela y manivela del motor de combustión interna (fig. 449) se encuentran bajo la acción de fuerzas que varían periódicamente. La ley de variación de estas fuerzas

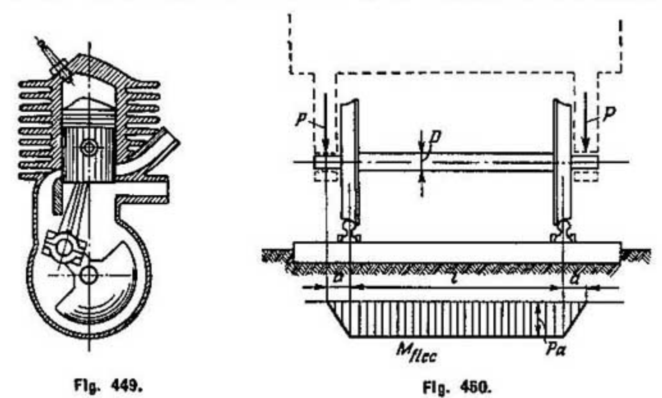


Fig. 449. Fig. 450.

se determina por el diagrama indicador y las particularidades cinemáticas del mecanismo.

El eje del vagón que gira junto con las ruedas (fig. 450) también se somete a tensiones que varían cíclicamente aunque las fuerzas exteriores mantienen su magnitud. Esto ocurre como resultado de que las partículas del eje en rotación se encuentran, alternativamente, en la zona de tracción y en la de compresión.

En la figura 450 está representado el diagrama de los momentos flectores en el eje del vagón. En el punto A de la sección transversal

(fig. 451,*a*),

$$\sigma = \frac{M_{flec}\, y}{I_x}.$$

La distancia y del punto A a la línea neutra varía en función del tiempo como sigue,

$$y = \frac{D}{2} \operatorname{sen} \omega t,$$

siendo ω, la velocidad angular de rotación de la rueda. Por lo tanto,

$$\sigma(t) = \frac{PaD}{2I_x} \operatorname{sen} \omega t.$$

Así pues, la tensión normal en las secciones del eje varía según la sinusoide de amplitud,

$$\sigma_a = \frac{PaD}{2I_x}.$$

(fig. 451,*b*).

Los ensayos demuestran que, cuando se trata de tensiones alternadas, después de cierto número de ciclos, puede ocurrir la rotura de la pieza, mientras que cuando actúa la misma tensión y permanece invariable en tiempo tal destrucción no ocurre.

El número de ciclos hasta el momento de la rotura depende de la magnitud de σ_a y varía entre amplios límites. En el caso de grandes tensiones, para la destrucción son necesarios 5—10 ciclos. Esto se puede observar bien en el ejemplo del trozo de alambre que se dobla

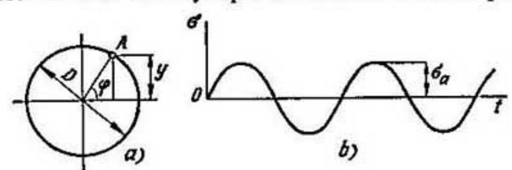


Fig. 451.

repetidas veces (fig. 452). Cuando las tensiones son menores, la pieza resiste millones y miles de millones de ciclos y en el caso de tensiones menores aún, puede trabajar un tiempo infinitamente largo.

Después del fallo, en la superficie de rotura de la pieza se distinguen generalmente dos zonas bien definidas (figs. 453 y 454). En una de ellas, los cristales se pueden ver a simple vista con gran dificultad. La microsuperficie de rotura es lisa. En la otra zona, se observan claramente las huellas de una ruptura frágil. Los cristales tienen cantos puntiagudos y una superficie limpia y brillante.

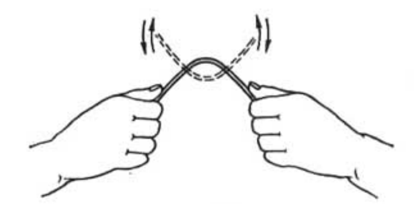


Fig. 452.

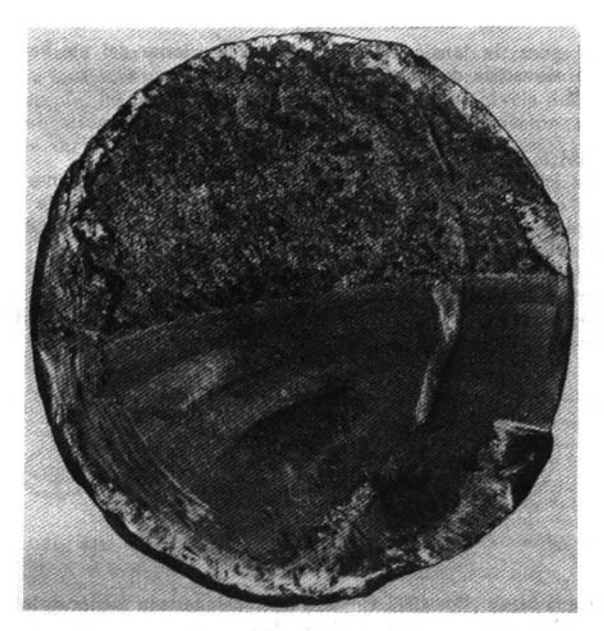


Fig. 453.

La primera impresión es que este tipo de fallo está relacionado con la variación de la estructura cristalina del metal. Así se explicaba, a su tiempo, la destrucción en el caso de tensiones cíclicas. Este fenómeno recibió entonces el nombre de fatiga y la dirección de las investigaciones relacionadas con la resistencia, *resistencia*

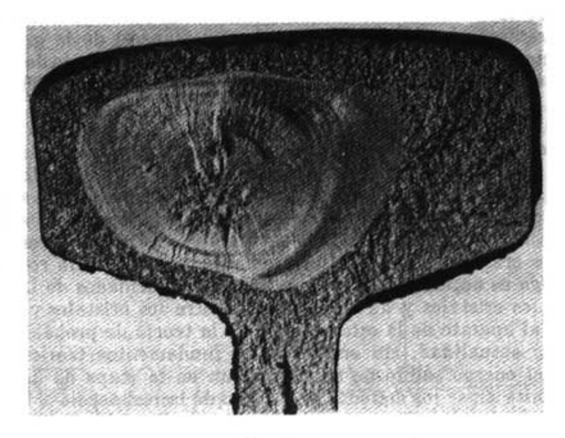


Fig. 454.

a la fatiga. Después varió el punto de vista sobre las causas de la destrucción a la fatiga, pero se mantiene aún el término.

En la actualidad se ha demostrado que durante las cargas cíclicas no varía la estructura del metal. El comienzo de la rotura tiene un carácter puramente local. En la zona de las tensiones grandes originadas por diversos factores de origen constructivo, tecnológico o estructural, pueden aparecer grietas microscópicas. Al variar repetidamente las tensiones, los cristales que se encuentran en la zona de la grieta comienzan a destruirse penetrando así la grieta en el interior del cuerpo.

Las superficies de contacto en la zona de la grieta originada se someten a interacciones de roce y, como resultado, los cristales se pulen y las superficies adquieren el aspecto de la estructura de granulación fina. Así se origina una de las zonas de la superficie de la futura rotura.

Como resultado del desarrollo de la grieta se debilita la sección y, en la última etapa, tiene lugar la ruptura brusca. La superficie de ruptura aparece con los cristales bien pronunciados y sin alteraciones.

En la fotografía de la figura 453 se puede observar que la destrucción de la barra fue consecuencia del desarrollo de la grieta que surgió en el borde de la sección. La destrucción del carril (fig. 454) se debe al desarrollo de la grieta que apareció dentro de la sección, en la zona de algún defecto local. El carácter de la rotura permite juz-

gar sobre la dirección del desarrollo de la grieta. Generalmente se ven claramente las líneas del frenado («descanso») de la grieta que están relacionadas con la variación del régimen de trabajo de la pieza y con la de las particularidades de la estructura del material en la sección.

El análisis teórico de la resistencia a la fatiga presenta grandes dificultades. La naturaleza de la destrucción por fatiga se determina por las particularidades de la estructura molecular y cristalina de la materia. Por lo tanto, el esquema de la materia continua que se aplicó con éxito en los problemas que hasta aquí se analizaron, en este caso concreto no puede servir de base satisfactoria para las investigaciones. Para crear una teoría suficientemente orgánica de la resistencia a la fatiga es necesario penetrar en las particularidades de la estructura de los cristales y de las ligaduras entre los cristales y recurrir después al aparato de la estadística y de la teoría de probabilidades.

En la actualidad, sin embargo, los fundamentos teóricos de la teoría del cuerpo sólido no se encuentran en la etapa de desarrollo que permita crear los métodos de cálculo de la resistencia a la fatiga. Es por esto que resulta necesario, manteniendo todas las suposiciones de la mecánica del cuerpo continuo, ir por el camino de la acumulación de datos experimentales que, en su conjunto, permitan elaborar las reglas pertinentes para orientar los cálculos. La agrupación y sistematización de los datos experimentales constituye en la actualidad el contenido de la teoría de la resistencia a la fatiga.

La falta de suposiciones fijas en esta teoría impide que sea ésta una teoría rigurosa. Las dependencias obtenidas experimentalmente no son pues universales y los cálculos dan una exactitud relativamente pequeña.

§ 85. Características fundamentales del ciclo y límite de resistencia a la fatiga

Comencemos por el caso del estado tensional monoaxial.

La ley de variación de la tensión principal σ en función del tiempo está representada en la figura 455. Las tensiones máxima y mínima del ciclo son σ_{max} y σ_{min}. La razón de estas tensiones se denomina *coeficiente de asimetría del ciclo*

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = r. \tag{13.1}$$

Cuando $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $r = -1$ y el ciclo se denomina ciclo *simétrico*. Este ciclo ocurre particularmente en el ejemplo analizado anteriormente del eje de rotación del vagón. Si $\sigma_{min} = 0$ ó $\sigma_{max} = 0$ se dice que el ciclo es de pulsación (fig. 456). En este caso $r = 0$. En calidad de ejemplo de este ciclo se puede señalar la solicitación de los dientes de la rueda dentada al transmitir un momento.

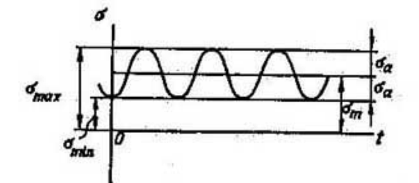


Fig. 455.

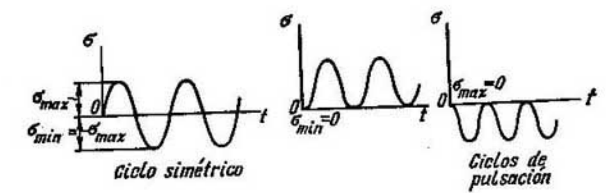


Fig. 456.

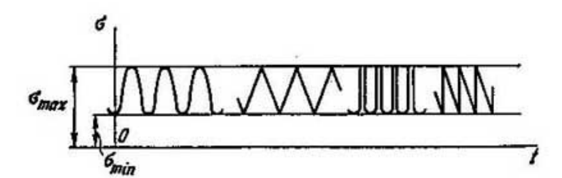


Fig. 457.

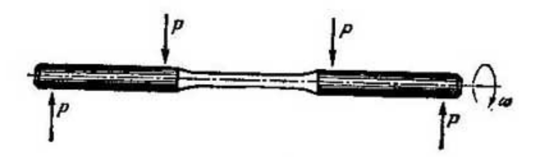


Fig. 458.

Los ciclos con iguales exponentes de r se denominan ciclos *semejantes*.

Cualquier ciclo puede ser interpretado como el resultado de la superposición de la tensión constante σ_m y la tensión que varía según el ciclo simétrico de amplitud σ_a (fig. 455). Está claro que

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}. \qquad (13.2)$$

El proceso de formación de la grieta en el caso de tensiones alternadas está relacionado con la acumulación de deformaciones plásticas. Es de esperar, por lo tanto, que la resistencia a la fatiga se determina solamente por las tensiones máxima y mínima del ciclo y no depende de la ley de variación de las tensiones dentro del intervalo $\sigma_{max} - \sigma_{min}$. Por lo tanto, los ciclos representados, por ejemplo, en la figura 457 son equivalentes. Como lo demuestran los ensayos, la influencia de la frecuencia de la variación de las tensiones tampoco tiene importancia. Así pues, para juzgar sobre la resistencia a la fatiga en el caso del ciclo dado es suficiente conocer solamente los valores de σ_{max} y σ_{min} o σ_m y σ_a.

Pasemos ahora a las características de la fatiga del material. En el caso de tensiones cíclicas aquéllas se determinan mediante ensayos especiales.

Los más difundidos son los ensayos para el ciclo simétrico. Aquí se recurre generalmente al principio de la flexión pura de la probeta en rotación (fig. 458). En la figura 459 se ve la fotografía de la máquina para los ensayos de las probetas en la flexión pura. La probeta *1* se fija sobre los mandriles extensibles en rotación *2* y *3*. El esfuerzo se origina por el peso colgado de los grilletes *4* y *5*. El número de revoluciones de la probeta se fija en el contador *6*. Cuando se rompe la probeta, el motor *7* se desconecta automáticamente por el botón *8*.

Para los ensayos en el caso de ciclos asimétricos se recurre o a máquinas especiales o se introducen dispositivos adicionales. Así, por ejemplo, se puede establecer en la probeta que se ensaya un resorte que origine una tracción constante con una tensión igual a σ_m (fig. 460). Durante el ensayo esta tensión se suma a la originada por la flexión que varía según el ciclo simétrico.

Mediante repetidos ensayos (si se dispone del número suficiente de probetas) se puede determinar el número de ciclos que resiste la probeta hasta destruirse en función de la magnitud de σ_{max} del ciclo. Esta dependencia tiene el aspecto de la curva de la figura 461. Como, generalmente, el número de ciclos aumenta rápidamente, al disminuir σ_{max}, es preferible generalmente ubicar sobre el eje de las abscisas no el número N, sino su logaritmo lo que permite construir el diagrama de manera más compacta (fig. 462).

El ensayo demuestra que, en la mayoría de los metales ferrosos, se puede indicar la tensión máxima mayor que el material resiste

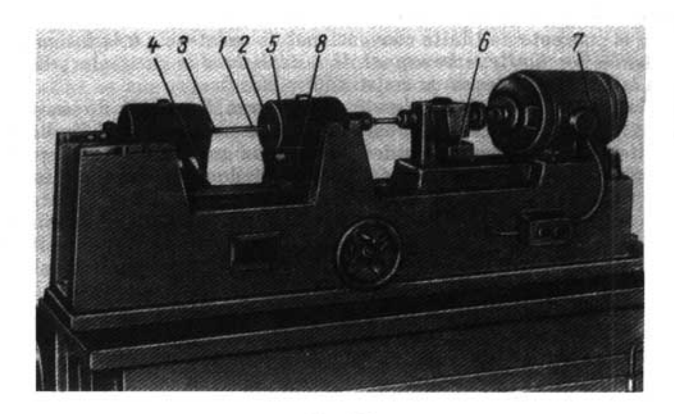


Fig. 459.

sin destruirse, independientemente del número de ciclos. Esta tensión se denomina *límite de resistencia a la fatiga* y se designa por σ_r, siendo r, el subíndice correspondiente al coeficiente del ciclo. Así,

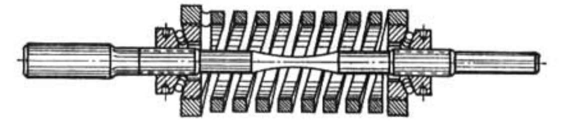


Fig. 460.

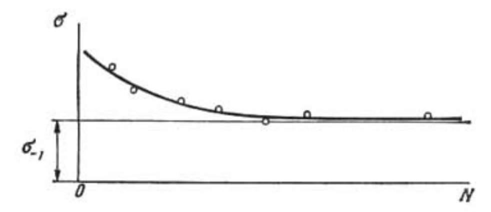


Fig. 461.

en el caso del ciclo simétrico, el límite de resistencia a la fatiga se designa por σ_{-1}, en el caso del ciclo de pulsación por σ_0, etc.

En el caso de metales no ferrosos y de aceros templados de gran dureza no se consigue establecer un número de ciclos tal que la pro-

beta resista sin destruirse después. Por eso, en estos casos se introduce el concepto de límite convencional de resistencia a la fatiga. Se entiende por *límite convencional de resistencia a la fatiga* la tensión que la probeta es capaz de resistir 10^8 ciclos.

Los ensayos a la fatiga resultan tener gran dispersión de los puntos experimentales. Por eso, para hallar con certidumbre el límite de resistencia a la fatiga se requiere ensayar un gran número de probetas (40—60) y elaborar después, por el método estadístico, los resul-

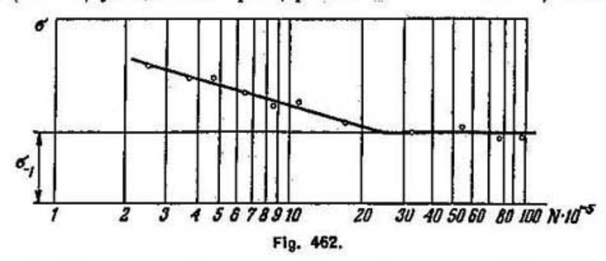


Fig. 462.

tados de los ensayos. Esta operación resulta ser muy laboriosa. Por eso hubo una serie de intentos de relacionar, por fórmulas empíricas, el límite de resistencia a la fatiga con las características mecánicas conocidas del material.

Se considera generalmente que en el caso de los aceros, el límite de resistencia a la fatiga en la flexión constituye, *a groso modo*, la mitad del límite de rotura,

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}4 \div 0{,}5)\,\sigma_{rt}.$$

En el caso de aceros de alta resistencia se puede admitir que,

$$\sigma_{-1} \approx 4\,000 + \frac{1}{6}\,\sigma_{rt}\left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right).$$

Cuando se trata de metales no ferrosos, el límite de resistencia a la fatiga varía entre límites más amplios

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}25 \div 0{,}5)\,\sigma_{rt}.$$

También se pueden realizar ensayos a torsión en el caso de tensiones que varían cíclicamente, como se hizo en el caso de la flexión pura. En este caso, para los aceros comunes,

$$\tau_{-1} \approx 0{,}56\,\sigma_{-1}.$$

En el caso de materiales frágiles (acero de alta aleación, hierro fundido),

$$\tau_{-1} \approx 0{,}8\sigma_{-1}.$$

Estas relaciones y otras semejantes a ellas deben admitirse con gran cuidado, puesto que se obtienen solamente para materiales de-

terminados y en condiciones determinadas de los ensayos (en la flexión, torsión).

En relación a esto se debe indicar, que el límite de resistencia a la fatiga es una característica que depende no solamente de las propiedades del material como, por ejemplo, el módulo de elasticidad o el coeficiente de Poisson. Este límite depende también del procedimiento de los ensayos. La tensión efectiva para la probeta no determina plenamente el proceso de la destrucción por fatiga. Al formarse la grieta, la magnitud de las tensiones y las leyes de su distribución dentro de la probeta varían en función de las condiciones del desarrollo posterior de la grieta. Estas condiciones dependen, a su vez, de las dimensiones absolutas de la probeta y del carácter de la aplicación de las fuerzas exteriores. Todo esto, obligatoriamente, influye sobre el número límite de ciclos y sobre la magnitud del límite de resistencia a la fatiga.

Como resultado de todo esto, por ejemplo, el límite de resistencia a la fatiga que se obtiene en la tracción y compresión cíclicas resulta ser un 10—20% inferior al límite de resistencia a la fatiga correspondiente a la flexión. El límite de resistencia a la fatiga en el caso de torsión de probetas macizas es diferente al límite obtenido para las probetas huecas, etc.

En la tabla 9 figuran los datos correspondientes al límite de resistencia de algunos materiales.

Tabla 9

Material	σ_{ft}, kgf/cm²	σ_{rt}, kgf/cm²	σ_{-1}, kgf/cm² (flexión)	τ_{-1}, kgf/cm²
Acero pobre en carbono	1 800	3 200—4 200*	1 600—2 200	800—1 200
Acero 30 sin templar	2 800	4 800—6 000	2 000—2 700	1 100—1 400
Acero 45 sin templar	3 400	6 000—7 500	2 500—3 400	1 500—2 000
Acero 30ХГСА templado	15 000	17 000	7 000	4 000
Hierro fundido gris	—	2 100	1 000	800
Aleación de aluminio АМЦ (con tratamiento térmico)	350—1 760	1 000—1 900	490—700	—
Vidrio orgánico	—	750	200—250	—

* La dispersidad de los datos es debida a la irregularidad común en los regímenes tecnológicos (fusión, laminado, tratamiento térmico) en comparación con los nominales.

Veamos ahora como se manifiesta el fenómeno de la fatiga en el caso de ciclos asimétricos.

Supongamos que disponemos de una máquina que permite realizar los ensayos por fatiga en el caso de cualquier ciclo asimétrico. Fijando un valor constante de σ_m, después de los ensayos consecuti-

vos de las probetas, se obtiene el valor máximo de la amplitud σ_a que el material es capaz de resistir un número infinito de ciclos. Si resulta que para el material dado no existe tal tensión límite, entonces la magnitud de σ_a se obtiene a partir de un número convencional básico N.

Como resultado de la serie de ensayos se establece el valor límite de σ_a que corresponde a cierta tensión σ_m. El resultado obtenido se puede interpretar gráficamente por un punto en el sistema de coordenadas σ_m, σ_a (fig. 463).

Continuando estos ensayos se obtiene el conjunto de puntos por los cuales se traza la curva límite que caracteriza las propiedades de

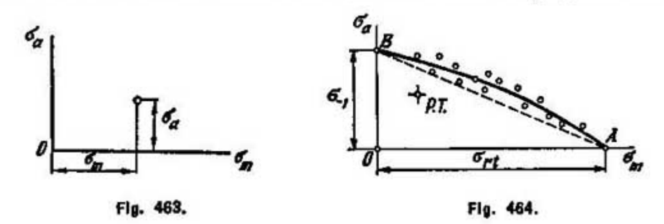


Fig. 463. Fig. 464.

resistencia del material en las condiciones de los ciclos asimétricos. Esta curva se denomina *diagrama de resistencia a la fatiga* (fig. 464).

El punto A del diagrama corresponde al límite de rotura en la tracción simple. El punto B refleja los resultados de los ensayos en el caso del ciclo simétrico. El diagrama obtenido permite juzgar sobre la resistencia de la estructura que trabaja con tensiones que varían cíclicamente.

Supongamos que para cierta pieza el ciclo se caracteriza por los valores de las tensiones σ_m y σ_a. Estas magnitudes se pueden interpretar como las coordenadas del punto de trabajo en el plano σ_m, σ_a. Si el punto de trabajo se ubica por debajo de la curva límite, la pieza resulta capaz de trabajar un tiempo indefinido cuando las tensiones varían cíclicamente. Si el punto de trabajo se sitúa por encima de la curva límite, la pieza se destruye después de cierto número de ciclos.

Sobre la base de numerosos ensayos se ha demostrado que la curva obtenida AB se puede sustituir por la recta AB como se indica por la línea de puntos en la figura 464. La parte de trabajo se reduce entonces en cierta medida, lo que conduce a un error que contribuye al aumento de la reserva de resistencia. De esta manera se excluye la zona dudosa donde los datos experimentales sufren dispersión.

Para construir el diagrama simplificado es suficiente disponer del límite de resistencia a la fatiga correspondiente al ciclo simétrico σ_{-1} y del límite de rotura σ_{rt}. El punto de trabajo (p. t.) del ciclo

que se investiga para la pieza que se calcula deberá situarse dentro del triángulo indicado.

Surge ahora el problema de cómo determinar las coordenadas del punto de trabajo y cómo determinar el coeficiente de seguridad de la pieza cuando se trata de solicitaciones cíclicas. La solución de estas dos cuestiones tiene ciertas particularidades específicas que pasamos a analizar ahora.

§ 86. Influencia de la concentración de tensiones sobre la resistencia a la fatiga

Uno de los factores fundamentales que se deben considerar en los cálculos prácticos de la resistencia a la fatiga es la concentración de las tensiones.

Un gran número de investigaciones teóricas y experimentales han demostrado que, en los lugares donde la forma del cuerpo elástico varía bruscamente (ángulos entrantes, orificios, surcos) y en la zona de contacto de las piezas aparecen tensiones grandes.

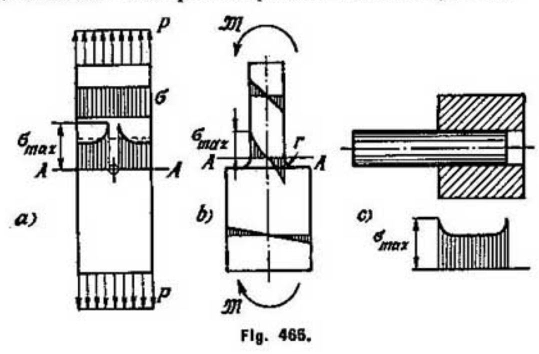


Fig. 465.

Por ejemplo, al someter a tracción una lámina con una pequeña perforación (fig. 465, *a*) se altera la ley de distribución uniforme de las tensiones en las proximidades del orificio. El estado tensional se convierte en biaxial y en los bordes del orificio el gráfico de las tensiones adquiere un pico. De manera análoga, durante la flexión de una barra escalonada (fig. 465, *b*), en la zona del vértice entrante surge una tensión elevada cuya magnitud depende ante todo del radio del redondeo r. Durante el encaje a presión de un casquillo en el árbol (fig. 465, *c*), en los extremos del casquillo y del árbol también aparecen tensiones locales. Pueden ser citados muchos ejemplos de esta índole Esta particularidad de la distribución de las tensio-

nes recibió el nombre de concentración de tensiones. La zona de propagación de las tensiones elevadas está limitada por una región estrecha situada en las inmediaciones del foco de concentración o, como se dice a veces, del concentrador de las tensiones. Debido al carácter local de la distribución estas tensiones se denominan tensiones locales.

La magnitud de las tensiones locales, en función de la forma geométrica de la pieza, se determina generalmente de manera teórica por los métodos de la teoría matemática de la elasticidad. Frecuentemente, al determinar las tensiones locales, se recurre también a los ensayos de modelos. En este caso se emplea generalmente el método de polarización (véase el § 115).

El exponente fundamental de las tensiones locales es el *coeficiente teórico de concentración de las tensiones*,

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}, \tag{13.3}$$

siendo σ_{max}, la tensión local máxima y σ_{nom}, la *tensión nominal*. Esta es la tensión que se obtiene por las fórmulas de la resistencia

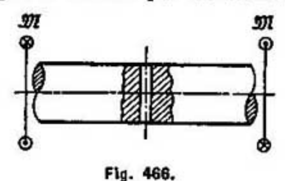


Fig. 466.

de los materiales, sin contar con el efecto de concentración. Generalmente el cálculo de σ_{nom} se lleva a cabo para la sección más debilitada de la pieza, como, por ejemplo, la sección AA (fig. 465).

Por ejemplo, en el caso de la lámina perforada (fig. 465, *a*)

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{F_{AA}},$$

en el caso de la flexión de una barra escalonada (fig, 465, *b*)

$$\sigma_{nom} = \frac{\mathfrak{M}}{W_{AA}}.$$

Sin embargo, si en estos cálculos surge alguna dificultad se entiende entonces por tensión nominal la tensión en la sección no debilitada. Por ejemplo, en el caso de la torsión de un árbol perforado perpendicularmente a su eje (fig. 466) se obtiene,

$$\tau_{nom} = \frac{M_t}{W_p},$$

siendo W_p el módulo polar de la sección no debilitada.

Sea como sea, la tensión nominal se obtiene, ante todo, de manera que el cálculo sea simple. La magnitud del coeficiente teórico de concentración está determinada para la mayoría de los elementos constructivos típicos que se encuentran en la práctica. Los datos referentes a la magnitud de k_t figuran en las tablas y gráficos de los manuales de construcción de máquinas. Así, por ejemplo, en la figura 467 está representada la dependencia entre el coeficiente teórico de concentración y la relación de las dimensiones geométricas de la franja perforada y del árbol entallado.

La concentración de las tensiones influye de manera diferente sobre la resistencia de la pieza según sean las propiedades del material y el carácter de la solicitación. Teniendo esto en cuenta, se introduce, a diferencia del coeficiente teórico, el *coeficiente efectivo de concentración* k_r y se diferencian los casos de tensiones constantes y de tensiones que varían cíclicamente.

En el caso de tensiones constantes (cuando $r=1$) se entiende por coeficiente efectivo de concentración la razón,

$$k_{+1}=\frac{\sigma_{rt}}{\sigma'_{rt}} \tag{13.4}$$

siendo σ_{rt}, el límite de rotura para la probeta sin concentración y σ'_{rt}, el límite convencional de rotura para la probeta con concentración de tensiones.

Al ensayar, por ejemplo, una barra prismática perforada (fig. 468, *a*), el coeficiente efectivo de concentración de las tensiones en la proximidad del agujero se determina como la razón entre la carga de rotura P y la carga de rotura P'. Lo mismo ocurre en el caso de la probeta entallada (fig. 468, *b*).

En el caso de materiales plásticos, las tensiones locales, cuando la carga es constante, no influyen apreciablemente sobre la resistencia de la pieza. Generalmente, en la zona de las tensiones elevadas surgen deformaciones plásticas locales sin la aparición de grietas. El resto del volumen del cuerpo, fuera de esta zona, se encuentra en el estado elástico y la capacidad de resistencia se mantiene prácticamente hasta los mismos valores de las fuerzas que en el caso de la ausencia de concentración. Esto permite, en el caso de solicitaciones estáticas, no considerar las tensiones locales.

Así pues, se puede admitir que en el caso de materiales plásticos,

$$k_{+1}=1.$$

En el caso de materiales frágiles el valor de k_{+1} se aproxima al valor del coeficiente teórico de concentración k_t, aunque pueden existir exclusiones. Por ejemplo, en el caso del hierro fundido, independientemente de la forma de la pieza, $k_{+1}=1$. Esto se explica por las particularidades estructurales del hierro fundido que en su masa tiene incrustaciones de grafito. Cada una de ellas es un foco de con-

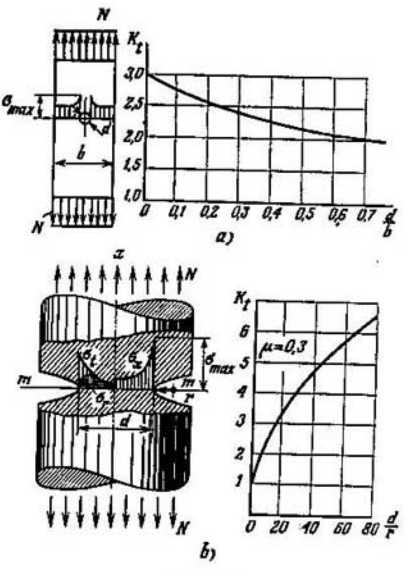


Fig. 467.

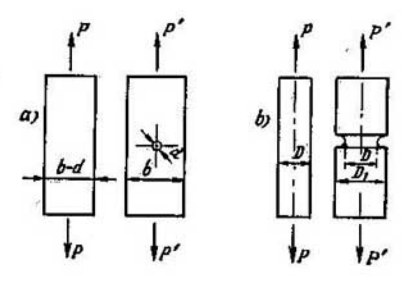


Fig. 468.

centración que conduce a tensiones locales sensiblemente mayores que las que se determinan por los factores constructivos (surcos, perforaciones, etc).

Cuando se trata de tensiones que varían cíclicamente (para $r=-1$) el coeficiente efectivo de concentración se obtiene de la razón

$$k_{-1}=\frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}}, \tag{13.5}$$

siendo σ_{-1}, el límite de resistencia a la fatiga de una probeta lisa y σ'_{-1}, el mismo límite que se obtiene, partiendo de las tensiones nominales en la probeta con concentración de tensiones. La magnitud de k_{-1} como la de k_{+1} depende no sólo de la forma geométrica de la pieza, sino también de las propiedades mecánicas del material.

El valor numérico del coeficiente efectivo de concentración se puede determinar solamente sobre la base del ensayo de las probetas a la fatiga. Actualmente se ha acumulado material experimental suficiente en este sentido. La comparación de los resultados obtenidos permite, en cierta medida, determinar la relación entre los coeficientes teórico y efectivo de concentración como sigue,

$$k_{-1}=1+q\,(k_t-1), \tag{13.6}$$

siendo q, el *coeficiente de sensibilidad* del material a las tensiones locales.

La magnitud de q depende esencialmente de las propiedades del material. Así, por ejemplo, se puede considerar que en el caso de aceros aleados de alta resistencia, la magnitud de q se aproxima a la unidad. En el caso de los aceros de construcción el valor medio es $q=0{,}6\div 0{,}8$, correspondiendo los valores mayores de q a los aceros de mayor resistencia. En el caso del hierro fundido q se aproxima a cero, así que la magnitud de coeficiente efectivo de concentración se diferencia muy poco de la unidad.

El coeficiente de sensibilidad depende también en cierta medida de las particularidades geométricas de la propia pieza y del foco de concentración. Se observa cierta disminución de q en el caso de coeficientes k_{-1} grandes y cierto crecimiento en el caso del aumento de las dimensiones absolutas de la pieza.

En los cálculos prácticos se recurre al coeficiente de sensibilidad q, generalmente, cuando no se dispone de los resultados de los ensayos directos para la determinación del coeficiente efectivo de concentración, pero se dispone de datos referentes al coeficiente teórico. Lo más preferible es el empleo directo de los valores de k_{-1} obtenidos de los resultados de los ensayos por fatiga. En el caso de los concentradores típicos y de los materiales que se usan con mayor frecuencia, estos datos figuran en los manuales en forma de tablas y gráficos. En la figura 469 están dados, en calidad de ejemplo, los diagramas típicos para la determinación del coeficiente efectivo de concen-

tración. El primer diagrama nos da el valor de k_{-1} para la barra escalonada de acero en el caso de tracción y compresión. Las curvas *1*, *2* y *3* corresponden a los aceros cuyos límites de rotura son $\sigma_{rt}=$ $=4\,000$ kgf/cm², 8 000 kgf/cm² y 12 000 kgf/cm². El segundo diagrama nos da el valor de k_{-1} para el caso de torsión de un árbol con ranura anular de acero al carbono y de $\sigma_{rt}=5\,000$ kgf/cm².

Datos más abundantes de los coeficientes efectivos de concentración se encuentran en otros textos*.

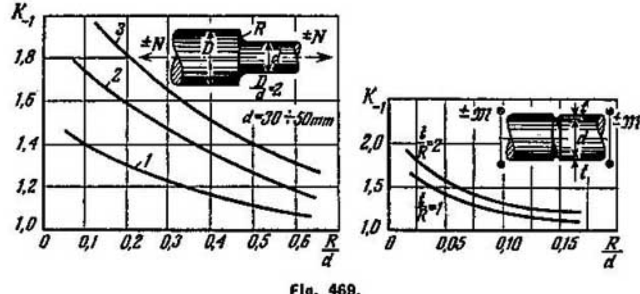


Fig. 469.

En los cálculos de la resistencia a la fatiga la existencia de tensiones locales se considera, introduciendo las correcciones correspondientes en los valores numéricos de las coordenadas del punto de trabajo (p. t.) en el diagrama de la resistencia a la fatiga (fig. 464). Así, por ejemplo, si el cálculo de la pieza según las tensiones nominales nos da las características del ciclo σ_m y σ_a, entonces, al considerar las tensiones locales se debe partir de las coordenadas del punto de trabajo $\sigma_m k_{+1}$ y $\sigma_a k_{-1}$, donde k_{+1} se considera generalmente igual a la unidad.

De lo expuesto se deduce que la existencia de concentración de tensiones rebaja la resistencia a la fatiga de la pieza. Por lo tanto, al diseñar las máquinas, se debe procurar que la influencia de las tensiones locales se reduzca al mínimo. Esto se consigue, ante todo, con medidas constructivas. En el caso de piezas decisivas que trabajan con tensiones cíclicas, el contorno exterior deberá ser lo más suave posible, los radios en los ángulos entrantes deberán ser grandes, los agujeros indispensables deberán situarse en la zona donde las tensiones son pequeñas, etc.

En la figura 470, *a* está representado un bisel profundo que disminuye las tensiones locales. Para aumentar el radio del bisel se

* Véase Ponomariov S. D. y otros, *Cálculos de resistencia en la construcción de máquinas*, tomo III, Mashguis, ed. rusa.

pueden emplear también anillos de junta como se indica en la figura 470, *b*. Para reducir las tensiones locales a veces se practica la introducción de ranuras especiales de descarga (fig. 471, *a*) que influyen

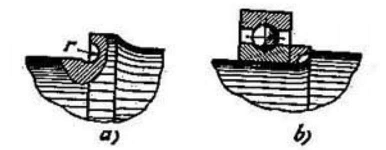


Fig. 470.

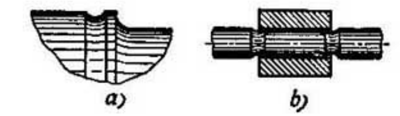


Fig. 471.

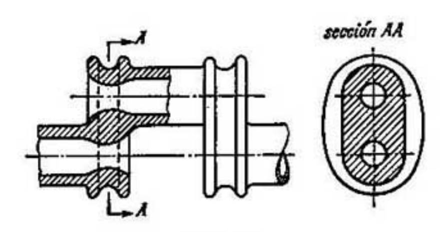


Fig. 472.

favorablemente sobre la resistencia a la fatiga del árbol. Este mismo tipo de ranuras de descarga se pueden emplear en los lugares de encaje (fig. 471, *b*). En calidad de ejemplo, en la figura 472 está representado el elemento del cigüeñal de construcción racional. Las configuraciones suaves del árdol y la eliminación del material de las cavidades interiores de los muñones aumentan considerablemente la resistencia a la fatiga y reducen el peso de la pieza.

§ 87. Influencia del estado de la superficie y de las dimensiones de la pieza sobre la resistensia a la fatiga

Como en el caso de tensiones cíclicas, el comienzo de la destrucción está relacionado con la aparición de grietas locales, resulta obvia la importancia que tiene el estado de la superficie de la pieza sobre la resistencia a la fatiga. Está absolutamente claro que en el caso de una superficie limpia y bien trabajada, aumenta el límite de resistencia a la fatiga. En el caso de un acabado rugoso, la existencia de pequeños defectos en la superficie conduce a la reducción de los

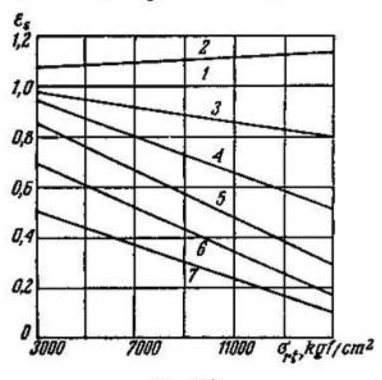


Fig. 473.

exponentes de la resistencia a la fatiga. En el caso de materiales de gran sensibilidad a las tensiones locales, la influencia del estado de la superficie es mayor.

En los cálculos de la resistencia a la fatiga, las particularidades relacionadas con el tratamiento de la superficie de la pieza se consideran mediante el *coeficiente de calidad de la superficie*,

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_{-1s}}{\sigma_{-1}}, \tag{13.7}$$

siendo σ_{-1}, el límite de resistencia a la fatiga que se obtiene sobre las probetas de tratamiento "estandartizado" de la superficie. En calidad de tratamiento "estandartizado" se admite el esmerilado. σ_{-1s} es el límite de resistencia a la fatiga de las probetas cuya superficie corresponde al estado de la pieza que se analiza.

En los diagramas de la figura 473 figuran los valores aproximados del coeficiente de calidad de la superficie de diversos aceros en función del valor del límite de rotura.

El coeficiente de calidad para las probetas esmeriladas se considera igual a la unidad (recta *1*). La recta *2* se refiere a las probetas de superficie pulida. La recta *3* se refiere a las probetas de superficie trabajada con cuchilla. La recta *4* nos da los valores del coeficiente de calidad de la superficie picada y la recta *5* se refiere a la superficie que no han sido trabajada después del laminado. Los valores de ε_s para las superficies oxidadas en agua dulce y salada están dados por las rectas *6* y *7*.

El coeficiente de calidad de la superficie se considera, al determinar la ordenada del punto de trabajo (p.t) en el diagrama de la resistencia a la fatiga (fig. 464). Así, por ejemplo, si la amplitud del ciclo que se obtiene partiendo del caso nominal es σ_a, entonces, después de ser corregida al considerar la calidad de la superficie, la amplitud será $\frac{\sigma_a}{\varepsilon_s}$. La abscisa del punto de trabajo σ_m permanece invariable, puesto que, cuando las tensiones son constantes, la calidad de la superficie no influye sobre la resistencia de la pieza.

De lo expuesto se deduce que para aumentar la resistencia a la fatiga es necesario obtener una alta limpieza de la superficie, sobre todo en las proximidades de los focos de concentración de tensiones. Las piezas de importancia que trabajan en condiciones duras de las tensiones cíclicas, generalmente, se esmerilan e incluso se pulen.

Los métodos especiales de tratamiento de la superficie presentan grandes posibilidades para el aumento de la resistencia a la fatiga. A éstos se refiere la nitruración superficial que da resultados bien palpables cuando existe concentración de tensiones. El límite de resistencia a la fatiga se puede elevar también, rodando la superficie con rodillos. Un gran efecto se produce cuando hay focos de concentración, bombardeando la superficie de la pieza con perdigones de hierro fundido o de acero. Como resultado de este bombardeo se forma una capa superficial con tensiones residuales de compresión que en adelante impide la aparición de grietas locales.

Simultáneamente al factor que caracteriza el estado de la superficie, al calcular la resistencia a la fatiga de la pieza, se debe considerar también el así denominado *factor escala*. Los ensayos realizados para la determinación del límite de resistencia a la fatiga para las probetas de diversos tamaños demuestran que, al aumentar estos últimos, disminuye el límite de resistencia a la fatiga. Esto se explica por el hecho de que las tensiones máximas en la pieza no caracterizan plenamente todo el proceso de la destrucción por fatiga. El comienzo de la aparición de la grieta depende de la magnitud de la tensión máxima. Su desarrollo posterior se determina por sus leyes «locales» y, en gran medida, depende de la forma y dimensiones de la pieza. Gran importancia tiene el hecho de que, al aumentar las dimensiones absolutas de las piezas, aumenta la posibilidad de que existan

defectos estructurales en la zona de las tensiones elevadas y, como resultado, aumenta la posibilidad de aparición de grietas.

La razón entre el límite de resistencia a la fatiga de la pieza σ_{-1p} y el límite de resistencia a la fatiga de la probeta de dimensiones «estandartizadas» ($d=8\div12$ mm) se denomina coeficiente del factor escala o simplemente factor escala,

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_{-1p}}{\sigma_{-1}}. \qquad (13.8)$$

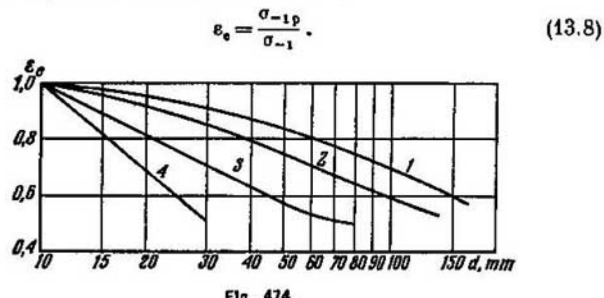


Fig. 474.

Al determinar el factor escala se supone que el estado de la superficie de la pieza y de la probeta que se ensayan, es igual.

En la figura 474 está dada la relación aproximada entre el factor escala y el diámetro del árbol para los casos de flexión y torsión. La curva *1* fue obtenida para el acero al carbono, en el caso de ausencia de tensiones locales. La curva *2* corresponde al acero aleado ($\sigma_{rt} \approx$ $\approx 10\,000 \div 12\,000$ kgf/cm²) cuando no existe concentración de tensiones y al acero al carbono cuando la concentración es moderada. La curva *3* corresponde al acero aleado en el caso de concentración

Tabla 10

d, mm	Límite de resistencia a la fatiga σ_{-1}, en kgf/cm²						
	Aceros al carbono			Aceros aleados			
15	2 500	2 650	3 200	3 800	4 400	5 000	6 000
30	2 100	2 250	2 700	3 200	3 700	4 200	5 000
60	1 750	1 900	2 250	2 700	3 100	3 500	4 200
100	1 600	1 700	2 000	2 400	2 800	3 150	3 800
σ_{rt}, kgf/cm²	4 500	5 500	6 500	8 000	8 800	9 800	12 000
σ_{ft}, kgf/cm²	2 500	3 100	3 600	5 600	6 100	7 300	10 000

de tensiones y la curva *4*, a los aceros en el caso de gran concentración de tensiones. De estas curvas se desprende que el factor escala se revela bruscamente cuando las tensiones locales son grandes.

En la tabla 10 figuran los límites de resistencia a la fatiga de probetas lisas de diversos tipos de acero en función del diámetro.

En los cálculos de la resistencia, el coeficiente ε_σ, como también ε_s, se considera solamente, al obtener la ordenada del punto de trabajo, en lugar del valor nominal de la amplitud del ciclo σ_a se considera $\frac{\sigma_a}{\varepsilon_e}$.

§ 88. Reserva de resistencia a la fatiga y su determinación

Construyamos el diagrama de la resistencia a la fatiga y ubiquemos en él el punto de trabajo del ciclo. Como se indicó anteriormente, el diagrama se construye, tomando como base las características mecánicas dadas del material σ_{rt} y σ_{-1}, mientras que el punto de trabajo se determina por los valores nominales de las tensiones del ciclo σ_m y σ_a. Teniendo en cuenta las correcciones correspondientes a la concentración de las tensiones y a los factores escala y de la superficie, las coordenadas del punto de trabajo serán, $\sigma_m k_{+1}$ y $\frac{\sigma_a k_{-1}}{\varepsilon_s \varepsilon_e}$ (fig. 475).

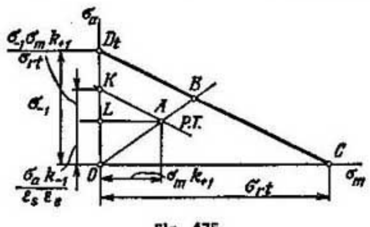


Fig. 475.

Entenderemos por coeficiente de seguridad a la fatiga la razón entre el segmento OB y el segmento OA (fig. 475),

$$n_r = \frac{OB}{OA}. \tag{13.9}$$

Esta razón caracteriza el grado de aproximación de las condiciones de trabajo a las condiciones límites para el material dado. En el caso particular cuando la tensión es constante en tiempo ($\sigma_a = 0$), esta definición del coeficiente de seguridad coincide con la definición común.

Al determinar el coeficiente de seguridad resulta cómodo recurrir a la construcción gráfica del diagrama de la resistencia a la fatiga

y medir después los segmentos correspondientes. La relación entre los segmentos se puede determinar también a simple vista. La exactitud de tal valoración del coeficiente de seguridad se encuentra dentro de los límites fijados por la exactitud de las magnitudes originales y de las correcciones posteriores.

En la mayoría de los casos para determinar n_r se prefieren las fórmulas que se obtienen de las relaciones geométricas entre los segmentos indicados en la figura 475. Trazando la recta AK paralela a CD se obtiene la proporción siguiente,

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OK}=n_r.$$

De la semejanza de los triángulos OCD y AKL se obtiene,

$$KL=\frac{\sigma_{-1}\sigma_m k_{+1}}{\sigma_{rt}}.$$

Así pues,

$$OK=\frac{\sigma_a k_{-1}}{\varepsilon_s\varepsilon_e}+\frac{\sigma_{-1}\sigma_m k_{+1}}{\sigma_{rt}},$$

y como $OD=\sigma_{-1}$, suponiendo $k_{+1}=1$ hallaremos,

$$n_r=\frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_s\varepsilon_e}\sigma_a-\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{rt}}\sigma_m} \qquad (13.10)$$

Todas las cuestiones de la resistencia a la fatiga analizadas hasta aquí se referían al caso del estado tensional monoaxial. De manera

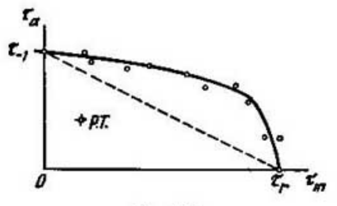


Fig. 476.

análoga se pueden obtener las relaciones correspondientes a la resistencia a la fatiga para el caso de la distorsión pura (torsión). En este caso,

$$n_r=\frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_s\varepsilon_e}\tau_a+\frac{\tau_{-1}}{\tau_r}\tau_m}. \qquad (13.11)$$

Los ensayos demuestran que el diagrama de la resistencia a la fatiga para la distorsión se aleja sensiblemente de la línea recta, propia del caso de la tracción—compresión y tiene el aspecto indicado

en la figura 476. Por lo tanto, los valores reales del coeficiente de seguridad resultan ser algo mayores que los que se obtienen del cálculo por la fórmula (13.11).

Se conocen intentos de crear hipótesis de la resistencia a la fatiga para el caso del estado tensional complejo. Todos ellos se reducen principalmente a la generalización de las conocidas hipótesis de los estados límites para el caso de tensiones cíclicas. En el caso del estado tensional biaxial σ, τ que en la práctica del cálculo se encuentra con más frecuencia, se admite en la actualidad la fórmula empírica de Haigh y Pollard,

$$\frac{1}{n_r^2}=\frac{1}{n_\sigma^2}+\frac{1}{n_\tau^2}, \qquad (13.12)$$

siendo n_r, el coeficiente de seguridad a la fatiga que se busca; n_σ, el coeficiente de seguridad a la fatiga que se obtiene, suponiendo que las tensiones tangenciales τ no existen y n_τ, el coeficiente correspondiente a las tensiones tangenciales que se determina, suponiendo $\sigma=0$.

Esta fórmula es aplicable no sólo al caso de una variación cofásica de σ y τ, sino también a ciclos en los que los máximos de σ y τ no se alcanzan simultáneamente.

Veamos algunos ejemplos de cálculos en el caso de tensiones cíclicas.

Ejemplo 13.1. En la figura 477 se representa un relé electromagnético. El muelle plano en su posición original cierra el contacto superior y se aprieta a éste

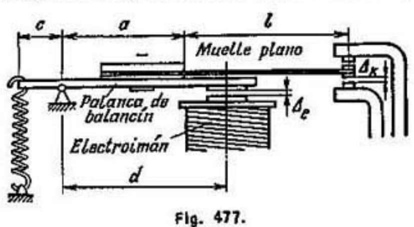


Fig. 477.

por el muelle helicoidal situado en el brazo izquierdo de la palanca. Al conectar el arrollamiento la palanca rígida es atraída por el núcleo del electroimán, se desconecta el contacto superior y se conecta el inferior. El muelle plano se flexiona entonces en la dirección contraria. Este proceso se repite varias veces al segundo. Determínese el coeficiente de seguridad del muelle plano.

Las dimensiones son las siguientes:

$a=15$ mm; $l=20$ mm; $c=5$ mm; $d=20$ mm; $\Delta_e=1,2$ mm; $\Delta_c=0,8$ mm.

El muelle plano es de sección rectangular de lados $b=10$ mm y $h=0,3$ mm. El material es latón para el cual $E=10^6$ kgf/cm², $\sigma_{rt}=4\ 500$ kgf/cm² y $\sigma_{-1}=$ $=1\ 800$ kgf/cm². La fuerza de pretensión del muelle helicoidal es $P_p=0,1$ kgf.

Veamos las dos posiciones extremas de la palanca y del muelle plano (fig. 478) y determinemos el ciclo de la variación de las tensiones.

La fuerza de compresión P_c del muelle plano al contacto superior es,

$$P_c = P_p \frac{c}{a+l},$$

siendo P_p, la fuerza de pretensión original del muelle helicoidal,

$$P_c = 0{,}1 \frac{5}{35} = 0{,}0143 \text{ kgf}.$$

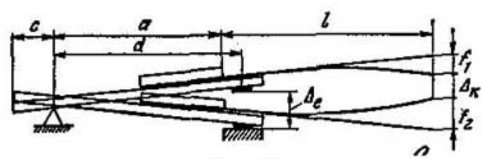


Fig. 478.

Bajo la acción de esta fuerza el muelle plano recibe una flecha igual a

$$f_1 = \frac{P_c l^3}{3EI_x} = \frac{0{,}0143 \cdot 20^3 \cdot 12}{3 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 0{,}3^3} = 0{,}169 \text{ mm}.$$

La tensión que aparece en el empotramiento será,

$$\sigma = \frac{P_c l}{W_x} = \frac{0{,}0143 \cdot 20 \cdot 6}{10 \cdot 0{,}3^2} = 1{,}9 \text{ kgf/mm}^2.$$

Relaciones geométricas simples demuestran que (fig. 478),

$$f_1 + \Delta_c + f_2 = \Delta_e \frac{a+l}{d},$$

de donde se obtiene,

$$f_2 = 1{,}2 \cdot \frac{35}{20} - 0{,}8 - 0{,}169 = 1{,}131 \text{ mm}.$$

Pero,

$$f_2 = \frac{Pl^3}{3EI_x}, \quad \sigma = \frac{Pl}{W_x}.$$

Eliminando de aquí P obtendremos,

$$\sigma = \frac{3EI_x}{W_x l^2} f_2 = \frac{3Eh}{2l^2} f_2;$$

es decir,

$$\sigma = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 20^2} \cdot 1{,}131 = 12{,}7 \text{ kgf/mm}^2.$$

Así pues, se obtiene,

$$\sigma_{max} = 1\,270 \text{ kgf/cm}^2, \quad \sigma_{min} = -190 \text{ kgf/cm}^2$$

6

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 540 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 730 \text{ kgf/cm}^2.$$

En el empotramiento el muelle se comprime entre dos placas relativamente blandas de textolita. Consideramos por eso que $k_{-1}=1$. Como la superficie de la placa está limpia y no se somete a corrosión admitimos que $\varepsilon_s=1$. Tampoco hay necesidad de considerar el factor escala.

Dados los valores de σ_{rt} y σ_{-1} construimos el diagrama de la resistencia a la fatiga (fig. 479) y ubicamos en él el punto de trabajo $\sigma_m=540$ kgf/cm² y $\sigma_a=$

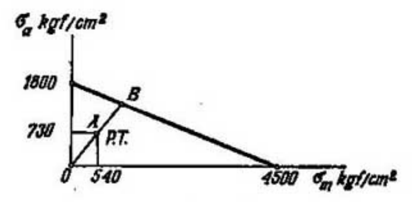


Fig. 479.

$=730$ kgf/cm². La razón entre los segmentos medidos del diagrama OB y OA nos da $n_r \approx 1,9$.

Ejemplo 13.2. El árbol con un bisel (fig. 480) trabaja a torsión según un ciclo asimétrico. El valor máximo del momento es $\mathfrak{M}=8\,000$ kgf·cm y el mínimo $\mathfrak{M}=-2\,000$ kgf·cm. Las características mecánicas del material son:

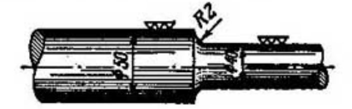


Fig. 480.

$\tau_r=4\,000$ kgf/cm², $\tau_{-1}=1\,900$ kgf/cm² y $\sigma_{rt}=6\,000$ kgf/cm². Determínese el coeficiente de seguridad.

Calculamos las características nominales del ciclo,

$$\tau_{max}=\frac{\mathfrak{M}_{max}}{0,2d^3}=\frac{8\,000}{0,2\cdot 4^3}=625 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau_{min}=\frac{\mathfrak{M}_{min}}{0,2d^3}=\frac{2\,000}{0,2\cdot 4^3}=-156 \text{ kgf/cm}^2,$$

de donde se obtiene,

$$\tau_m=235 \text{ kgf/cm}^2, \quad \tau_a=390 \text{ kgf/cm}^2.$$

El coeficiente efectivo de concentración se obtiene del manual «Construcción de máquinas». Los datos correspondientes están dados en la figura 481.

Calculamos primeramente el coeficiente efectivo de concentración k'_{-1} para el árbol con la relación de los diámetros $D:d=1,4$. Las curvas *1*, *2* y *3* (fig. 481) se refieren a los aceros de límite de rotura σ_{rt} respectivamente 12 000, 6 000 y 4 000 kgf/cm². De la curva *2* para $R/d=0,05$ se obtiene $k'_{-1}=1,36$. La curva α permite transformar el resultado obtenido para otras relaciones de D/d. En nuestro ejemplo $D/d=1,25$, por lo tanto, $\alpha=0,76$ y $k_{-1}=\alpha\,(k'_{-1}-1)+1=1,27$. Como el árbol está esmerilado admitimos $\varepsilon_s=1$.

Los datos correspondientes al factor escala (fig. 474) son válidos tanto para la flexión como para la torsión. De la curva *2* para $d=40$ mm se obtiene el valor $e_e=0{,}78$.

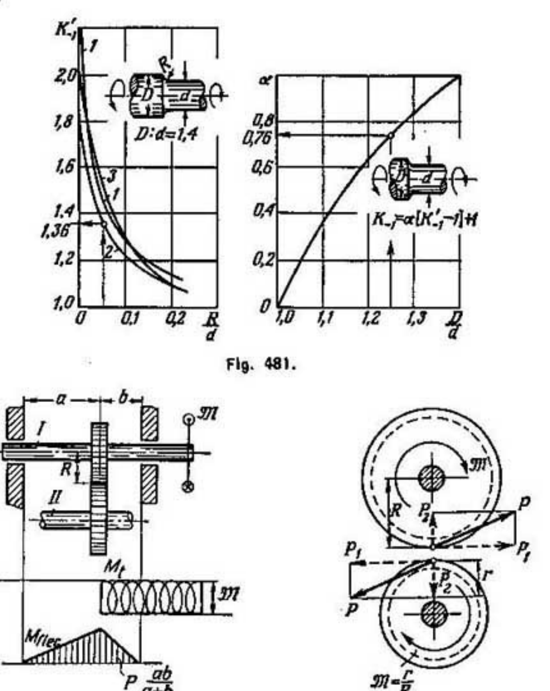


Fig. 481.

Fig. 482.

Fig. 483.

El coeficiente de seguridad a la fatiga se obtiene por la fórmula (13.11),

$$n_r=\frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{e_s e_m}\tau_a+\frac{\tau_{-1}}{\tau_f}\tau_m}=\frac{1\,900}{\frac{1{,}27}{0{,}78}390+\frac{1\,900}{4\,000}235}\approx 2{,}5.$$

Esta magnitud puede ser obtenida también gráficamente como esto se hizo en el ejemplo anterior.

Ejemplo 13.3. Determinar el coeficiente de seguridad a la fatiga del árbol *I* (fig. 482).

El momento $\mathfrak{M}$ tiene magnitud constante 10 000 kgf·cm. El diámetro del árbol es 50 mm, $a=20$ cm y $b=8$ cm. El radio de la rueda dentada es $R=8$ cm. El material es acero al carbono, $\tau_f=2\,500$ kgf/cm² y $\sigma_{-1}=3\,000$ kgf/cm².

El coeficiente efectivo de concentración de las tensiones en el lugar del ajuste de la rueda dentada en el eje es $k_{-1}=1,4$. El árbol está esmerilado.

Bajo la acción del momento constante $\mathfrak{M}$, en las secciones transversales del árbol surgen tensiones tangenciales τ constantes en tiempo también. Simultáneamente a la torsión, bajo la acción de la fuerza P de interacción entre las ruedas dentadas, tiene lugar la frexión del árbol (fig. 483).

En la teoría de los engranajes se demuestra que

$$P_2 \approx 0,4P_1$$

y, por lo tanto,

$$P=\sqrt{P_1^2+P_2^2} \approx 1,08P_1.$$

De las condiciones de equilibrio del árbol *I* se obtiene,

$$P_1=\frac{\mathfrak{M}}{R}; \quad P=1,08\,\frac{\mathfrak{M}}{R}.$$

En la zona del encaje de la rueda dentada, en las secciones transversales del árbol, surgen tensiones normales que, como consecuencia de la rotación del árbol, varían según el ciclo simétrico.

Es decir, que el estado tensional del árbol es plano y, por lo tanto, para obtener el coeficiente de seguridad resulta necesario recurrir a la fórmula empírica de Haigh y Pollard (13.12).

Determinamos primeramente, por separado, los coeficientes de seguridad convencionales correspondientes a σ y τ,

$$\sigma_{max}=\sigma_a=\frac{M_{flec}}{0,1d^3}=1,08\,\frac{\mathfrak{M}}{R}\,\frac{ab}{a+b}\,\frac{1}{0,1d^3}=616\ \text{kgf/cm}^2,\ \sigma_m=0.$$

De la curva *2* (véase la fig. 474) obtenemos el coeficiente del factor escala para $d=50$ mm, obteniendo $\varepsilon_e=0,75$.

Hallamos ahora, por la fórmula (13.10), el coeficiente de seguridad n_σ,

$$n_\sigma=\frac{\varepsilon_s\varepsilon_e\sigma_{-1}}{\sigma_a k_{-1}}=2,6.$$

Como

$$\tau_a=0,\ \tau_m=\frac{\mathfrak{M}}{0,2d^3}=400\text{kgf/cm}^2, \quad n_\tau=\frac{\tau_f}{\tau_m}=6,2,$$

por la fórmula (13.12) hallamos,

$$n=\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}=2,4$$

Capítulo XIV

ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DEFORMABLES

§ 89. Concepto de estabilidad

Se entiende por estabilidad la propiedad del sistema de mantener su estado durante las acciones exteriores. Si el sistema no tiene esta propiedad se dice que es inestable. En la misma medida se puede afirmar que su estado es inestable.

En las condiciones reales siempre existen causas que pueden conducir a la perturbación del estado original de equilibrio. Es decir, que siempre se realiza la posibilidad del paso del sistema inestable a un nuevo estado. En este caso se dice que tiene lugar la *pérdida de estabilidad.*

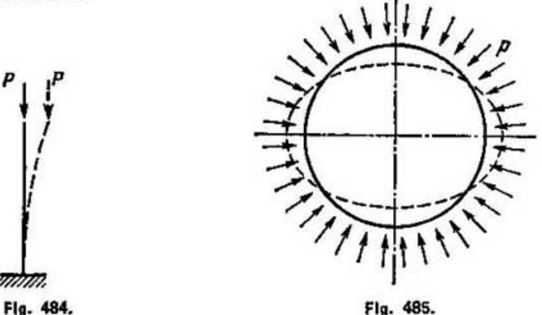


Fig. 484. Fig. 485.

Al perder la estabilidad, el sistema se puede comportar de diversas formas. Generalmente, tiene lugar el paso a un nuevo estado de equilibrio, lo que, en la mayoría de los casos, va acompañado de grandes deformaciones, de deformaciones plásticas o de una rotura completa. En algunos casos, después de perder la estabilidad, la estructura sigue trabajando y cumple, como antes, sus funciones principales. Así ocurre en el caso del recubrimiento de paredes delgadas de las estructuras de los aviones. Pueden ocurrir, por fin, casos cuando el sistema que perdió la estabilidad, al no tener una posición estable de equilibrio, pasa al régimen de las oscilaciones no amortiguadas.

El fenómeno de la pérdida de estabilidad en el caso de cuerpos elásticos se puede observar en toda una serie de ejemplos.

El caso más simple corresponde a la pérdida de estabilidad de una barra comprimida axialmente (fig. 484). Cuando la fuerza es suficientemente grande la barra no puede mantener la forma recta y obligatoriamente se flexiona. Tiene lugar la pérdida de estabilidad.

El tubo de paredes delgadas (fig. 485) solicitado por una presión exterior es capaz de perder la estabilidad. En este caso, la forma circular de la sección pasa a ser elíptica y el tubo se aplasta, a pesar de que, en el momento de perder la estabilidad, las tensiones están lejos de alcanzar el límite de fluencia.

Este mismo tubo puede perder la estabilidad en el caso de compresión axial (fig. 486). El mismo fenómeno ocurre durante la torsión del tubo (fig. 487).

Se pueden citar muchos ejemplos de este tipo.

Generalizando lo dicho, es necesario destacar que el fenómeno de la pérdida de estabilidad se manifiesta de la forma más clara en las estructuras ligeras de paredes delgadas: en las cáscaras comprimidas y en las paredes delgadas. Por lo tanto, al diseñar estas estructuras, simultáneamente al cálculo de la resistencia se realiza también el cálculo de la estabilidad de nudos aislados y de todo el sistema en conjunto.

Una de las medidas que contribuyen al aumento de la reserva de estabilidad del sistema consiste en el aumento de su rigidez. Así, por ejemplo, en la construcción de aviones, las paredes divisorias delgadas se refuerzan con perfiles especiales. Esta pared reforzada tiene un alto grado de estabilidad a pesar de su peso relativamente pequeño.

Para analizar la estabilidad es necesario escoger el esquema de cálculo. El esquema principal, que ya es clásico, es el siguiente. Se supone que el sistema es ideal, es decir, que si se trata de una barra comprimida, su eje es absolutamente recto, el material es homogéneo y las fuerzas se aplican centralmente. Si se trata de una bóveda cilíndrica también se considera que su forma es perfecta y que la carga no se sale de las leyes de distribución fijadas.

A este sistema ideal se le comunica cierta desviación de la posición de equilibrio. Aquí se consideran las desviaciones que no solamente son pequeñas, sino que pueden hacerse menores que cualquier magnitud pequeña fijada previamente. Si, una vez eliminada la causa que origina la perturbación, el sistema vuelve a su estado inicial de equilibrio, este último se considera estable. Si no vuelve, el estado de equilibrio se considera inestable. Aquí no se consideran las fuerzas de inercia que surgen durante el movimiento del sistema.

Este módo de enfocar el análisis de la estabilidad permite, en la mayoría absoluta de los sistemas elásticos, determinar valores tales de las fuerzas exteriores para los cuales la posición estable de equi-

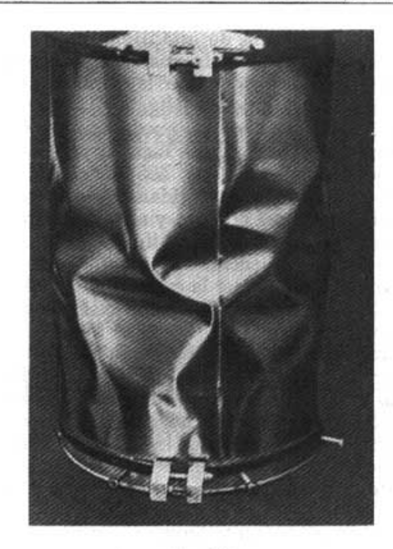


Fig. 486.

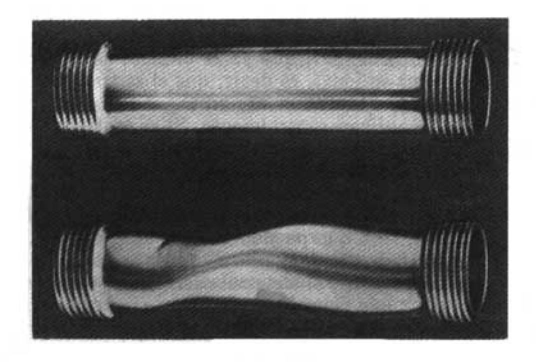


Fig. 487.

librio se hace inestable. Estas fuerzas se denominan fuerzas críticas y se interpretan en las estructuras como cargas límites.

La carga de trabajo, en los cálculos de la estabilidad, se designa igual a la n parte de la carga crítica. Se entiende por n el *coeficiente de seguridad a la estabilidad.*

§ 90. Problema de Euler

Comenzamos el estudio de la estabilidad de sistemas elásticos por el problema más simple sobre el equilibrio de la barra comprimida axialmente por las fuerzas P (fig. 488). Este problema fue planteado y resuelto por primera vez por el gran matemático L. Euler en la mitad del siglo XVIII. Es por esto, que frecuentemente, cuando se habla de la estabilidad de la barra comprimida, se emplea la expresión: «problema de Euler» o «estabilidad de la barra según Euler».

Supongamos que, por cierta causa, la barra comprimida recibió cierta flexión (fig. 488). Analicemos las condiciones que hacen posible el equilibrio de la barra con el eje flexionado.

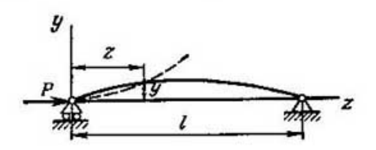


Fig. 488.

Las coordenadas de los puntos de la línea elástica de la barra se designa por z e y. Cuando se trata de flechas pequeñas,

$$EIy'' = M. \tag{14.1}$$

La flexión de la barra ocurre en el plano de la rigidez mínima y, por lo tanto, se entiende por I el momento de inercia mínimo de la sección.

El momento flector M es, en su valor absoluto, igual a Py. En este tipo de problemas, el signo del momento flector requiere un estudio especial.

Consideraremos positivo el momento que aumenta la curvatura. Analizando la línea elástica de la figura 488, observamos que la fuerza de compresión P disminuye, en el sentido algebraico de la palabra, la curvatura. En efecto, cuando y es positivo la convexidad de la línea elástica se orienta hacia arriba, es decir, que la curvatura de la línea elástica es negativa. El momento de la fuerza P se orienta de tal manera que, al encorvar más la línea elástica, la curvatura se

hace «más negativa» es decir, disminuye. Así pues,

$$EIy'' = -Py. \tag{14.2}$$

Para no equivocarse en el signo, en estos casos, conviene atenerse a la regla simple siguiente, sin anticipar la forma de la línea elástica se la debe representar formalmente en el dibujo de manera tal que la función y y sus dos primeras derivadas sean positivas (véase la línea punteada en la figura 488). Entonces del dibujo se puede, sin error, plantear los momentos de las fuerzas con signo positivo o negativo según aumente o disminuya la curvatura de la línea elástica bajo la acción de las fuerzas exteriores. Designando

$$\frac{P}{EI} = k^2 \tag{14.3}$$

obtendremos para la ecuación (14.2),

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{14.4}$$

de donde hallamos,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \cos kz. \tag{14.5}$$

Las constantes C_1 y C_2 se escogerán de manera tal que se cumplan las condiciones de borde: cuando $z=0$ $y=0$ y cuando $z=l$ $y=0$. De la primera condición se deduce que $C_2=0$ y de la segunda,

$$C_1 \operatorname{sen} kl = 0. \tag{14.6}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones posibles o $C_1=0$ ó $\operatorname{sen} kl = 0$.

En el primer caso resulta que si $C_1 = C_2 = 0$ los desplazamientos y (14.5) se convierten idénticamente en cero y, por lo tanto, la barra adquiere la forma rectilínea. Este caso no nos interesa. En el segundo caso,

$$kl = \pi n,$$

siendo n un número entero arbitrario. Teniendo en cuenta (14.3) obtendremos,

$$P = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}.$$

Esto indica que para que la barra mantenga la forma curvilínea es necesario que la fuerza P reciba valores determinados. La fuerza mínima P, no igual a cero, se obtiene cuando $n=1$,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{14.7}$$

Esta fuerza se denomina *primera carga crítica* o *fuerza de Euler*. Cuando $n=1$ se obtiene,

$$kl = \pi$$

y la ecuación de la línea elástica (14.5) resulta,

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

La barra se flexiona según una semionda sinusoidal cuya flecha máxima es C_1.

Para cualquier valor entero de n se obtiene,

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{l},$$

es decir, que la línea elástica de la barra se representa por una curva compuesta por n semiondas (fig. 489).

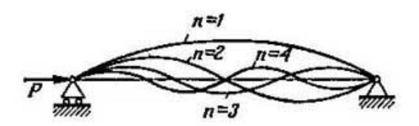


Fig. 489.

En la solución obtenida aparecen algunas cosas que no están claras y que deben ser analizadas. Ante todo, permanece indeterminada la magnitud de la flecha máxima C_1 y las relaciones obtenidas no indican como depende de la fuerza P. No está claro que es lo que ocurre cuando la fuerza P es algo mayor que la primera carga crítica. En efecto, en este caso

$$kl \neq \pi$$

y de la ecuación (14.6) se deduce que $C_1 = C_2 = 0$, ya que sen $kl \neq 0$. Esto indica que la función y (14.5) es idénticamente igual a cero y la barra permanece recta. Resulta que cuando $P = P_{crit}$ la barra adquiere la forma curvilínea y cuando P es algo mayor que P_{crit} vuelve a ser recta, resultado que no concuerda con el sentido físico del mecanismo de la flexión de la barra.

Estas contradicciones se resuelven fácilmente, si tenemos en cuenta que la ecuación diferencial (14.2) es aproximada y válida solamente cuando se trata de flechas pequeñas. Si se plantea la ecuación exactamente, obtendremos,

$$EI \frac{1}{\rho} = \frac{EIy''}{[1 + y'^2]^{3/2}} = -Py.$$

Cuando la fuerza P es mayor que la crítica, los desplazamientos crecen con tanta rapidez que resulta imposible prescindir de y'^2, que figura en el denominador.

§ 91. Desplazamientos grandes de la barra esbelta

Supongamos que la barra es suficientemente fina y que las tensiones en ella, incluso en el caso de grandes flexiones, no superan el límite de proporcionalidad. Resulta posible entonces estudiar su comportamiento en el campo de los desplazamientos grandes, suponiendo que el material se atiene plenamente a la ley de Hooke. Las barras que tienen esta particularidad se denominan barras esbeltas.

Veamos el comportamiento de una barra esbelta (fig. 488) comprimida por la fuerza P, es decir, resolvamos el mismo problema anterior, pero sin suponer que los desplazamientos son requeños, e intentemos, en esta nueva solución, hallar explicación a las contradicciones que se advirtieron anteriormente.

En lugar de la expresión (14.4) escribimos la ecuación diferencial de la línea elástica como sigue,

$$\frac{1}{\rho}+k^2y=0. \qquad (14.8)$$

Escogemos en calidad de variable independiente, en lugar de z, la longitud del arco s (OA de la figura 490) que se mide desde el apoyo izquierdo.

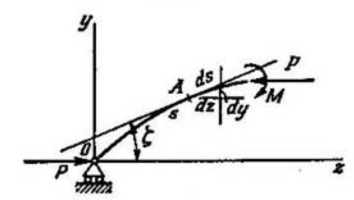


Fig. 490.

Entonces la curvatura será

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\zeta}{ds},$$

siendo ζ, el ángulo de inclinación de la tangente a la línea elástica.

Derivando la ecuación (14.8) respecto a s obtendremos,

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2}=-k^2\frac{dy}{ds}=-k^2\operatorname{sen}\zeta.$$

ó

$$d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)=-2k^2\operatorname{sen}\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\,ds.$$

Multiplicamos los dos miembros de esta ecuación por $\frac{d\zeta}{ds}$. Entonces, después de la integración, obtendremos,

$$\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2=4k^2\left(m^2-\operatorname{sen}^2\frac{\zeta}{2}\right), \qquad (14.9)$$

siendo m^2, una constante arbitraria.

Sustituyendo,

$$\operatorname{sen}\frac{\zeta}{2}=-m\operatorname{sen}\psi \qquad (14.10)$$

obtendremos para la ecuación (14.9)

$$\frac{d\zeta}{ds}=2km\cos\psi. \tag{14.11}$$

Derivando (14.10) respecto a s se obtiene,

$$\frac{d\zeta}{ds}=-2m\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\psi}}\frac{d\psi}{ds}$$

y eliminando $\frac{d\zeta}{ds}$,

$$k\,ds=-\frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\psi}}, \tag{14.12}$$

de donde resulta,

$$ks=-\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\psi}},$$

siendo ψ_0 el valor de la función ψ cuando $s=0$. Como en el origen de las coordenadas (para $s=0$) el momento flector es igual a cero, la curvatura será $\frac{d\zeta}{ds}=0$. Por lo tanto, de la expresión (14.11) se obtiene,

$$\cos\psi_0=0,\quad \psi_0=\frac{\pi}{2}$$

y entonces

$$ks=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\psi}}-\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\psi}}. \tag{14.13}$$

Las integrales obtenidas no se resuelven en funciones elementales y se denominan integrales elípticas del primer género. Existen tablas de estas integrales donde figuran los valores de las integrales en función del límite superior ψ y del módulo de la integral m *).

En el punto medio de la barra (cuando $s=\frac{l}{2}$) de la condición de simetría resulta que el ángulo $\zeta=0$. Por lo tanto, de acuerdo a la expresión (14.10), la función ψ se convierte aquí en cero. La expresión (14.13) será para este punto,

$$\frac{kl}{2}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\psi}}. \tag{14.14}$$

De acuerdo a esta expresión, el parámetro k no puede ser menor que cierta magnitud determinada, ya que la integral escrita obtiene el valor mínimo cuando $m=0$. Entonces,

$$\frac{kl}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}.$$

De acuerdo a la expresión (14.3) de aquí se obtiene el valor de la primera

*) Las tablas de las integrales elípticas figuran en los manuales de las funciones especiales. Véase, por ejemplo, I. Bronshtein, K. Semendiaev «*Manual de matemáticas*» para ingenieros y estudiantes, Editorial MIR, Moscú, 1971.

carga crítica,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Es decir, para que pueda existir la forma de equilibrio de la barra con el eje flexionado es necesario que la fuerza P sea mayor que la primera carga crítica. Al mismo tiempo esta forma no siempre es la única.

En el parágrafo anterior hemos visto que la barra puede flexionarse, no solamente según una semionda sino según dos, tres y n semiondas. Supongamos que la flexión ocurre con dos semiondas (fig. 489), entonces el ángulo ζ y, por lo tanto, la función ψ se convertirán en cero, cuando $s = \frac{l}{4}$. La ecuación (14.14) en este caso será,

$$\frac{kl}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}.$$

Para que se cumpla ahora esta ecuación, el parámetro k deberá ser mayor aún,

$$\frac{kl}{4} \geqslant \frac{\pi}{2}$$

y

$$P_{\text{crit}} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

De manera análoga se pueden obtener los valores siguientes de las fuerzas críticas que ya fueron hallados anteriormente.

El resultado obtenido se debe interpretar como sigue.

Mientras la fuerza P sea menor que la primera carga crítica, existirá una sola forma de equilibrio, la correspondiente al eje recto. Una vez que la fuerza P supere la primera carga crítica, a esta forma recta de equilibrio se le suma otra forma posible de equilibrio con el eje flexionado según una semionda. Si la fuerza supera la segunda carga crítica, la barra, en este caso tendrá tres formas de equilibrio: una con el eje recto, otra con el eje flexionado según una semionda y otra con el eje flexionado según dos semiondas. Cuando la fuerza supera la fuerza crítica n,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}$$

la barra adquiere ya $n+1$ formas de equilibrio.

Surge la pregunta siguiente: ¿cuáles de las formas indicadas son estables y cuáles no? Para contestar a esta pregunta se requiere un análisis más delicado que el anterior. Señalaremos por eso, sin demostración, que cuando la fuerza es menor que la primera carga crítica, la única forma rectilínea de equilibrio es estable. Cuando la fuerza es mayor que la primera carga crítica, resulta estable solamente la forma correspondiente a una semionda. Todas las formas restantes de equilibrio son inestables. Por eso, en la práctica, solamente tiene importancia la primera forma y la correspondiente carga crítica primera.

Determinemos ahora los desplazamientos que surgen en la barra esbelta. Del dibujo de la figura 490 se deduce que

$$dz = \cos\zeta\, ds, \quad dy = \operatorname{sen}\zeta\, ds,$$

o sea,

$$dz=\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{\zeta}{2}\right)ds=2\left(1-\text{sen}^2\frac{\zeta}{2}\right)ds-ds,$$

$$dy=2\,\text{sen}\,\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\,ds.$$

Recurriendo ahora a las expresiones (14.10) y (14.12) hallaremos,

$$dz=-\frac{2}{k}\sqrt{1-m^2\,\text{sen}^2\,\psi}\,d\psi-ds,\quad dy=\frac{2m}{k}\,\text{sen}\,\psi\,d\psi,$$

de donde se obtiene que las coordenadas del punto de la línea elástica de la barra flexionada serán,

$$z=-\frac{2}{k}\int_{\psi_0}^{\psi}\sqrt{1-m^2\,\text{sen}^2\,\psi}\,d\psi-s,\quad y=\frac{2m}{k}\int_{\psi_0}^{\psi}\text{sen}\,\psi\,d\psi.$$

Como $\psi_0=\frac{\pi}{2}$, obtendremos,

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{2}{k}\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-m^2\,\text{sen}^2\,\psi}\,d\psi-\int_0^{\psi}\sqrt{1-m^2\,\text{sen}^2\,\psi}\,d\psi\right]-s,\\ y&=\frac{2m}{k}\cos\psi.\end{aligned}\right\}\quad(14.15)$$

La coordenada y se considera aquí positiva puesto que esto no afecta el sentido del problema.

Las integrales que figuran en la primera ecuación (14.15) se denominan integrales elípticas de segundo género. Como en el caso de las integrales de primer género, existen amplias tablas de las integrales de segundo género. Las ecuaciones (14.15) nos dan, en forma paramétrica, la ecuación de la línea elástica de la barra flexionada.

El desplazamiento máximo y ocurre cuando $s=\frac{l}{2}$, siendo $\psi=0$. Así pues,

$$y_{max}=\frac{2m}{k}.\qquad(14.16)$$

Esta ecuación, conjuntamente con la ecuación (14.14), permite determinar y_{max} en función de la fuerza P. En efecto, fijando el valor de m, hallamos por las tablas el valor de la integral elíptica para los límites entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y después, según este valor de la ecuación (14.14), se obtiene el valor del parámetro

$$k=\sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Después de esto, de la ecuación (14.16), hallamos el valor de la flecha y_{max}. Formemos la tabla siguiente:

Tabla 11

m	0	0,087	0,173	0,259	0,342	0,423	0,500	0,574	0,643	0,707
$\frac{kl}{2}$	1,571	1,574	1,583	1,598	1,620	1,649	1,686	1,731	1,787	1,854
$\frac{P}{P_{crit}}=\left(\frac{kl}{2}\right)^2\frac{4}{\pi^2}$	1	1,004	1,015	1,035	1,064	1,102	1,152	1,215	1,294	1,393
$\frac{y_{max}}{l}=m:\frac{kl}{2}$	0	0,055	0,110	0,162	0,211	0,257	0,297	0,331	0,360	0,381

En el primer renglón de esta tabla figuran algunos valores del parámetro m, escogidos de manera tal que arcsen $m=5°$, $10°$, $15°$, . . . Esto resulta muy cómodo puesto que las integrales elípticas en la mayoría de los casos se dan en función del ángulo arcsen m y no en función del propio m.

El segundo renglón de la tabla contiene los valores de la integral elíptica, escogidos de las tablas de las funciones especiales. Según la expresión (14.14) esta integral es $\frac{kl}{2}$. En el tercer renglón figura la razón $\frac{P}{P_{crit}}$ que se obtiene según las notaciones (14.3) y (14.7). Por último, el cuarto renglón de la tabla

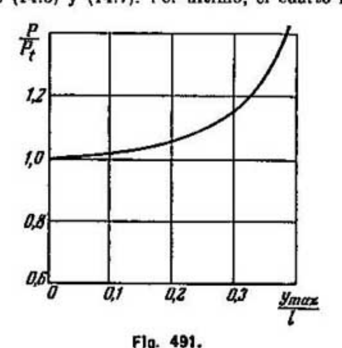


Fig. 491.

contiene la flecha y_{max} que se obtiene por la fórmula (14.16). En la figura 491 se da la curva

$$\frac{P}{P_{crit}}=f\left(\frac{y_{max}}{l}\right)$$

construida sobre la base de estos cálculos.

Entre la fuerza que actúa y las flechas se establece pues una relación bien determinada. A cada valor de la fuerza P le corresponde su flecha y_{max}. Observamos, al mismo tiempo, que cuando la fuerza es mayor que la crítica, el des-

plazamiento y_{max} crece con gran rapidez. Esto explica los inconvenientes que surgieron, al resolver el problema, suponiendo que los desplazamientos eran pequeños.

Comparando los resultados obtenidos nos convencemos de que el comportamiento del sistema en la zona supercrítica se puede estudiar solamente mediante las ecuaciones que describen las particularidades de los desplazamientos grandes. En lo que se refiere a la determinación de las propias fuerzas críticas, para este fin son suficientes las ecuaciones lineales comunes que se plantean para el caso de flechas pequeñas. Por eso, en adelante podemos con certeza determinar las fuerzas críticas por las fórmulas simplificadas sin recurrir al aparato complicado de las ecuaciones no lineales.

§ 92. Dependencia entre la fuerza crítica y las condiciones de apoyo de la barra

Cuando se trata de desplazamientos pequeños de la barra articulada en sus extremos, la flexión de ésta durante el pandeo ocurre según una semionda de sinusoide, resultando para la fuerza crítica,

$$P_{crit}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Aprovechando las particularidades de la línea elástica, resulta posible, con relativa facilidad, extender la solución obtenida a otros casos de apoyo de la barra. Así, por ejemplo, si la barra se empotra en un extremo y está libre en el otro (fig. 492), entonces la línea elástica de la barra podrá ser transformada en la línea elástica de una barra articulada, situando un espejo en el empotramiento. Es obvio que la fuerza crítica correspondiente a la barra de longitud l empotrada en un extremo será igual a la carga crítica correspondiente a una barra articulada de longitud $2l$.

Es decir, que en este caso,

$$P_{crit}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}.$$

La barra articulada que tiene un apoyo en el medio del vano (fig. 493), al perder la estabilidad, se flexiona según dos semiondas. Es decir, cada una de sus semiondas pierde la estabilidad de la misma forma que una barra articulada de longitud $l/2$. Por lo tanto,

$$P_{crit}=\frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}.$$

Generalizando las fórmulas obtenidas se puede hallar la expresión general de la fuerza crítica para la barra comprimida como sigue,

$$P_{crit}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \qquad (14.17)$$

siendo μ, el coeficiente que se denomina *coeficiente de reducción de la longitud*. Este número indica cuantas veces se debe aumentar la

longitud de la barra articulada para que su carga crítica sea igual a la correspondiente a la barra de longitud l con las condiciones de apoyo establecidas. En el caso de la barra empotrada en un extremo y libre en el otro $\mu=2$. En el caso de la barra de la figura 493, $\mu=\frac{1}{2}$.

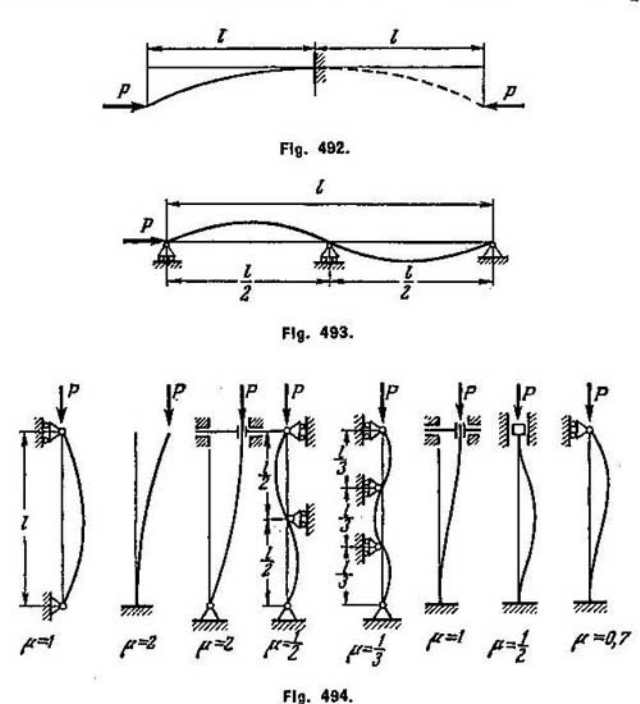


Fig. 492.

Fig. 493.

Fig. 494.

En la figura 494 están representados algunos tipos de empotramiento de la barra, así como también los valores correspondientes del coeficiente de reducción de la longitud μ. En todos los casos, excluyendo el último, el valor de μ se determina con la simple comparación de la línea elástica de la barra flexionada con la longitud de la semionda de la sinusoide correspondiente al caso de los apoyos articulados.

El último de los casos representados en la figura 494 se debe analizar aparte. En este caso, la línea elástica tiene dos puntos donde la

curvatura es nula: el punto A y el punto B (fig 495). A diferencia de los otros casos, estos puntos no se encuentran sobre una recta paralela a la línea de acción de la fuerza P. Por lo tanto, aquí aparece la fuerza cortante R (fig. 495) que, en los casos de apoyo analizados anteriormente, no figuraba.

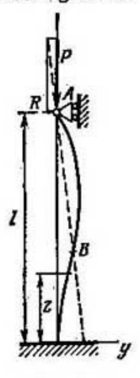


Fig. 495.

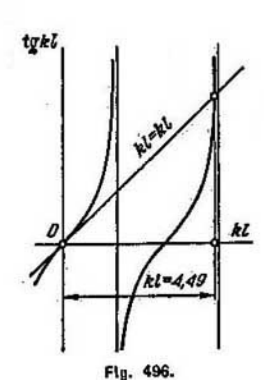


Fig. 496.

Planteamos la ecuación diferencial de la línea elástica de la barra flexionada. Está claro que,

$$EI\,y'' = -Py + R\,(l-z),$$

o sea,

$$y'' + k^2 y = \frac{R}{EI}(l-z),$$

de donde se obtiene,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \cos kz + \frac{R}{EI\,k^2}(l-z).$$

Las constantes C_1, C_2 y R se deben escoger de manera tal que se cumplan las siguientes condiciones de borde: cuando $z=0$, $y=0$ e $y'=0$, y cuando $z=l$ $y=0$. Escribimos las tres ecuaciones correspondientes a estas condiciones,

$$C_2 + \frac{Rl}{EI\,k^2} = 0, \qquad C_1 k - \frac{R}{EI\,k^2} = 0,$$

$$C_1 \operatorname{sen} kl + C_2 \cos kl = 0.$$

Existen ahora dos posibilidades.

1) El sistema tiene la solución $C_1 = C_2 = 0$, $R = 0$. Entonces $y \equiv 0$ y la barra permanecerá recta. Este caso no nos interesa.

2) Las constantes C_1, C_2 y R no son todas iguales a cero y, como resultado, la barra recibe desplazamientos transversales.

El sistema de ecuaciones homogéneas tiene solución que no es nula solamente en el caso cuando su determinante es igual a cero. Es decir, la condición necesaria para que la barra se flexione será,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{l}{EIk^2} \\ k & 0 & -\frac{1}{EIk^3} \\ \operatorname{sen} kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se obtiene,

$$\operatorname{tg} kl = kl. \quad (14.18)$$

Esta ecuación transcendental deberá ser resuelta con respecto a kl. La manera más fácil de resolverla es la forma gráfica, precisando después la solución por tanteos con las tablas de las funciones trigonométricas.

Representamos el gráfico de la función $\operatorname{tg} kl = f(kl)$ y la recta $kl = kl$ (fig. 496). Las abscisas de los puntos de intersección nos proporcionan las raíces de la ecuación en cuestión. La raíz mínima diferente de cero será,

$$kl = \sqrt{\frac{P}{EI}}\, l = 4{,}49.$$

Entonces,

$$P_{\text{crít}} = \frac{4{,}49^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0{,}7l)^2}.$$

Así pues, $\mu \approx 0{,}7$.

Para terminar, veamos algunos ejemplos más complicados de determinación de las fuerzas críticas.

Ejemplo 14.1. Determinar la fuerza crítica para la barra de dos tramos de rigidez diferente (fig. 497). La rigidez de un tramo es cuatro veces mayor que la del otro.

Para los tramos uno y dos obtenemos respectivamente las ecuaciones,

$$EI\, y_1'' + Py_1 = 0, \quad 4EI\, y_2'' + Py_2 = 0.$$

Anotando,

$$\frac{P}{4EI} = k^2$$

obtendremos,

$$y_1'' + 4k^2 y_1 = 0, \quad y_2'' + k^2 y_2 = 0,$$

de donde hallamos,

$$y_1 = C_1 \operatorname{sen} 2kz + C_2 \cos 2kz, \quad y_2 = C_3 \operatorname{sen} kz + C_4 \cos kz.$$

De la condición de que, cuando $z=0$ la flecha $y_1=0$ se obtiene $C_2=0$.

Disponemos de tres condiciones más: cuando $z = \frac{l}{2}$ los desplazamientos $y_1 = y_2$ e $y_1' = y_2'$ y cuando $z = l$, la flecha $y_2 = 0$. Planteamos las tres ecuaciones

correspondientes,

$$C_1 \operatorname{sen} kl = C_3 \operatorname{sen} \frac{kl}{2} + C_4 \cos \frac{kl}{2},$$

$$2C_1 \cos kl = C_3 \cos \frac{kl}{2} - C_4 \operatorname{sen} \frac{kl}{2},$$

$$C_3 \operatorname{sen} kl + C_4 \cos kl = 0.$$

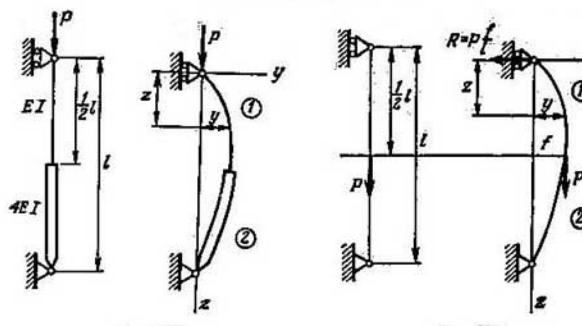


Fig. 497. Fig. 498.

Igualando a cero el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} kl & -\operatorname{sen} \frac{kl}{2} & -\cos \frac{kl}{2} \\ 2\cos kl & -\cos \frac{kl}{2} & \operatorname{sen} \frac{kl}{2} \\ 0 & \operatorname{sen} kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0,$$

se obtienen las dos ecuaciones siguientes,

$$\operatorname{sen} \frac{kl}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{kl}{2} = 2.$$

La raíz mínima diferente de cero se obtiene de la condición,

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \sqrt{2}, \quad \frac{kl}{2} = 0{,}955.$$

Así pues,

$$P_{\text{crit}} = \frac{14{,}6EI}{l^2}.$$

Ejemplo 14.2. Determinar la fuerza crítica para el caso de la barra articulada, solicitada por una fuerza axial en la sección media (fig. 498).

En este caso se obtiene para los tramos primero y segundo,

$$EIy_1'' = -P\frac{f}{l}z, \quad EIy_2'' = -P\frac{f}{l}z + P(f-y),$$

o sea,

$$y_1'' = -\frac{k^2 f}{l}z, \quad y_2'' + k^2 y_2 = k^2 f\left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

de donde hallamos

$$y_1 = -\frac{k^2 f}{l}\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2,$$

$$y_2 = C_3 \operatorname{sen} kz + C_4 \cos kz + f\left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

Cuando $z=0$ la flecha $y_1=0$ y, por lo tanto, $C_2=0$. Cuando $z=\frac{l}{2}$ los desplazamientos $y_1=f$, $y_2=f$ e $y_1'=y_2'$ y cuando $z=l$ la flecha $y_2=0$. Así pues, llegamos a las cuatro ecuaciones siguientes,

$$-\frac{k^2 f}{l}\frac{l^3}{48} + C_1\frac{l}{2} = f,$$

$$C_3 \operatorname{sen}\frac{kl}{2} + C_4 \cos\frac{kl}{2} + \frac{1}{2} f = f,$$

$$-\frac{k^2 f l}{8} + C_1 = C_3 k \cos\frac{kl}{2} - C_4 k \operatorname{sen}\frac{kl}{2} - \frac{f}{l},$$

$$C_3 \operatorname{sen} kl + C_4 \cos kl = 0.$$

Igualamos a cero el determinante de este sistema, considerando C_1, C_3, C_4 y f como incógnitas. Entonces,

$$\begin{vmatrix} \frac{l}{2} & 0 & 0 & -1-\frac{k^2 l^2}{48} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{kl}{2} & \cos\frac{kl}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -k\cos\frac{kl}{2} & k\operatorname{sen}\frac{kl}{2} & \frac{1}{l}-\frac{k^2 l}{8} \\ 0 & \operatorname{sen} kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se obtiene,

$$\operatorname{tg}\frac{kl}{2} = \frac{3\frac{kl}{2}}{\left(\frac{kl}{2}\right)^2 - 9}.$$

La raíz mínima de esta ecuación será,

$$\frac{kl}{2} = 2{,}16$$

y entonces,

$$P_{\text{crit}} \approx \frac{18{,}7EI}{l^2}.$$

Ejemplo 14.3. Determinar la fuerza crítica para la barra empotrada, en cuyo extremo libre se transmite la fuerza P a través de una biela rígida de longitud a (fig. 499).

Retiramos la biela rígida y aplicamos a la barra elástica la fuerza longitudinal $P' \approx P$ y la fuerza cortante $P\frac{f}{a}$. Entonces,

$$EIy'' = P(f-y) + P\frac{f}{a}(l-z),$$

o

$$y'' + k^2 y = k^2 f\left(1 + \frac{l}{a} - \frac{z}{a}\right),$$

de donde se obtiene,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \cos kz + f\left(1 + \frac{l}{a} - \frac{z}{a}\right).$$

Tenemos además las condiciones de borde siguientes: cuando $z=0$, $y=0$ e $y'=0$ y cuando $z=l$, $y=f$.

Así obtenemos tres ecuaciones

$$C_2 + f\left(1 + \frac{l}{a}\right) = 0, \quad C_1 k - f\frac{1}{a} = 0, \quad C_1 \operatorname{sen} kl + C_2 \cos kl = 0.$$

Fig. 499.

Igualando a cero el determinante de este sistema llegamos a la ecuación transcendental siguiente:

$$\operatorname{tg} kl = kl\left(1 + \frac{a}{l}\right),$$

de la que se determina la fuerza crítica en función de la razón $\frac{a}{l}$. En el caso particular, cuando $a=0$, obtenemos, la ecuación (14.18) y cuando $a=\infty$, la fuerza crítica resulta

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

lo que fue obtenido anteriormente para la barra empotrada en un extremo.

§ 93. Estabilidad de la barra en el caso de deformaciones plásticas

Todos los problemas analizados anteriormente fueron resueltos, suponiendo que el material de la barra, durante la compresión, no adquiere deformaciones plásticas. Esto era válido en el caso de barras relativamente largas y finas en las que las tensiones de compresión en el caso de cargas críticas, no superaban el límite de proporcionalidad. En el caso de barras más cortas y rígidas, la fuerza crítica resulta superior, existiendo la posibilidad del surgimiento de deformaciones plásticas en la etapa de compresión simple, es decir, antes de la pérdida de la estabilidad. Se obtiene así un problema intermedio. Por una parte, este no es el cálculo común por compresión, puesto que la barra es suficientemente larga y mantiene en su comportamiento las particularidades relacionadas con el fenómeno de la

pérdida de la estabilidad. Por otra, esto no es ya el cálculo de la estabilidad según Euler, puesto que en el material de la barra surgen deformaciones plásticas

Volvamos a la expresión de la fuerza crítica (14.17),

$$P_{crit}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}.$$

La tensión crítica será

$$\sigma_{crit}=\frac{P_{crit}}{F}=\frac{\pi^2Ei^2}{(\mu l)^2}, \tag{14.19}$$

siendo i el radio de giro de la sección,

$$i^2=\frac{I_{min}}{F}. \tag{14.20}$$

La magnitud $\frac{\mu l}{i}$ se designa por λ,

$$\frac{\mu l}{i}=\lambda, \tag{14.21}$$

y se denomina *esbeltez* de la barra. La expresión (14.19) de la tensión crítica será entonces,

$$\sigma_{crit}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}. \tag{14.22}$$

Como vemos, la tensión σ_{crit} crece a medida que disminuye la esbeltez de la barra. La fórmula de Euler deja de ser válida cuando la tensión σ_{crit} alcanza el límite de proporcionalidad σ_p. De la expresión (14.22) se determina la esbeltez límite

$$\lambda_{lim}=\frac{\pi^2E}{\sigma_p}.$$

Cuando la esbeltez de la barra es menor que λ_{lim}, la fórmula de Euler no es aplicable y, por lo tanto, el problema de la estabilidad de la barra requiere un planteamiento especial.

Supongamos que la fuerza axial de compresión origina en la barra la tensión σ_0 (punto A de la figura 500). Si flexionamos ahora la barra, variará la tensión en la sección transversal. Supongamos que esta variación es $\Delta\sigma$. Esta magnitud será distinta en los distintos puntos de la sección. En la parte cóncava las tensiones de compresión crecen y la relación entre la variación de la tensión y la variación del alargamiento estará dada por la curva correspondiente al proceso de carga, es decir, por el tramo de la curva desde el punto A hacia arriba (fig. 500). Cuando la variación de la tensión es pequeña esta curva se puede sustituir por la recta AB. Entonces,

$$\Delta\sigma=E'\Delta\varepsilon.$$

siendo $\Delta\varepsilon$, la variación del alargamiento y E', el módulo local que depende de la tensión σ_0 y del tipo de diagrama de compresión. En los puntos situados en la parte convexa de la barra flexionada tiene

lugar una descarga (recta AC de la figura 500) y aquí,

$$\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon,$$

siendo E el módulo de elasticidad. De acuerdo con la hipótesis de las secciones planas se puede escribir,

$$\Delta\varepsilon = \frac{y}{\rho},$$

donde y se mide desde la línea neutra. Esta última, claro está, debido a que los módulos correspondientes a la carga adicional y a la descarga son distintos, no es en realidad central (fig. 501).

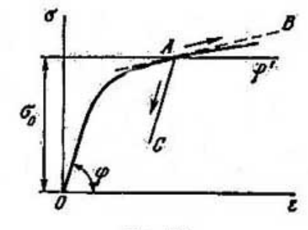


Fig. 500.

Para las zonas de carga adicional y descarga se obtiene respectivamente,

$$\Delta\sigma = E'\frac{y}{\rho}, \quad \Delta\sigma = E\frac{y}{\rho}. \tag{14.23}$$

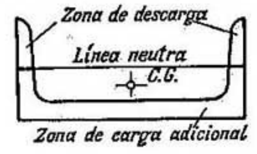
En el caso de una curvatura pequeña de la barra la fuerza normal en la sección transversal permanece constante y, por lo tanto,

$$\int_F \Delta\sigma\, dF = 0,$$

ó, de acuerdo a la expresión (14.23)

$$E'S_1 = ES_2, \tag{14.24}$$

siendo S_1 y S_2 los momento estáticos de las zonas de carga adicional y de descarga (fig. 501) respecto a la línea neutra. Cuando está dada



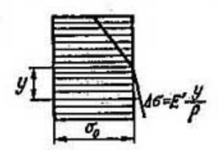


Fig. 501.

la tensión σ_0, y por lo tanto, también E', de esta ecuación, por tanteos sucesivos, se determina la posición de la línea neutra.

Determinamos ahora el momento de las tensiones suplementarias,

$$\Delta M = \int_F \Delta\sigma y\, dF = \frac{1}{\rho}(I_1E' + I_2E)$$

Aquí se entiende por I_1 e I_2 los momentos de inercia de las zonas de carga adicional y de descarga respecto a la línea neutra.

Escribamos la expresión obtenida como sigue,

$$\Delta M = \frac{E_{red} I}{\rho}, \tag{14.25}$$

siendo I, el momento de inercia de toda la sección respecto a la línea neutra y

$$E_{red} = \frac{I_1 E' + I_2 E}{I}. \tag{14.26}$$

Esta magnitud se denomina módulo de elasticidad reducido o *módulo de Karman*. Cuando el material de la barra se deforma elásticamente, la línea neutra coincide con la central, $I_1 + I_2 = I$ y $E' = E$. En este caso $E_{red} = E$ y, así pues, la fórmula (14.25) coincidirá con la fórmula común para la flexión elástica de la viga.



Fig. 502.

En el caso de una sección asimétrica, como la que se analiza, no es lo mismo a qué lado de la línea neutra se sitúa la zona de carga adicional y la zona de descarga. Esto quiere decir que las flexiones de la columna en una u otra dirección no son igualmente probables. Para hallar en qué dirección ocurre la flexión es necesario, después de determinar E_{red}, cambiar de lugar las zonas de carga adicional y de descarga y repetir de nuevo los cálculos. Se debe escoger el menor de los dos valores de E_{red} obtenidos.

Las expresiones (14.24) y (14.26) adquieren la forma más simple en el caso de una barra de sección rectangular (fig. 502). Designando por e la distancia desde la línea neutra hasta el centro de gravedad, obtendremos la ecuación (14.24) en la forma siguiente,

$$E'\left(\frac{h}{2} + e\right)^2 = E\left(\frac{h}{2} - e\right)^2.$$

Como

$$I_1 = \frac{b\left(\frac{h}{2} + e\right)^3}{3}, \quad I_2 = \frac{b\left(\frac{h}{2} - e\right)^3}{3}, \quad I = \frac{bh^3}{12},$$

la expresión (14.26), después de eliminar la magnitud de e, será,

$$E_{red} = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}. \tag{14.27}$$

La estructura de la fórmula (14.25) que une la curvatura de la barra con el momento flector sigue siendo, como vemos, la misma que

en el caso de la barra que trabaja en el dominio de las deformaciones elásticas. La diferencia consiste solamente en que el módulo de elasticidad E se sustituye por el módulo reducido E_{red}. Por lo tanto, todas las expresiones para las fuerzas críticas que fueron obtenidas anteriormente, suponiendo que las deformaciones eran elásticas, se mantienen también en el caso de las deformaciones plásticas bajo la condición de que E se sustituya por E_{red}.

Así pues,

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E_{red} I}{(\mu l)^2}.$$

En lugar de la expresión (14.22) se obtiene la ecuación

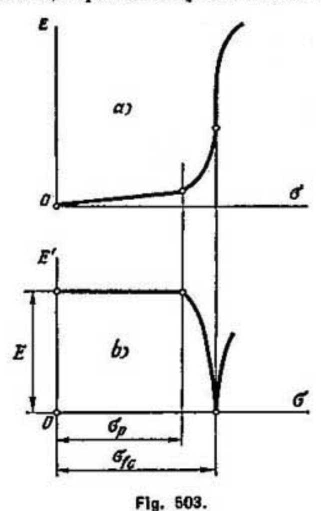


Fig. 503.

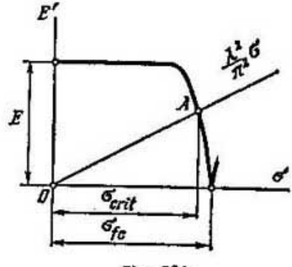


Fig. 504.

transcendental

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E_{red}}{\lambda^2}. \tag{14.28}$$

La magnitud de E_{red} depende aquí del módulo E' tangencial y éste, a su vez, depende de σ_{crit}. Así pues, la magnitud de la tensión crítica varía en función del tipo de diagrama y de la forma de la sección transversal.

Veamos la solución gráfica de esta ecuación.

En la figura 503, *a* está representado el diagrama de compresión del material que tiene escalón de fluencia. Para mayor comodidad de las construcciones posteriores, este diagrama está invertido, es decir, sobre el eje de las abcisas se ubica la tensión σ y sobre él de las ordenadas, el alargamiento ε. De acuerdo a este diagrama, en la figura 503, *b* se construye el diagrama de la variación del módulo tangencial

$$E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = f(\sigma).$$

Hasta el límite de proporcionalidad, es decir, cuando $\sigma<\sigma_p$, $E'=E$. Cuando $\sigma=\sigma_{fc}$, E' se hace igual a cero.

El mismo carácter tiene el diagrama de la variación del módulo reducido $E_{red}=f(\sigma)$ (fig. 504). El aspecto de la curva en el tramo $\sigma_p<\sigma<\sigma_{fc}$ puede variar algo según sea la configuración de la sección.

Escribamos la expresión (14.28) como sigue,

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2}\sigma_{crit}=E_{red}$$

y tracemos sobre el diagrama (fig. 504) la recta

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2}\sigma=f(\sigma).$$

La abscisa del punto de intersección de esta recta con la curva $E_{red}=f(\sigma)$ nos da, claro está, el valor de la tensión crítica σ_{crit}. La inclinación de la recta varía en función de la esbeltez λ. Cuando λ es suficientemente pequeña, es decir, en el caso de columnas muy cortas, el

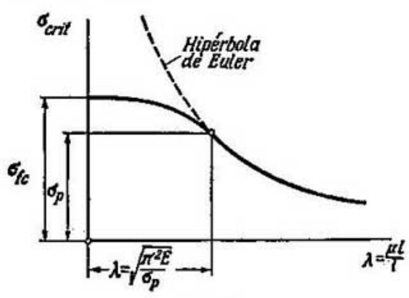


Fig. 505.

punto A (fig. 504) se desplaza hacia abajo y $\sigma_{crit}=\sigma_{fc}$. En este caso el cálculo por estabilidad se sustituye por el cálculo común por compresión, partiendo del límite de fluencia. Cuando la esbeltez λ es suficientemente grande, el punto de intersección A se situará sobre el tramo horizontal de la curva $E_{red}=f(\sigma)$. Esto indica que la barra trabaja en el dominio de las deformaciones elásticas y que aquí el estado crítico se determina según Euler. Las expresiones (14.22) y (14.28) abarcan ahora toda la zona de los valores de la esbeltez λ que realmente se pueden dar, partiendo de cero.

El diagrama de la reación entre σ_{crit} y λ está representado en la figura 505. La parte derecha de la curva se determina por la expresión (14.22) y se denomina generalmente hipérbola de Euler. La parte izquierda de la curva, cuando

$$\lambda<\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

se construye sobre la base de la solución de la ecuación trascendental (14.28).

Designamos

$$\frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{fc}}=\varphi,$$

entonces

$$\sigma_{crit}=\varphi\sigma_{fc}.$$

La tensión admisible será,

$$[\sigma]_{crit}=\varphi\,[\sigma]_c.$$

Por lo tanto, el cálculo de la estabilidad de la barra se puede sustituir por el cálculo común basado sobre el límite de fluencia, pero con una tensión admisible reducida. En lugar de la tensión admisible $[\sigma]_c$ se escoge la tensión admisible $\varphi[\sigma]_c$. La magnitud φ se denomina *coeficiente de reducción de la tensión admisible*. Este coeficiente disminuye, al crecer la esbeltez.

Conviene calcular previamente el valor del coeficiente φ para los materiales más frecuentes hallando, en la zona de transición, la influencia media de la forma de la sección transversal, y ubicar estos valores en la tabla. Más abajo se da esta tabla que se admite en la práctica del diseño de estructuras metálicas y de madera.

Tabla 12

λ	Cт. 2, Cт. 3, Cт. 4.	Cт. 5	Hierro fundido	Madera	λ	Cт. 2, Cт. 3, Cт. 4.	Cт. 5	Hierro fundido	Madera
0	1,00	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	—	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,36	—	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	—	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	—	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	—	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	—	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	—	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	—	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	—	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	—	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					

Veamos algunos ejemplos del cálculo de columnas comprimidas, basándonos en el coeficiente de reducción φ.

Ejemplo 14.4. Determinar la carga de compresión admisible para la barra articulada. La longitud de la barra $l=2$ m. La sección transversal es un perfil doble te N° 30a (véase la tabla del apéndice), $i_{min}=2{,}95$ cm, $F=49{,}9$ cm². El material es Cт. 2. La tensión admisible a compresión $[\sigma]_c=2\,000$ kgf/cm².

Calculamos la esbeltez

$$\frac{\mu l}{i}=\frac{200}{2{,}95}=67{,}8.$$

Por la tabla 12 obtenemos $\varphi=0{,}82$. Calculamos después la carga admisible

$$\frac{P}{F}=[\sigma]_c\cdot\varphi, \quad P=82\,000 \text{ kgf}.$$

Ejemplo 14.5. Calcular las dimensiones de la sección transversal de la columna empotrada en un extremo y libre en el otro y solicitada en este último extremo por la fuerza $P=2$ tf. Dado que la longitud de la columna es $l=1$ m, el material es madera, la tensión admisible $[\sigma]_c=200$ kgf/cm². La sección transversal es cuadrada de lado a.

El problema se resuelve por tanteos consecutivos puesto que no se conoce la esbeltez de la barra. Si la barra fuese muy corta, el tamaño a se determinaría de la relación común,

$$\frac{P}{a^2}=[\sigma]_c, \quad a^2=\frac{2\,000}{200}, \quad a=3{,}16 \text{ cm}.$$

Fijamos ahora algunos valores de a mayores que 3,16 cm y calculamos la esbeltez λ,

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2l}{\sqrt{\frac{I}{F}}}=\frac{2l\sqrt{12}}{a}.$$

Después, como en el ejemplo anterior, hallamos la carga admisible P para los diferentes valores de a. El valor de a al que corresponda una carga igual a la carga dada (2 tf) será el que se busca. En el problema en cuestión resulta $a=6{,}3$ cm.

§ 94. Estabilidad de la forma plana en la flexión

Hasta aquí analizábamos solamente los problemas relacionados con la estabilidad de las barras comprimidas. Pasemos ahora al análisis de los problemas más simples de la estabilidad de la forma plana de la flexión.

Es bien conocido que, en algunos casos, la forma plana de la flexión de la barra se hace inestable. Al perder la estabilidad ocurre la flexión en el segundo plano y simultáneamente ocurre también la torsión. Este fenómeno se observa con la mayor claridad en las vigas que tienen gran rigidez en el plano de acción de las fuerzas exteriores y rigidez pequeña en el otro plano principal.

Veamos la viga (fig. 506) solicitada en sus extremos por momentos que actúan en el plano vertical. Consideramos que las condiciones de apoyo en los extremos de la viga permiten el libre giro de la sección tanto en un plano como en el otro, pero, al mismo tiempo, impiden el giro correspondiente a la torsión. La rigidez en el plano de los momentos dados exteriores se considera suficientemente grande. Esto permite considerar que, antes de perder la estabilidad, la barra mantiene esencialmente la forma rectilínea.

Supongamos que la barra simultáneamente se flexiona en el plano perpendicular al plano de los momentos $\mathfrak{M}$ y se torsiona. En la figura 506 la forma de la barra flexionada está representada de manera tal que el desplazamiento y, su primera y segunda derivadas son positivas. Esto evita el error en los signos, al plantear las ecuaciones.

En una sección arbitraria situada a la distancia z del extremo izquierdo, el momento respecto al eje x_1 (fig. 506) será,

$$M_{\text{flec}} = -\mathfrak{M}\varphi,$$

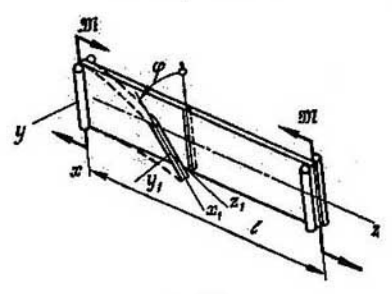


Fig. 506.

siendo φ, el ángulo de giro de la sección que se analiza respecto al eje z. El signo negativo indica que el momento M_{flec} se orienta de manera que disminuye la curvatura.

El momento torsor en la misma sección será,

$$M_t = +\mathfrak{M}y' + \mathfrak{M}_0,$$

siendo $\mathfrak{M}y'$, la componente del momento $\mathfrak{M}$ respecto al eje z_1 (fig. 506) y $\mathfrak{M}_0$, el momento respecto al eje z en los apoyos.

Recurriendo a las relaciones conocidas

$$EIy'' = M_{\text{flec}}, \quad GI_t\theta = GI_t\varphi' = M_t,$$

se obtienen las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$EIy'' = -\mathfrak{M}\varphi, \quad GI_t\varphi' = \mathfrak{M}y' + \mathfrak{M}_0. \tag{14.29}$$

Aquí por EI se entiende la rigidez de la barra a la flexión en la dirección perpendicular al plano de acción de los momentos exteriores $\mathfrak{M}$. GI_t es la rigidez a la torsión.

Eliminamos de estas ecuaciones φ. Entonces

$$y''' + k^2y' = -k^2\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}},$$

siendo

$$k^2 = \frac{\mathfrak{M}^2}{GI_tEI}. \tag{14.30}$$

Resolviendo la ecuación obtenida hallaremos,

$$y = C_1 + C_2 \operatorname{sen} kz + C_3 \cos kz - \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}} z. \tag{14.31}$$

De la primera ecuación (14.29) determinamos el ángulo φ,

$$\varphi=\frac{EIk^2}{\mathfrak{M}}(C_2\operatorname{sen}kz+C_3\cos kz). \qquad (14.32)$$

Las constantes C_1, C_2, C_3 y $\mathfrak{M}_0$ deberán escogerse ahora de manera tal que las funciones y y φ cumplan las condiciones de borde siguientes,

$$\text{cuando } z=0 \quad y=0 \text{ y } \varphi=0,$$
$$\text{cuando } z=l \quad y=0 \text{ y } \varphi=0.$$

Así pues, obtendremos,

$$C_1+C_3=0,\ C_3=0,\ C_2\operatorname{sen}kl-\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}}l=0,\quad C_2\operatorname{sen}kl=0.$$

De aquí se deduce que en todos los casos $C_1=C_3=0$, $\mathfrak{M}_0=0$. La magnitud C_2 se puede diferenciar de cero solamente cuando

$$\operatorname{sen}kl=0.$$

El primer valor del momento crítico se obtiene de la condición,

$$kl=\pi.$$

De acuerdo a la expresión (14.30) hallamos,

$$\mathfrak{M}_{\text{crit}}=\frac{\pi}{l}\sqrt{EI\cdot GI_t}.$$

Las ecuaciones (14.31) y (14.32) serán

$$y=C_2\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l},\quad \varphi=\frac{\mathfrak{M}}{GI_t}C_2\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}.$$

Así pues, los desplazamientos transversales y los ángulos de giro varían a lo largo del eje de la barra según una sinusoide (fig. 507, a).

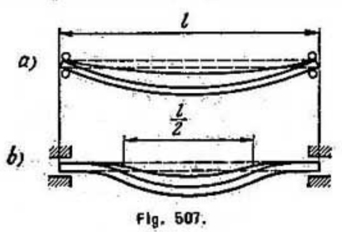


Fig. 507.

Empleando el método de la reducción de la longitud, como se hizo en el caso de las barras comprimidas, se puede demostrar que en el caso de los extremos empotrados (fig. 507, b) el momento crítico será,

$$\mathfrak{M}_{\text{crit}}=\frac{2\pi}{l}\sqrt{EI\cdot GI_t}.$$

El problema de la estabilidad de la forma plana de la flexión en el caso de solicitación de la viga por fuerzas cortantes transversales resulta bastante más complicado que el analizado anteriormente, puesto que el momento flector en el plano de solicitación varía a lo largo del eje de la barra.

§ 95. Estabilidad de aros y tubos solicitados por presión externa

Veamos el problema de la estabilidad del anillo comprimido por una carga radial uniformemente distribuida de intensidad q (fig. 508). Para cierto valor de esta carga la forma circular del anillo resulta inestable y el anillo se flexiona adquiriendo aproximadamente la forma de una elipse (fig. 508).

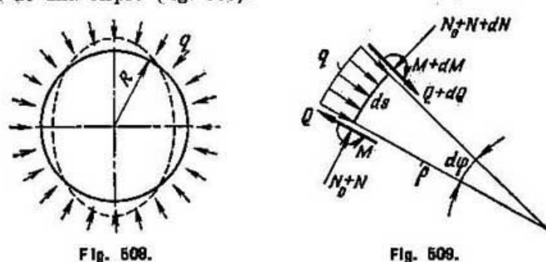


Fig. 508. Fig. 509.

Separemos del anillo flexionado un tramo elemental de longitud ds (fig. 509). El radio local de curvatura se designa por ρ. Consideraremos que esta magnitud en poco se diferencia del radio inicial de curvatura R.

En las secciones transversales del anillo flexionado surgen fuerzas normales y momentos flectores. La fuerza normal se considera compuesta de dos partes: del sumando N_0, es decir, de la fuerza que aparece en las secciones transversales del anillo antes de perder la estabilidad y del sumando N que constituye una pequeña variación de la fuerza normal originada por la flexión del anillo.

Así pues, la fuerza normal será N_0+N. De la condición de equilibrio, antes de perder la estabilidad, se deduce que

$$N_0=qR. \tag{14.33}$$

Planteamos ahora la condición de equilibrio para el elemento flexionado (fig. 509). Proyectando todas las fuerzas sobre la dirección de la normal obtendremos,

$$q\,ds+dQ-(N_0+N)\frac{ds}{\rho}=0$$

o, teniendo en cuenta la expresión (14.33),

$$q\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{R}\frac{dQ}{ds}-\frac{N}{\rho R}=0.$$

Designamos la variación de la curvatura por $\varkappa$,

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}=\varkappa. \qquad (14.34)$$

Como $\rho \approx R$ obtendremos,

$$-q\varkappa+\frac{1}{R}\frac{dQ}{ds}-\frac{N}{R^2}=0.$$

Planteamos dos ecuaciones más de equilibrio,

$$\frac{Q}{R}+\frac{dN}{ds}=0,$$

$$\frac{dM}{ds}+Q=0.$$

De las tres ecuaciones de equilibrio excluimos Q y N. Entonces,

$$q\frac{d\varkappa}{ds}+\frac{1}{R}\frac{d^3M}{ds^3}+\frac{1}{R^3}\frac{dM}{ds}=0$$

o después de integrar,

$$q\varkappa+\frac{1}{R}\frac{d^2M}{ds^2}+\frac{1}{R^3}M=C_1. \qquad (14.35)$$

Pero el momento M está unido a la variación de la curvatura (14.34) por la conocida relación,

$$M=EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)=EI\varkappa.$$

Eliminando en (14.35) el momento M se obtiene una ecuación con una incógnita $\varkappa$,

$$\frac{d^2\varkappa}{ds^2}+k^2\varkappa=C_1\frac{R}{EI}, \qquad (14.36)$$

siendo

$$k^2=\frac{1}{R^2}+\frac{qR}{EI}. \qquad (14.37)$$

Resolvemos la ecuación (14.36),

$$\varkappa=C_1\frac{R}{k^2EI}+C_2\operatorname{sen} ks+C_3\cos ks. \qquad (14.38)$$

En el caso del anillo cerrado la carga crítica se obtiene con la máxima facilidad de la condición de periodicidad de la solución (14.38). En efecto, si la variable s recibe un incremento igual a la longitud total del arco del anillo, es decir, $2\pi R$, la función $\varkappa$ deberá permanecer invariable. Pero para ello es necesario que ks varíe en una magnitud múltiple de 2π. Así pues,

$$k(s+2\pi R)-ks=2\pi n,$$

siendo n un número entero arbitrario. Entonces,

$$kR=n.$$

De acuerdo a (14.37) se obtiene,

$$q_{\text{crit}}=\frac{(n^2-1)EI}{R^3}. \qquad (14.39)$$

El valor mínimo de $q_{crít}$ diferente de cero se obtiene para $n=2$.

$$q_{crít}=\frac{3EI}{R^3}. \qquad (14.40)$$

En este caso la curvatura $\varkappa$, al dar una vuelta al anillo, recibe una variación de dos períodos completos, como se ve de la figura 508. El anillo se flexiona con cuatro semiondas, adquiriendo la forma semejante a una elipse.

Si se refuerza el anillo con un número par $2n$ ($n>2$), de apoyos equidistantes (fig. 510), entonces la flexión ocurrirá con $2n$ semiondas y el valor crítico de q se determinará por la expresión (14.39) correspondientes al valor dado de n.

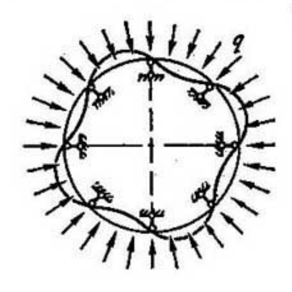


Fig. 510.

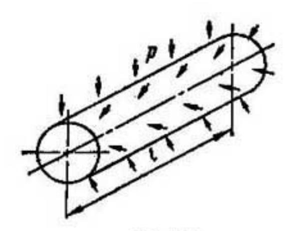


Fig. 511.

Los resultados obtenidos para el anillo se extienden sin dificultad, al caso de tubos largos solicitados por una presión exterior p (fig. 511). En el caso dado $q=pl$ y la rigidez de la bóveda a la flexión será $\frac{Eh^3l}{12(1-\mu^2)}$. Así pues,

$$p_{crít}=\frac{(n^2-1)\,Eh^3}{12\,(1-\mu^2)\,R^3}.$$

El problema de la determinación de la presión crítica, en el caso de una bóveda corta, cuando se flexiona la generatriz del cilindro, resulta más difícil, como también la determinación de la carga crítica para los anillos abiertos, es decir, para los arcos.

§ 96. Método energético de determinación de las cargas críticas

Anteriormente, las cargas críticas se determinaron, resolviendo las ecuaciones diferenciales de la línea elástica de la viga. Este método no siempre es cómodo y, en algunos casos, conduce a dificultades insuperables en los cálculos. Por eso, al resolver muchos problemas, se prefieren los métodos aproximados de determinación de las cargas

críticas que son menos exactos, pero más simples. Entre estos métodos el más difundido es el método energético.

Supongamos que la barra (fig. 512) se comprime por la fuerza P menor que la crítica. En este caso la barra se encuentra en posición estable de equilibrio. Se la puede flexionar, aplicándola una carga transversal (fuerza P_1). Al pasar la barra de la forma recta de equilibrio a la curvilínea, las fuerzas P y P_1 realizarán cierto trabajo y, como resultado, aumentará la energía potencial de la flexión. El balance energético del sistema puede plantearse de acuerdo a la ecuación siguiente,

$$U_{\text{flex}} = P\lambda + A(P_1), \tag{14.41}$$

siendo $A(P_1)$, el trabajo de la fuerza transversal P_1 y λ, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza axial. En el producto

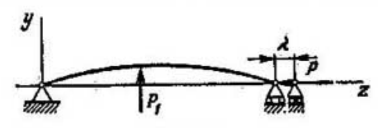


Fig. 512.

$P\lambda$ no figura el coeficiente 1/2, a diferencia de los casos analizados anteriormente, puesto que, durante el desplazamiento λ, la fuerza P permanece constante.

Igual energía de la flexión U_{flex} se puede obtener para distintas combinaciones de P y P_1. De la ecuación (14.41) se ve que cuando U_{flex} es constante, a un valor mayor de P corresponde un valor menor de la fuerza transversal P_1. Es posible, claro está, el caso cuando el paso de la forma rectilínea de equilibrio a la curvilínea ocurre sin aplicar fuerzas transversales suplementarias. Como sabemos esto tiene lugar para el valor crítico de la fuerza axial. La ecuación (14.41) en este caso será,

$$U_{\text{flex}} = P_{\text{crit}}\lambda. \tag{14.42}$$

En los sistemas comunes, por ejemplo, en la flexión de la viga, las cargas transversales realizan cierto trabajo sobre las flechas que son desplazamientos pequeños de primer orden. La expresión (14.32) tiene la particularidad de que considera el trabajo de las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos pequeños de segundo orden λ. Esta particularidad es característica para los problemas relacionados con el fenómeno de la pérdida de estabilidad.

Expresemos U_{flex} y λ por los desplazamientos transversales de la barra y (fig. 513). La energía de la flexión se expresa por el momento flector como sigue,

$$U_{\text{flex}} = \int_0^l \frac{M_{\text{flec}}^2\, dz}{2EI}.$$

Teniendo en cuenta que $M_{flex} = EIy''$ obtendremos

$$U_{flex} = \frac{1}{2} \int_0^l EIy''^2 \, dz. \qquad (14.43)$$

El desplazamiento λ se puede determinar como la diferencia entre la longitud l y la proyección de la línea elástica flexionada sobre la recta que une los apoyos Está claro (fig. 513) que

$$d\lambda = dz - dz \cos \vartheta \approx \frac{\vartheta^2}{2} dz.$$

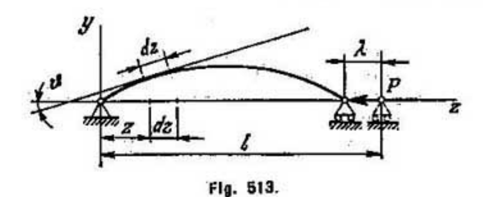


Fig. 513.

En el caso de flechas pequeñas $\vartheta = y'$ y, por lo tanto,

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 \, dz. \qquad (14.44)$$

Así pues, de la expresión (14.42) obtendremos

$$P_{crit} = \frac{\int_0^l EIy''^2 \, dz}{\int_0^l y'^2 \, dz}. \qquad (14.45)$$

Si se conoce la función y, entonces sin dificultad se determina P_{crit}. Por ejemplo, en el caso de la barra articulada (fig. 513), como sabemos ya,

$$y = C \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

Una vez introducido y en la expresión (14.45) obtendremos el valor ya conocido,

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

En realidad, la función y permanece desconocida hasta que no sea resuelta la ecuación diferencial de la línea elástica. Resulta que para determinar la fuerza crítica es necesario volver al método de solución anterior.

Sin embargo, la función y puede ser dada de manera aproximada. En este caso, los errores que se cometen al fijar la configuración de la línea elástica, influyen poco sobre la magnitud de la fuerza crítica. Por lo tanto, se puede obtener una solución suficientemente exacta, fijando la función y sobre la base de consideraciones físicas simples, es decir, «acertando» aproximadamente la forma de la línea elásica.

Supongamos que no se sabe que la barra articulada en los extremos, al perder la estabilidad, se flexiona según una semionda de la sinusoide. Fijamos otra curva «parecida» a aquella. Supongamos que, por ejemplo, la barra se flexiona según el arco de la parábola

$$y = Cz\,(l - z). \tag{14.46}$$

Al escoger la función debemos, claro está, garantizar que se cumplan las condiciones de borde. En nuestro caso, cuando $z=0$ y $z=l$, el desplazamiento y se hace nulo y se cumplen, pues, las condiciones de borde. Al mismo tiempo, se debe advertir que la función escogida no es muy exacta puesto que $y''=\text{const}$, lo que quiere decir que la curvatura de la barra, al perder la estabilidad, es constante, mientras que en realidad adquiere su valor máximo en el centro y es nula en los extremos de la barra.

Veamos, sin embargo, el resultado que nos da el método aproximado en este caso. Introduciendo la función admitida (14.46) en la expresión (14.45) obtendremos,

$$P_{\text{crit}} = \frac{12EI}{l^2} \text{ en lugar de } \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Como vemos, incluso esta aproximación tosca conduce a un error que no es tan grande.

La exactitud de la solución puede aumentar considerablemente, si se tiene en consideración el carácter de la variación del momento flector a lo largo de la barra. Se puede, por ejemplo, admitir que lo que varía según la parábola cuadrática no es la flecha, sino la curvatura. Entonces,

$$y'' = Cz\,(l - z).$$

Una vez integrada la expresión,

$$y' = C\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} + a\right).$$

Escogemos la constante a de manera tal que y' sea igual a cero en el medio de la barra. Entonces,

$$y' = \frac{1}{12}C\,(6lz^2 - 4z^3 - l^3).$$

Introducimos y' e y'' en la expresión (14.45) y, después de integrar, obtendremos,

$$P_{\text{crit}} = \frac{168}{17}\frac{EI}{l^2},$$

resultado que se diferencia del valor exacto de la fuerza crítica solamente en la tercera cifra.

Si volvemos al ejemplo bastante voluminoso 14.2, incluso en este caso se puede, con relativa facilitad, obtener el valor de la fuerza crítica por el método energético. Como la fuerza está aplicada en el medio de la barra (fig. 498), la integración de la magnitud λ (14.44) deberá realizarse entre los límites $\frac{l}{2}$ y l, obteniendo, en lugar de la expresión (14.45), la siguiente,

$$P_{crit}=\frac{\int\limits_0^l EIy''^2\,dz}{\int\limits_{l/2}^l y'^2\,dz}.$$

Supongamos que

$$y=C\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}.$$

Entonces, después de integrar hallaremos

$$P_{crit}=\frac{2\pi^2EI}{l^2}.$$

La solución exacta era,

$$P_{crit}=\frac{18{,}7EI}{l^2}.$$

Los ejemplos analizados nos demuestran que, por el método aproximado, se puede, sin grandes dificultades, obtener el valor suficientemente exacto de las fuerzas críticas. La práctica del cálculo demuestra que el método energético es muy efectivo y en toda una serie de casos insustituible.

Veamos por fin un ejemplo más.

Ejemplo 14.6. Determinar la carga crítica para la barra empotrada en un extremo y solicitada por su propio peso q kgf/cm (fig. 514).

Fijamos la ecuación de la línea elástica de la barra flexionada como sigue,

$$y=C\left(1-\cos\frac{\pi z}{2l}\right).$$

Es fácil demostrar que esta expresión satisface las condiciones de borde. Determinamos las energía de la flexión,

$$U_{flex}=\frac{1}{2}\int\limits_0^l EIy''^2\,dz=\frac{1}{2}EIC^2l\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4.$$

Para calcular el trabajo de las fuerzas q, al pasar de la forma rectilínea a la curvilínea, hallamos, según la expresión (14.44), la magnitud de λ_z (fig. 514),

$$\lambda_z=\frac{1}{2}\int\limits_0^z y'^2\,dz=\frac{1}{4}C^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\left(z-\frac{l}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}\right).$$

El trabajo de las fuerzas q será,

$$\int_0^l q\lambda_z\,dz = \frac{1}{4}\,qC^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\left(\frac{l^2}{2}-\frac{2l^2}{\pi^2}\right).$$

Igualando este trabajo a la energía de la flexión obtendremos,

$$q_{\text{crit}} = \frac{EI}{2l^3}\,\frac{\pi^4}{\pi^2-4} \approx \frac{8{,}29EI}{l^3},$$

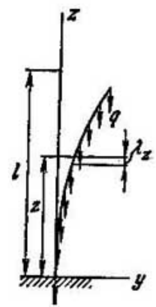


Fig. 514.

mientras que la solución exacta nos da,

$$q_{\text{crit}} = \frac{7{,}83EI}{l^3}.$$

Es característico del método energético el que el error que se comete al determinar las fuerzas críticas tiene siempre el mismo signo. El valor aproximado de la fuerza crítica es siempre superior al exacto. Esto se explica por el hecho de que, al fijar la forma aproximada de la línea elástica, parece que imponemos ligaduras adicionales al sistema, obligándola a deformarse de una manera que no es propia del sistema, aumentando así su rigidez media.

§ 97. Método de los parámetros de origen

En la actualidad, al realizar los cálculos prácticos, dominan los métodos computativos basados en la técnica de las máquinas calculadoras electrónicas. El número de operaciones aritméticas que realiza la máquina computadora por unidad de tiempo es tan grande que en el trabajo de investigación conduce a un salto cualitativo, resultando que la máquina, de un aritmómetro de acción rápida, se ha convertido en un medio de análisis. Cambia el concepto de problemas simples y problemas complicados, de métodos efectivos y no efectivos de solución.

Veamos uno de los métodos mecánicos de determinación de las cargas críticas, más difundidos — el método de los parámetros de origen. A este método volveremos otra vez en el § 108, al determinar las frecuencias propias de las oscilaciones de los sistemas elásticos.

Veamos el ejemplo, «simple» desde el punto de vista del método mecánico, pero suficientemente complicado desde el punto de vista del planteamiento común.

Supongamos una barra (fig. 515, *a*) de rigidez que varía de manera escalonada, aunque puede variar, en el caso general, según una ley arbitraria. Uno de los extremos de la barra está empotrado y el otro se apoya libremente sobre una articulación. A iguales distancias de los extremos se ubican dos apoyos elásticos de rigidez c_1 y c_2, lo que indica que las reacciones de apoyos se orientan en dirección contraria a los desplazamientos y_1 y y_2 son proporcionales a éstos,

$$P_1 = -c_1y_1,\quad P_2 = -c_2y_2,$$

siendo y_1 e y_2 los desplazamientos de los apoyos.

Determínese la carga crítica P_{crit}.

La solución analítica de este problema presenta, claro está, grandes dificultades. El empleo del método energético resulta también bastante dificultoso, puesto que la forma de la línea elástica puede variar considerablemente en fun-

ción de la rigidez de los apoyos intermedios y, por lo tanto, al fijar la función que representa la línea elástica, resulta necesario introducir no ya un solo parámetro de escala, como ocurrió en los ejemplos que se analizaron anteriormente, sino varios parámetros cuya relación entre sí deberá determinarse de la condición del mínimo de la fuerza crítica.

Veamos el algoritmo mecánico.

Ubicamos el origen de las coordenadas en el apoyo izquierdo y designamos la reacción de apoyo por R (fig. 515, c).

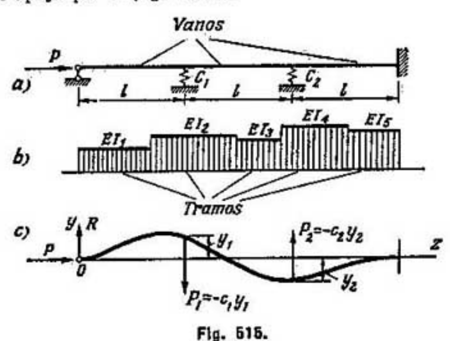


Fig. 515.

El momento flector en el primer vano, es decir, cuando $0 \leqslant z \leqslant l$, será,

$$M_1 = -Py + Rz,$$

en el segundo vano (para $l \leqslant z \leqslant 2l$),

$$M_2 = -Py + Rz + P_1(z - l),$$

y, por último, en el tercero (cuando $2l \leqslant z \leqslant 3l$),

$$M_3 = -Py + Rz + P_1(z - l) + P_2(z - 2l),$$

donde las fuerzas P_1 y P_2 se aplican, por ahora, hacia arriba.

La ecuación diferencial de la línea elástica en su forma general es,

$$EIy'' = M, \tag{14.47}$$

siendo EI y M las correspondientes funciones de z.

Conviene, al emplear las máquinas, escribir las ecuaciones en forma adimensional.

En lugar de la variable independiente desplazada z se introduce la coordenada adimensional ζ que varía entre cero y tres,

$$\zeta = \frac{z}{l}.$$

Introducimos ahora la flecha adimensional η y el momento adimensional también, μ,

$$\eta = \frac{y}{l}; \quad \mu = \frac{Ml}{EI}.$$

La ecuación (14.47) será,

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}=\mu. \qquad (14.48)$$

Planteamos la expresión del momento adimensional,

$$\mu=-\frac{Pl^2}{EI}\eta+\frac{Rl^2}{EI}\zeta\Big|_{I}+\frac{P_1l^2}{EI}(\zeta-1)\Big|_{II}+\frac{P_2l^2}{EI}(\zeta-2)\Big|_{III}.$$

Aquí se recurre a la notación que se empleó anteriormente, al plantear la ecuación universal de la línea elástica de la viga (véase el § 32). Para obtener el momento en los vanos uno, dos y tres se deben retener los términos que figuran a la izquierda de las líneas verticales de índices I, II y III respectivamente.

Introducimos las notaciones,

$$\frac{Pl^2}{EI_1}=P_0;\ \frac{Rl^2}{EI_1}=R_0;\ \frac{c_1l^3}{EI_1}=\alpha_1;\ \frac{c_2l^3}{EI_1}=\alpha_2.$$

Teniendo en cuenta que $P_1=-c_1y_1$ y $P_2=-c_2y_2$, obtendremos,

$$\mu=\frac{EI_1}{EI}\{-P_0\eta+R_0\zeta\,|_{I}-\alpha_1\eta_1(\zeta-1)|_{II}-\alpha_2\eta_2(\zeta-2)\,|_{III}\}. \qquad (14.49)$$

El parámetro $\frac{EI_1}{EI}$ varía a lo largo del eje de acuerdo a la ley dada de variación de la rigidez. Las magnitudes η_1 y η_2 son las flechas adimensionales en los puntos donde se encuentran los apoyos elásticos, es decir,

$$\eta_1=\eta_{\zeta=1};\ \eta_2=\eta_{\zeta=2}.$$

La etapa de entrada del programa deberá contener dos bloques lógicos. En el primero, dada la magnitud ζ, se determina el número del tramo y se calcula $\frac{EI_1}{EI}$. Si la rigidez varía según una ley continua, este bloque lógico se sustituye por otro aritmético. En este caso $\frac{EI_1}{EI}$ se determina como una función continua dada de ζ.

En el segundo bloque lógico, dada la magnitud de ζ, se halla el número del vano, y, después, en función de P_0, R_0, α_1, η_1, α_2, η_2, se obtiene la expresión que figura entre las llaves (14.49). Así pues, en la salida de los bloques se obtiene $\mu=f(\zeta)$.

Volvamos ahora a la ecuación (14.48), reduciéndola a dos ecuaciones de primer orden con las notaciones,

$$\frac{d\eta}{d\zeta}=\theta;\ \frac{d\theta}{d\zeta}=\mu,$$

o en diferencias finitas,

$$\Delta\eta=\theta\cdot\Delta\zeta;\ \Delta\theta=\mu\cdot\Delta\zeta.$$

El intervalo de la variación de ζ, de cero a tres, lo dividimos, por ejemplo, en tres mil tramos, considerando $\Delta\zeta=0{,}001$.

La integración se lleva a cabo según el esquema obvio.

La magnitud μ calculada en el paso anterior, se multiplica por $\Delta\zeta$ y así se determina $\Delta\theta$. Ésta última se suma al valor anterior de θ y la suma, así obtenida, se multiplica por $\Delta\zeta$ y de esta manera se halla el valor de $\Delta\eta$ que se suma después al valor anterior de η. Después ζ recibe el incremento $\Delta\zeta$ y se calcula μ. El proceso de integración continua hasta que no se agote todo el intervalo de variación de ζ, es decir, desde cero hasta tres.

En la última etapa se toma nota de los valores de la flecha η y del ángulo de giro θ. Según las condiciones de apoyo de la viga, cuando $\zeta=3$, estas magni-

tudes deberán ser iguales a cero. Para satisfacer estas condiciones disponemos de dos parámetros de origen $\theta_0=\theta_{\zeta=0}$ y R_0 (de aquí el nombre del método de los parámetros de origen). La flecha adimensional η en el origen de las coordenadas es siempre igual a cero.

Fijando en el primer paso diversos valores de θ_0 y R_0 obtenemos valores diversos de $\theta_{\zeta=3}$ y $\eta_{\zeta=3}$ en el extremo del tramo de integración. Como estas magnitudes son funciones lineales de θ_0 y R_0 podemos escribir,

$$\begin{aligned}\theta_{\zeta=3}&=a_{11}\theta_0+a_{12}R_0,\\ \eta_{\zeta=3}&=a_{21}\theta_0+a_{22}R_0,\end{aligned}\tag{14.50}$$

siendo a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}, ciertos coeficientes desconocidos. Como $\theta_{\zeta=3}$ y $\eta_{\zeta=3}$ deberán ser iguales a cero, se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones,

$$\begin{aligned}a_{11}\theta_0+a_{12}R_0&=0,\\ a_{21}\theta_0+a_{22}R_0&=0.\end{aligned}$$

Para que exista una solución que no sea igual a cero es necesario que

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=0.\tag{14.51}$$

Esto permite determinar el valor crítico de la fuerza $(P_0)_{\text{crit}}$.

El proceso de determinación de $(P_0)_{\text{crit}}$ es el siguiente.

Se comienza por realizar una evaluación tosca del orden de la magnitud esperada de $(P_0)_{\text{crit}}$. En el ejemplo que se analiza (fig. 515) se pueden, por ejemplo, retirar los apoyos intermedios. Se obtiene entonces una barra libremente apoyada en un extremo y empotrada en el otro. En este caso, escogiendo la mínima rigidez $EI=EI_1$ obtendremos,

$$P_{\text{crit}}\approx\frac{20EI_1}{(3l)^2}\ \text{ó}\ (P_0)_{\text{crit}}=\frac{P_{\text{crit}}l^2}{EI_1}=20/9.$$

Interpretamos este valor como el valor original que se introduce en el programa. Introducimos después en el programa los parámetros dados α_1 y α_2 que dependen de la rigidez de los muelles.

Suponiendo $\theta_0=1$ y $R_0=0$ realizamos la primera integración sobre todo el intervalo, obteniendo en el extremo del intervalo las magnitudes $\theta_{\zeta=3}$ y $\eta_{\zeta=3}$.

De acuerdo a las expresiones (14.50), cuando $\theta_0=1$ y $R_0=0$ $\theta_{\zeta=3}=a_{11}$ y $\eta_{\zeta=3}=a_{21}$. Introducimos estos valores en la memoria de la máquina y, suponiendo $\theta_0=0$ y $R_0=1$, repetimos los cálculos. Entonces $\theta_{\zeta=3}=a_{12}$ y $\eta_{\zeta=3}=a_{22}$. Así se obtienen los elementos del determinante D (14.51) que se calcula después fácilmente. Es natural que el determinante obtenido no sea igual a cero. Introducimos su valor en la memoria y damos a la magnitud de P_0 el incremento ΔP_0, por ejemplo, $\Delta P_0=0{,}1$ y calculamos de nuevo el determinante. El nuevo valor del determinante se compara con el anterior. Si no varía el signo del determinante, sumamos a P_0, de nuevo un valor nuevo de ΔP_0 y así sucesivamente. Si el determinante varía de signo, interpolando, hallamos $(P_0)_{\text{crit}}$. Para una precisión posterior mayor se puede reducir ΔP_0 y repetir los cálculos en el tramo donde varía el signo de D.

El tiempo que la máquina necesita para realizar la operación indicada constituye varios minutos. Este tiempo aumenta, naturalmente, varias decenas de veces, si se requiere no sólo hallar la fuerza crítica, sino también los parámetros óptimos del sistema.

El método de los parámetros de origen es prácticamente un método exacto. Los errores que se cometen, al determinar la fuerza crítica son consecuencia, no tanto de los errores relacionados con la integración, que siempre pueden ser reducidos, sino de la medida en que la estructura real corresponde al esquema del cálculo.

El empleo del método de los parámetros de origen es particularmente ventajoso cuando las leyes de variación de la rigidez son complejas y cuando los esfuerzos de compresión varían a lo largo del eje.

Cuando el sistema tiene un número grande de ligaduras impuestas, o cuando el orden de las ecuaciones diferenciales es mayor, el orden del determinante D aumenta. Esto, sin embargo, no conduce a complicaciones sensibles, puesto que existen programas «estandartizados» para esta operación típica.

El método de los parámetros de origen se puede emplear con éxito también en el análisis de la estabilidad, no sólo de sistemas compuestos por barras, sino también de bóvedas. En este caso el problema resulta bastante más complicado.

Ejemplo 14.7. Indíquense, para la barra de la figura 516, *a* de rigidez variable, los parámetros de origen y explíquese el principio de la formación del determinante D.

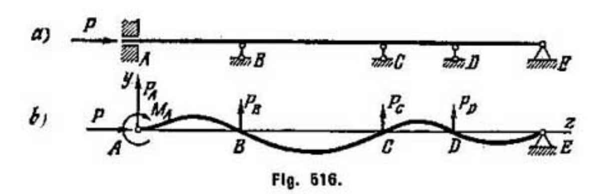


Fig. 516.

Situamos el origen de las coordenadas en el empotramiento y analizamos el momento M_A y las fuerzas P_A, P_B, P_C y P_D (fig. 516, *b*). En el punto A $y=0$ e $y'=\theta_0=0$. Quedan por cumplir cuatro condiciones: $y_B=0$, $y_C=0$, $y_D=0$ e $y_E=0$. Cada una de ellas constituye el correspondiente renglón del determinante D que es de cuarto orden.

Los cuatro parámetros indeterminados son, el momento M_A y las fuerzas P_A, P_B y P_C. La fuerza P_D está relacionada con las últimas por la condición de igualdad a cero de la suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto E.

Para obtener los términos del determinante, se realizan cuatro integraciones. La primera vez se considera diferente de cero el momento M_A, la segunda, la fuerza P_A, la tercera, la fuerza P_B y la cuarta, la fuerza P_C. El resto de los parámetros es cada vez igual a cero. Los valores de los parámetros que no son iguales a cero, se pueden escoger cada vez arbitrariamente, puesto que esto no influye sobre el signo del determinante D. En lo demás el problema en nada se diferencia del analizado anteriormente.

Ejemplo 14.8. Compóngase el algoritmo (secuencia del cálculo) para la determinación del coeficiente de seguridad referido a la estabilidad de la torre de televisión (fig. 517, *a*). Las leyes de variación de la carga lineal q y la de la variación de la rigidez EI están dadas (fig. 517, *c*).

Introducimos el coeficiente constante n y analizamos en lugar de la carga q la carga crítica límite nq. La magnitud n es el coeficiente de seguridad referido a la estabilidad.

Planteamos las condiciones de equilibrio de los elementos de longitud dz (fig. 517, *d*).

Proyectando las fuerzas sobre la normal y la tangente al arco del elemento, obtendremos,

$$Q'=nqy'-Ny''; \quad N'=-nq.$$

Sumamos a ésta la condición obvia, $M'=Q$. Como siempre $EIy''=M$.

Si se tiene en cuenta el empleo posterior de la máquina, entonces no conviene introducir y excluir de las ecuaciones las incógnitas.

Anotamos $y' = \theta$ y escribimos las ecuaciones en diferencias finitas,

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q &= \left(qn\theta - \frac{NM}{EI}\right)\Delta z; \\ \Delta N &= -nq\,\Delta z;\ \Delta M = Q\,\Delta z; \\ \Delta y &= \theta\,\Delta z;\ \Delta\theta = \frac{M}{EI}\,\Delta z. \end{aligned}\right\} \qquad (14.52)$$

En el programa se preveen dos bloques de entrada para determinar $q=f(z)$ y $EI=f(z)$.

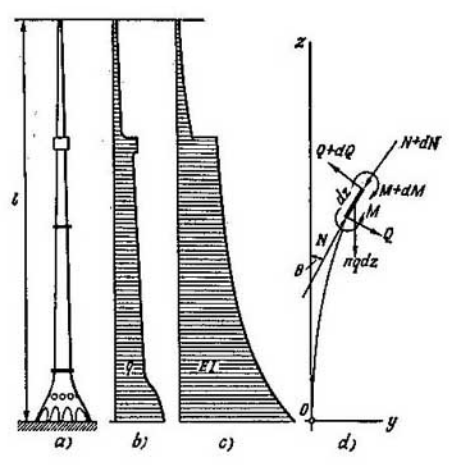


Fig. 517.

En nuestro caso conviene dividir la torre en dos o tres tramos y aproximar gráficamente las leyes dadas de variación de q y EI por polinomios exponenciales, cuyos coeficientes se obtienen según un programa «estandartizado».

Se calcula después el valor original de N que es, naturalmente, igual al peso de la parte de la torre que se encuentra por encima $N_0 = n\int_0^l q\,dz$. Cuando $z=0$ $y=y_0=0$ y $\theta=\theta_0=0$, mientras que las magnitudes $Q=Q_0$ y $M=M_0$ se interpretan como parámetros de origen indeterminados. Cuando $z=l$ el momento M y la fuerza cortante Q deberán ser iguales a cero. Estas condiciones constituyen dos renglones del determinante D de segundo orden.

Primeramente suponemos $M_0\neq 0$ y $Q_0=0$. En la segunda integración $M_0=0$ y $Q_0\neq 0$. Todas las operaciones restantes se llevan a cabo como en el ejemplo analizado anteriormente, salvo que el incremento lo recibe no la fuerza P_0, sino el coeficiente n. Este proceso se continúa hasta que el determinante D no sea igual a cero.

§ 98. Sobre algunos casos de pérdida de la estabilidad que no abarca el esquema clásico

El planteamiento analizado anteriormente, al juzgar sobre la estabilidad de los sistemas elásticos, se basa, sobre todo, en una serie de suposiciones que fue enumerada en el § 89. La esencial de esas suposiciones consiste en que las perturbaciones que se comunican al sistema son pequeñas.

Hasta ahora definíamos la posición de equilibrio como estable, si el sistema, al ser desviado en una magnitud arbitrariamente pequeña y dejado después en libertad, vuelve a su posición inicial. Si después de eliminar las causas que originaron esta desviación pequeña el sistema no vuelve a su posición inicial, entonces la posición de equilibrio se denomina inestable. De una u otra manera, en todos los casos se supone que las desviaciones de la posición de equilibrio son no solamente pequeñas, sino infinitamente pequeñas. Debido a esto, a veces, se dice que el sistema es estable «contra desviaciones pequeñas». Esto quiere



Fig. 518.

decir que, en el caso de cualquier desviación infinitamente pequeña de la posición de equilibrio, el sistema libre vuelve a su posición original. Al mismo tiempo queda sin respuesta la pregunta de si volverá a su posición el sistema, si se le desvía un poco más, es decir, si se le aplica una perturbación no infinitamente pequeña, sino simplemente pequeña, pero finita. La evaluación de la estabilidad, en este caso, se denomina evaluación de la estabilidad contra desviaciones grandes. El sistema, que es estable contra desviaciones grandes, lo es también contra desviaciones pequeñas, mientras que la afirmación contraria, claro está, no es justa. El sistema que es estable contra desviaciones pequeñas puede no ser estable contra desviaciones grandes.

Es ampliamente conocida la ilustración de las posiciones estables e inestables de equilibrio en el ejemplo de la bolita que descansa sobre una superficie cóncava o convexa (fig. 518). Este esquema puede ser complementado con un tercer dibujo. Si la bolita se encuentra en el fondo de una hendidura pequeña, su posición será estable contra desviaciones pequeñas, pero inestable contra desviaciones grandes.

En el sentido habitual de la palabra se dice que el lápiz que se apoya en el extremo opuesto a su punta se encuentra en una posición inestable de equilibrio. Esta inestabilidad es inestabilidad contra desviaciones grandes. Para que el lápiz pase a ocupar otra posición de equilibrio se le debe desviar de la línea vertical de tal manera que el centro de gravedad salga de los límites del área de apoyo, es decir, es necesario aplicar una desviación pequeña, pero finita. La posición del lápiz sobre el extremo opuesto a la punta, desde el punto de vista de la estabilidad contra desviaciones pequeñas es siempre estable, incluso cuando se trata de una superficie de apoyo pequeña.

Algo completamente opuesto ocurre si el lápiz se pone sobre la punta. Esta posición de equilibrio es inestable contra desviaciones pequeñas (fig. 519).

Los sistemas elásticos más simples para los cuales es posible mantener la estabilidad contra desviaciones pequeñas, siendo simultáneamente inestables contra desviaciones grandes, son, por ejemplo, los siguientes.

La barra de extremos planos se comprime entre dos losas (fig. 520, *a*). En la barra flexionada son posibles dos formas básicas de equilibrio: una la que se indica en la figura 520, *b* de carga crítica

$$P_{\text{crit}} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

y la segunda, la representada en la figura 520, *c*. El paso a la primera de ellas ocurre en el caso de desviaciones pequeñas y a la segunda, en el caso de perturbaciones grandes. Para que la barra se flexione según una semionda, es necesario comunicarla una desviación que, aunque es pequeña, pero es finita. Solamente en este caso se podrá vencer la acción rectificadora de los momentos que aparecen en los extremos.

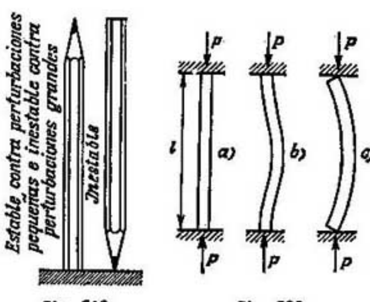


Fig. 519. Fig. 520.

Fig. 521.

Un fenómeno análogo ocurre en el sistema de la figura 521. Aquí, el momento desviador originado por la fuerza P, cuando se trata de flechas pequeñas, será menor que el momento rectificador debido al peso propio q. Para que la barra adquiera la forma de equilibrio con el eje flexionado hay que comunicarla cierta desviación original pequeña pero finita.

El estudio de la estabilidad contra desviaciones grandes de los sistemas elásticos es mucho más complicado que en el caso de derivaciones pequeñas, puesto que en el primer caso, la solución del problema se reduce al estudio de ecuaciones no lineales. Sin embargo, la solución de los problemas de la estabilidad basada sobre este planteamiento, permite responder a preguntas que desde el punto de vista de las desviaciones pequeñas no pueden ser resueltas.

Especial importancia tienen los problemas de estabilidad contra desviaciones grandes en el estudio de las bóvedas.

En particular, el problema de la estabilidad de una bóveda esférica sometida a la acción de la presión exterior y el de la bóveda cilíndrica comprimida en la dirección axial, reciben una interpretación satisfactoria, solamente partiendo de la estabilidad contra desviaciones grandes.

Veamos otra suposición más que sirve de base para el método clásico de planteamiento de la estabilidad de sistemas elásticos. Se trata de que las fuerzas de inercia que acompañan al movimiento del sistema, se consideran sin importancia. Como resultado de esta suposición, el análisis de la estabilidad de las formas de equilibrio se sitúa plenamente dentro de los límites fijados por la estática y se denomina, con frecuencia, método estático.

A diferencia del método estático es puede hablar también del método dinámico. En este caso, al analizar la estabilidad, se analizan no las formas de equilibrio que se diferencian poco de la forma dada, sino que se estudian las leyes del movimiento del sistema después de aplicarle cierta desviación de su estado

inicial. Si el movimiento ocurre de manera tal que la posición inicial se restablece, entonces esta posición se considera estable.

Para la inmensa mayoría de los problemas que se encuentran en la práctica, los métodos dinámico y estático son equivalentes y conducen a iguales valores de las cargas críticas. Sin embargo, existen también sistemas para los cuales el método estático no proporciona ninguna solución, puesto que no existen formas de equilibrio que se diferencien de la inicial. Este sistema, al perder la estabilidad, pasa, como regla general, a un régimen de movimiento oscilatorio de amplitud creciente.

En la figura 522 se muestran dos ejemplos de este tipo de sistema. La barra empotrada en un extremo (fig. 522, *a*) lleva en el otro extremo una fuerza de dirección constante, normal al extremo. Es fácil demostrar que para esta barra no existen formas de equilibrio con el eje flexionado. Si analizamos las leyes del movimiento de la barra se puede observar que cuando las masas se distribuyen uniformemente y cuando

$$P_{\text{crit}} \approx \frac{20EI}{l^2},$$

la forma rectilínea de equilibrio se hace inestable y, en el caso de un aumento posterior de la fuerza, en la barra surgen oscilaciones flexionantes.

El mismo resultado se obtiene para la barra de la figura 522, *b*. La fuerza P se orienta aquí siempre verticalmente hacia abajo y, durante la flexión de la barra, se desliza sobre el disco imponderable ubicado en el extremo de la barra.

La magnitud de la fuerza crítica en casos semejantes a éstos depende no sólo de la longitud y rigidez de la barra, sino también de la ley de distribución de las masas en el sistema.

La particularidad característica de estos sistemas consiste en que las fuerzas exteriores, durante los desplazamientos del cuerpo elástico realizan cierto trabajo cuya magnitud depende no sólo de la distancia recorrida, sino también del camino por el cual se recorre esta distancia. Este tipo de sistemas se denominan sistemas *no conservativos*.

En el § 93 se analizaba el problema de la estabilidad de una barra fuera del dominio elástico. Este problema también se refiere al tipo de problemas que no abarcan plenamente el esquema clásico. Para aclarar esta cuestión volvamos a la definición inicial de la estabilidad.

Se entiende por estabilidad la capacidad del sistema de recuperar su estado inicial una vez eliminadas las causas que originaron la desviación de la posición de equilibrio. Pero si en el cuerpo deformado surgen deformaciones plásticas está claro que el sistema carecerá de tal propiedad.

Así pues, desaparece la conocida definición de la estabilidad y el método «tornasol» de las desviaciones pequeñas con el cual se determina la estabilidad o inestabilidad, pierde claridad y simpleza. Es necesaria otra definición nueva o, por lo menos, es necesario corregir o ampliar la vieja, para que el problema de la estabilidad del sistema que se deforma plásticamente adquiera el mismo rigor y la misma claridad en su planteamiento que él en el caso del sistema que se deforma elásticamente.

Una de las posibles definiciones es la siguiente.

Se entiende por sistema estable aquel que, al recibir desviaciones pequenas no pasa a un estado nuevo desde el punto de vista cualitativo.

Es muy importante en estas cuestiones renunciar a la identificación ampliamente difundida de dos conceptos: 1) la fuerza crítica y 2) la carga límite. El concepto *de carga crítica* está estrechamente relacionado con el esquema clásico de la estabilidad y con el método de las pruebas. El empleo de este término en otro sentido es indeseable. Esto conduce generalmente a equivocaciones y a incomprensiones mutuas. La *carga límite* caracteriza la capacidad resistente de la estructura. Esta es la carga que conduce o a la rotura o a que surgen desplazamientos inadmisibles. La carga límite depende de las propiedades esenciales

del objeto real y, si el esquema clásico no refleja todas las propiedades esenciales del objeto real, no tiene por que coincidir la fuerza crítica con la carga límite. Así por ejemplo, cargando una barra en la máquina de ensayos, determinamos la carga límite por estos o aquellos síntomas en el comportamiento de la barra, pero de ninguna manera la fuerza crítica.

Los razonamientos expuestos se refieren también a los sistemas que se deforman elásticamente, pero la diferenciación clara de estos conceptos adquiere especial importancia en el círculo de problemas que están relacionados con la existencia de deformaciones plásticas.

Generalizando el contenido de este parágrafo, se debe decir que el problema de la estabilidad de los sistemas deformables no se agota, ni mucho menos, incluso en el propio planteamiento. Esta cuestión es actualmente objeto de estudio tanto por científicos aislados, como por toda una serie de escuelas científicas. Por lo tanto, todas las cuestiones tratadas aquí se deben interpretar no como razonamientos definitivos, sino como una breve enumeración de los planteamientos cuyo desarrollo se encuentra todavía en la etapa de formación.

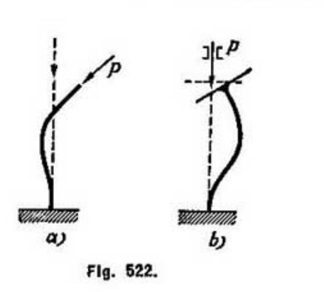


Fig. 522.

Fig. 523.

§ 99. Compresión excéntrica de una barra esbelta

Los problemas de la tracción y compresión excéntricas que se analizaron en el capítulo IV se referían a barras cortas y rígidas. Es distinto el aspecto de este problema cuando se trata de barras esbeltas. En este caso, el eje de la barra bajo la acción de la carga excéntrica puede flexionarse considerablemente y, al determinar los momentos flectores, resultará necesario tener en cuenta las flechas de la barra.

Veamos la barra comprimida excéntricamente y empotrada en un extremo (fig. 523). Bajo la acción de la fuerza P la barra se flexiona y a la distancia z del empotramiento se origina la flecha y. El momento flector en esta sección será,

$$M = P\,(e + f - y).$$

Por otra parte, en el caso de flechas pequeñas,

$$M = EIy''.$$

Igualando los momentos, se obtiene la ecuación diferencial de la

línea elástica de la barra,

$$EIy'' + Py = P(e+f),$$

ó

$$y'' + k^2 y = k^2 (e+f),$$

de donde se obtiene,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \cos kz + e + f.$$

En la expresión obtenida figuran tres magnitudes desconocidas: dos constantes de integración C_1 y C_2 y la flecha en el extremo de la barra f. Estas magnitudes se determinan de las siguientes condiciones de borde:

$$\text{cuando } z=0 \ y=0 \text{ e } y'=0,$$

$$\text{cuando } z=l \ y=f$$

Así pues, se obtiene,

$$C_1 = 0, \ C_2 = -(e+f), \ f = e\frac{1-\cos kl}{\cos kl},$$

y entonces,

$$y = e\,\frac{1-\cos kz}{\cos kl}.$$

Determinamos el momento flector,

$$M = EIy'' = EIek^2 \frac{\cos kz}{\cos kl}.$$

El momento flector máximo surge cuando $z=0$. introduciendo el valor de k hallamos,

$$M_{max} = \frac{Pe}{\cos\sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}}. \tag{14.53}$$

Si la barra es rígida, es decir, si $\frac{l^2}{EI}$ es pequeño, obtenemos $M_{max} = Pe$. Cuando se trata de una barra de pequeña rigidez, $\cos\sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$ puede ser bastante menor que la unidad y el momento máximo crece así considerablemente. Un caso especial tiene lugar cuando la fuerza P es igual a la carga crítica. Entonces,

$$\cos\sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} = 0,$$

ó

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

En este caso, incluso cuando se trata de una excentricidad e muy pequeña. el momento flector en la barra, si se juzga por la fórmula (14.53), se hace infinito. Está claro que este resultado no es justo puesto que el brazo de la fuerza P para flechas cualesquiera no supera

la longitud de la barra l y el momento respectivamente no puede ser mayor que Pl. Esta contradicción es consecuencia de que, al deducir la ecuación de la línea elástica, las flechas se consideraron pequeñas.

Sea como sea, cuando la fuerza P se acerca a la crítica, las flechas de la barra aumentan bruscamente lo que en las estructuras reales es inadmisible.

§ 100. Flexión longitudinal y transversal simultáneas

Veamos la solicitación de una barra recta por una fuerza axial y por un sistema de fuerzas transversales (fig. 524). Este tipo de solicitación se denomina flexión longitudinal y transversal simultáneas.

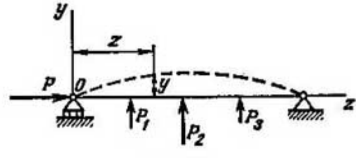


Fig. 524.

Al plantear la ecuación diferencial de la línea elástica de la viga, el momento flector se puede considerar como la suma del momento de las fuerzas transversales M_{tr} y del momento de la fuerza axial Py. Como las flechas se consideran pequeñas, el momento M_{tr} depende explícitamente sólo de z y no depende de y, ni de la fuerza axial P,

$$EIy'' = -Py + M_{tr}. \tag{14.54}$$

La ecuación diferencial de la línea elástica de la viga es,

$$y'' + k^2 y = \frac{M_{tr}}{EI}, \tag{14.55}$$

de donde se obtiene,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \cos kz + y^*,$$

siendo y^*, la solución particular de la ecuación (14.55) que depende de la función M_{tr}, es decir, del tipo de la carga transversal. Por ejemplo, en el caso de una viga de dos apoyos solicitada por una carga uniformemente distribuida (fig. 525) se obtiene,

$$EIy'' = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} - Py.$$

Entonces,

$$y'' + k^2 y = \frac{q}{2EI} (lz - z^2), \quad y^* = \frac{q}{2EIk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

y, por lo tanto,

$$y = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \cos kz + \frac{q}{2EIk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Las constantes C_1 y C_2 se escogen de manera tal que la flecha y, cuando $z=0$ y $z=l$, sea igual a cero. Así pues,

$$y=\frac{q}{EIk^4}\left[-(1-\cos kl)\frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} kl}+1-\cos kz+\frac{k^2}{2}(lz-z^2)\right].$$

El momento flector será,

$$M=EIy''=\frac{q}{k^2}\left[(1-\cos kl)\frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} kl}+\cos kz-1\right].$$

El momento flector máximo ocurre cuando $z=\frac{l}{2}$.

$$M_{max}=\frac{q}{k^2}\frac{1-\cos\frac{kl}{2}}{\cos\frac{kl}{2}}. \tag{14.56}$$

En el caso de pequeños valores de la fuerza de compresión P (cuando k es pequeño) esta expresión, después de vencer la indeterminación, se convierte, como era de esperar en

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8},$$

es decir, el momento máximo coincide con el que origina la carga transversal q. Al aumentar la fuerza P el momento flector máximo crece considerablemente.

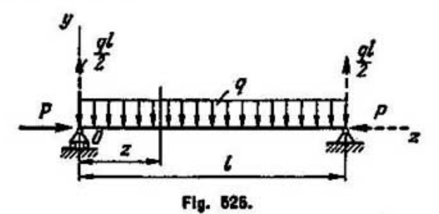


Fig. 525.

En el caso de cargas transversales más complejas, por ejemplo, cuando actúan varias fuerzas transversales, la determinación de los momentos flectores por el método expuesto anteriormente resulta algo difícil, puesto que el momento flector en los distintos tramos de la viga se representa por funciones distintas. En estos casos resulta cómodo el empleo de métodos aproximados que no son tan exactos, pero sí son más simples. Uno de estos, muy difundido, lo analizaremos ahora.

Veamos la expresión (14.54),

$$EIy''=M_{tr}-Py.$$

Cuando no existe fuerza axial esta ecuación será,

$$EIy''_{tr} = M_{tr},$$

donde el subíndice «tr» corresponde a la solicitación de la viga exclusivamente por fuerzas transversales. Eliminando M_{tr} obtenemos,

$$EIy'' = EIy''_{tr} - Py. \tag{14.57}$$

Admitimos ahora que la forma de la línea elástica de la viga, tanto en el caso de existencia de fuerzas longitudinales, como en el caso contrario, se aproxima a la sinusoide,

$$y = f \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}, \quad y_{tr} = f_{tr} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

Introduciendo y e y_{tr} en la expresión (14.57) obtendremos,

$$EIf \frac{\pi^2}{l^2} = EIf_{tr} \frac{\pi^2}{l^2} + Pf,$$

de donde hallamos,

$$f = \frac{f_{tr}}{1 - \frac{P}{P_{crit}}}. \tag{14.58}$$

En el caso de otros tipos de apoyo de la viga, con frecuencia se emplea esta misma fórmula (14.58), pero se introduce en ella otro valor de la fuerza crítica.

Suponiendo que los momentos flectores son proporcionales a las flechas, podremos escribir,

$$M = \frac{M_{tr}}{1 - \frac{P}{P_{crit}}}. \tag{14.59}$$

Ejemplo 14.9. Comprobar la fórmula obtenida en el ejemplo analizado anteriormente de la viga con una carga uniformemente distribuida q.

Supongamos que la fuerza longitudinal $P = \frac{1}{2} P_{crit}$. Entonces, por la fórmula aproximada, obtendremos,

$$M = 2M_{tr}.$$

Como la carga transversal origina el momento flector

$$M_{tr} = \frac{ql^2}{8},$$

obtendremos en este caso,

$$M_{max} = 0{,}25ql^2.$$

Veamos ahora lo que nos da la fórmula exacta (14.56). La magnitud de k, que figura en esta fórmula, será para el valor dado de P la siguiente:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{P_{crit}}{2EI}} = \frac{\pi}{l\sqrt{2}}.$$

Entonces de acuerdo a la expresión (14.56),

$$M_{\max}=\frac{q2l^2}{\pi^2}\frac{1-\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\approx 0{,}252ql^2.$$

Comparando los valores de $M_{\max}$ obtenidas, vemos que prácticamente coinciden.

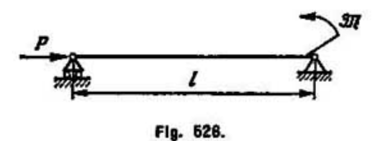


Fig. 526.

La fórmula (14.59) da peores resultados en el caso de solicitaciones evidentemente asimétricas de la viga, como, por ejemplo, en el de la figura 526.

Capítulo XV

OSCILACIONES DE LOS SISTEMAS ELASTICOS

§ 101. Definiciones fundamentales de la teoría de las oscilaciones

La teoría de las oscilaciones constituye una rama muy amplia de la física moderna, que abarca un gran número de problemas de la mecánica, electrotecnia, radiotecnia, óptica, etc. La teoría de las oscilaciones tiene particular importancia para los problemas aplicados que se encuentran en la práctica del ingeniero y, en particular, en los problemas de la resistencia de las máquinas y estructuras. Se conocen casos cuando una estructura, calculada con un gran coeficiente de seguridad para las cargas estáticas, se destruyó bajo la acción de fuerzas de magnitud relativamente pequeñas que actuaban periódicamente. En muchos casos, la estructura rígida y muy resistente resulta inútil, si existen cargas variables, mientras que la estructura más ligera y, a primera vista, menos resistente, soporta estos esfuerzos sin perjuicio alguno. Por lo tanto, las cuestiones de las oscilaciones y, en general, del comportamiento de los sistemas elásticos bajo la acción de cargas variables exigen del constructor una atención especial.

Al estudiar las oscilaciones de los sistemas elásticos, estos últimos generalmente se clasifican, ante todo, según el *número de grados de libertad.*

Se entiende por número de grados de libertad la cantidad de coordenadas independientes que determinan la posición del sistema. Así, por ejemplo, la masa rígida fijada a un resorte (fig. 527, *a*) tiene un grado de libertad puesto que su posición se determina por una sola coordenada ξ que se mide desde cierto punto. Está claro que esto es válido solamente en la medida en la que existe la posibilidad de prescindir de la masa del muelle en comparción con la masa del peso que oscila. En el caso contrario, para fijar la posición del sistema en un momento cualquiera, es necesario introducir un número infinito de coordenadas que determinen la posición de *todos* los puntos del muelle elástico y el sistema tendría así un número infinito de grados de libertad.

Si se prescinde de la masa del árbol se podrá afirmar que el sistema de la figura 527, *b* tiene dos grados de libertad; son necesarias dos coordenadas angulares para fijar el giro de los discos rígidos.

La tuerca maciza que gira y se desplaza por el tornillo (fig. 527, *c*) tiene un grado de libertad puesto que su posición en el espacio se determina sólo por un parámetro, por ejemplo, por el ángulo de giro. El desplazamiento a lo largo del eje depende de este ángulo.

En el sistema de la figura 527, *d* la posición de la masa oscilante en el plano del dibujo se determina por tres variables independientes, por ejemplo, por dos coordenadas del centro de gravedad y por el ángulo de giro de la masa. Por lo tanto, el sistema tiene tres grados de libertad. Aquí se debe advertir que, si el momento de inercia de la

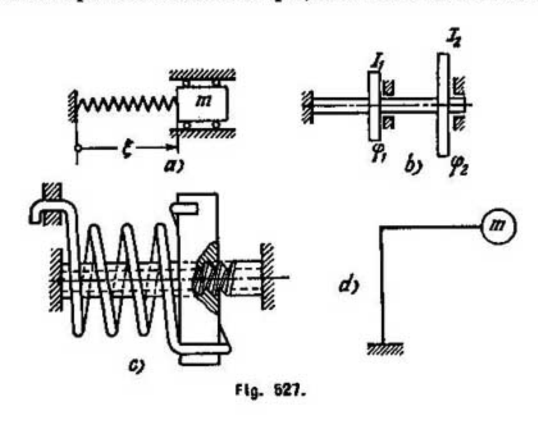


Fig. 527.

masa es pequeño se la puede interpretar como concentrada y será posible considerar que el sistema tiene solamente dos grados de libertad.

Como vemos, el número de grados de libertad se determina, de hecho, por el esquema de cálculo escogido, es decir, por el grado de aproximación con el que consideramos posible o necesario investigar el objeto real. Por lo tanto, a menudo se puede encontrar la expresión: «se considera la viga como un sistema de dos grados de libertad» o «el problema se ha resuelto, suponiendo que el sistema tiene un grado de libertad». Esto quiere decir que, al resolver el problema práctico, se han admitido las simplificaciones correspondientes. Disponiendo de un esquema concreto no es difícil percatarse de qué simplificaciones se trata.

Al estudiar las oscilaciones elásticas se diferencian dos tipos de oscilaciones: las oscilaciones propias y las oscilaciones forzadas.

Se entiende por oscilaciones propias el movimiento que realiza el sistema libre de toda acción de fuerza exterior activa. Las vibraciones del diapasón son un ejemplo de las oscilaciones propias. En

este caso el movimiento ocurre como consecuencia del impulso inicial que se comunica al sistema durante el impacto. Las oscilaciones propias continúan hasta que la energía que se comunica al comienzo del proceso oscilatorio no se agote como consecuencia del trabajo realizado para vencer las fuerzas de resistencia del aire y las fuerzas de la fricción interior en el metal.

Se entiende por oscilaciones forzadas el movimiento del sistema elástico que ocurre bajo la acción de fuerzas exteriores variables que se denominan fuerzas perturbadoras. El movimiento de la base elástica, cuando sobre ella se apoya un motor mal equilibrado es un ejemplo de las oscilaciones forzadas. En este caso el motor es la fuente de energía que se transmite al sistema periódicamente y que se gasta en el proceso de las oscilaciones forzadas para vencer las fuerzas de fricción. La fuerza que actúa sobre la base elástica por parte del motor es la fuerza perturbadora.

El lapso de tiempo entre dos desviaciones máximas sucesivas de la posición de equilibrio del sistema elástico se denomina *período* de las oscilaciones propias o forzadas, según de qué oscilaciones se trate. El período de las oscilaciones se denota por T. La magnitud inversa a ésta se denomina *frecuencia* de las oscilaciones,

$$\nu = \frac{1}{T}$$

y es igual al número de oscilaciones por unidad de tiempo. La frecuencia se mide en hertzios, número de oscilaciones por segundo.

En la técnica, en lugar de la frecuencia ν, en la mayoría de los casos, se emplea la así denominada *frecuencia angular* ω que constituye el número de oscilaciones en 2π segundos.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{15.1}$$

§ 102. Oscilaciones propias del sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento

Veamos el sistema más simple compuesto por una masa y el muelle (fig. 528).

Al plantear las ecuaciones del movimiento en este caso y en los casos siguientes partiremos del principio de D'Alembert, según el cual al sistema que se mueve aceleradamente se le pueden aplicar las ecuaciones de la estática bajo la condición de que entre las fuerzas exteriores se incluya la fuerza de inercia igual al producto de la masa por la aceleración y dirigida en dirección opuesta a la aceleración. Este método, un poco formal, que se deduce de las ecuaciones elementales de la dinámica, proporciona grandes ventajas, al plantear las ecuaciones del movimiento del sistema con varios grados de libertad.

La coordenada ξ (fig. 528) se mide desde la posición correspondiente al muelle no tensionado hacia la derecha. Se supone además que la velocidad tiene la misma dirección positiva

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{dt}$$

y también la aceleración,

$$\ddot{\xi}=\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

La fuerza de inercia es igual al producto $m\ddot{\xi}$ y se orienta hacia la izquierda (fig. 528).

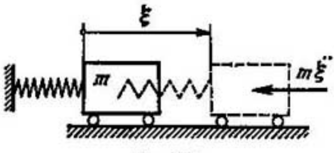


Fig. 528.

Para plantear la ecuación del movimiento recurrimos a la expresión de los desplazamientos en su forma canónica (véase el capítulo VI),

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1=\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\ldots+\delta_{1n}X_n,\\ \xi_2=\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\ldots+\delta_{2n}X_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \xi_n=\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\ldots+\delta_{nn}X_n.\end{array}\right\} \quad (15.2)$$

En este caso se tiene un solo desplazamiento ξ y la fuerza $X_1=-m\ddot{\xi}$, es decir,

$$\xi=\delta_{11}(-m\ddot{\xi}).$$

El signo negativo ante la fuerza se explica por el hecho de que ésta se orienta en dirección contraria al desplazamiento ξ. Como resultado se llega a la ecuación diferencial siguiente,

$$\ddot{\xi}+\frac{1}{\delta_{11}m}\xi=0,$$

ó

$$\ddot{\xi}+\omega^2\xi=0, \quad (15.3)$$

siendo,

$$\omega^2=\frac{1}{\delta_{11}m}. \quad (15.4)$$

Aquí se entiende por δ_{11} el desplazamiento de la masa bajo la acción de la fuerza unitaria aplicada estáticamente. Así pues, δ_{11} se determina por la rigidez del muelle. De acuerdo a (5.13), corres-

pondiente al asentamiento del muelle helicoidal,

$$\lambda = P\frac{8D^3n}{Gd^4}$$

y

$$\delta_{11} = \frac{8D^3n}{Gd^4}.$$

La ecuación (15.3) constituye la ecuación diferencial de las oscilaciones simples armónicas, cuya solución es,

$$\xi = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t,$$

siendo C_1 y C_2 las constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales del movimiento, es decir, de la posición de la masa y su velocidad en el momento $t=0$. La expresión de ξ se puede escribir así,

$$\xi = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$

donde las constantes arbitrarias son la amplitud A y la fase φ que también se determinan de las condiciones iniciales. El diagrama de

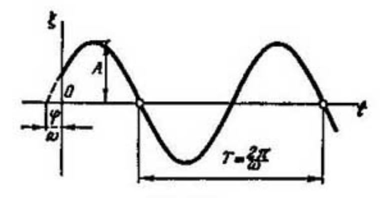


Fig. 529.

la variación de ξ en función del tiempo está representado en la figura 529.

El período de las oscilaciones T se determina fácilmente, partiendo de que cuando el tiempo t aumenta en la magnitud T, le argumento que figura dentro de seno varía en 2π,

$$[\omega(t+T)+\varphi]-(\omega t+\varphi)=2\pi; \quad T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

La magnitud ω constituye la frecuencia angular,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Ejemplo 15.1. Cómo varían las oscilaciones del sistema analizado anteriormente, si el movimiento de la masa tiene lugar en el plano vertical, como se indica en la figura 530.

En este caso se debe considerar la fuerza del peso mg. Entonces la ecuación del movimiento será,

$$\xi = \delta_{11}(-m\ddot{\xi} + mg),$$

ó

$$\ddot{\xi}+\omega^2\xi=g.$$

Así se obtiene una ecuación en la cual el segundo miembro no es nulo. Su solución es,

$$\xi=A\ \mathrm{sen}\ (\omega t+\varphi)+\frac{g}{\omega^2}.$$

Teniendo en cuenta la notación (15.4) de la frecuencia circular, obtendremos,

$$\xi=A\ \mathrm{sen}\ (\omega t+\varphi)+\delta_{11}mg.$$

La magnitud $\delta_{11}\ mg$ es el alargamiento del muelle originado por el peso de la masa. Es decir, que las oscilaciones tienen lugar respecto a la posición del equilibrio estático del sistema. La amplitud y la fase de las oscilaciones se determinan, como anteriormente, de las condiciones iniciales. La frecuencia ω permanece invariable.

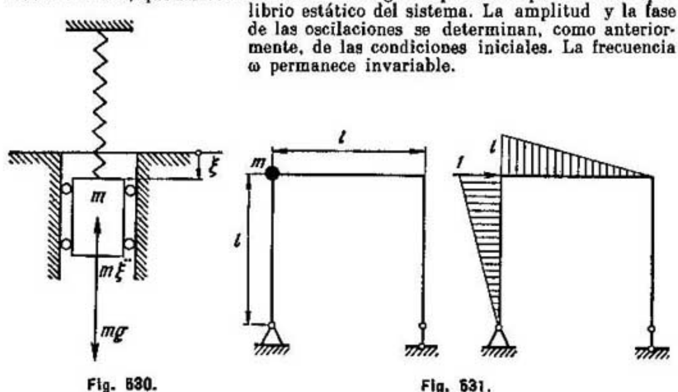


Fig. 530.

Fig. 531.

El resultado obtenido tiene carácter general. La fuerza de gravitación no altera el carácter de las oscilaciones. Ocurre solamente un desplazamiento de la posición de equilibrio del sistema. En adelante no se considerará pues el peso en los sistemas que se analicen.

Ejemplo 15.2. Determinar la frecuencia de las oscilaciones propias de la masa concentrada situada en el vértice del pórtico plano (fig. 531). La rigidez de los elementos del pórtico es EI. Prescíndase de la masa del pórtico en comparación con la del peso.

La masa puede desplazarse solamente en la dirección horizontal y, como se considera concentrada, se puede admitir que el sistema tiene un grado de libertad.

Determinamos el desplazamiento unitario δ_{11}. Para ello aplicamos a la masa en dirección horizontal una fuerza unitaria (fig. 531) y construimos el diagrama de los momentos flectores. Multiplicando este diagrama por sí mismo, obtendremos,

$$\delta_{11}=\frac{2l^3}{3EI}.$$

Entonces de acuerdo a la expresión (15.4),

$$\omega^2=\frac{3EI}{2l^3m}.$$

Ejemplo 15.3. Determinar la frecuencia de las oscilaciones propias de la masa articulada unida a la viga elástica de rigidez EI (fig. 532, *a*).

La posición de la masa oscilante se determina por un solo parámetro que es el ángulo de giro φ. El sistema tiene pues un grado de libertad. Analizamos el

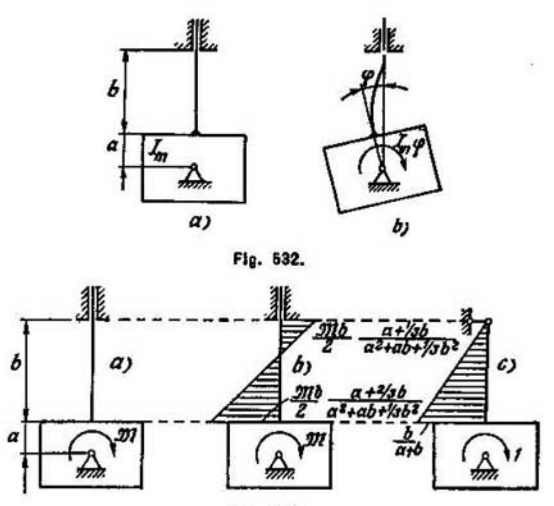


Fig. 532.

Fig. 533.

sistema en el estado desviado aplicando a la masa, según el principio de D'Alembert, el momento $I_m\ddot{\varphi}$, siendo I_m el momento de inercia de la masa respecto al eje de la articulación. De las ecuaciones canónicas generalizadas (15.2) obtenemos,

$$\varphi = \delta_{11}(-I_m\ddot{\varphi}),$$

de donde hallamos,

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

y

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} I_m},$$

siendo δ_{11}, el ángulo de giro que recibe la masa cuando se la aplica un momento unitario.

En este caso, al determinar δ_{11} el problema se complica por el hecho de que el sistema es estáticamente indeterminado. Por lo tanto, es necesario, ante todo, vencer la hiperestaticidad y construir el diagrama de los momentos flectores en la viga cuando se aplica a la masa un momento $\mathfrak{M}$ (fig. 533, *a*). Esto se realiza por el método común explicado en el capítulo VI. En la figura 533, *b* se representa el diagrama total definitivo de los momentos flectores. Para hallar la magnitud de δ_{11} se puede multiplicar este diagrama por sí mismo, suponiendo $\mathfrak{M} = 1$.

Los cálculos resultan más simples, si el diagrama definitivo se multiplica, no por sí mismo, sino por el diagrama del momento unitario aplicado al sistema

base (fig. 533, *c*). Esta simplificación se deduce de la regla de determinación de los desplazamientos en los sistemas hiperestáticos (véase el § 49). Está claro que el valor de δ_{11} obtenido por uno de los dos métodos será el mismo,

$$\delta_{11}=\frac{b^3}{12EI}\,\frac{1}{a^2+ab+\frac{1}{3}b^2}.$$

Así pues, la frecuencia que se busca será,

$$\omega=\sqrt{\frac{12EI\left(a^2+ab+\frac{1}{3}b^2\right)}{I_m b^3}}.$$

§ 103. Oscilaciones propias de los sistemas con amortiguamiento lineal

En los ejemplos analizados anteriormente se suponía que las oscilaciones propias del sistema tienen lugar sin dispersión de la energía, es decir, sin las fuerzas de resistencia. Partiendo de esta suposición las oscilaciones propias se prolongan un tiempo indefinido. En realidad, sin embargo, siempre existen fuerzas exteriores dirigidas en contra del movimiento de las masas y que conducen a la

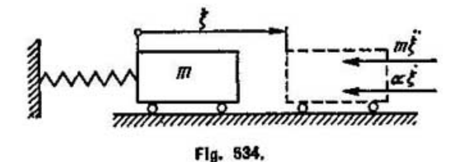


Fig. 534.

disminución paulatina de la amplitud de las oscilaciones propias. Después de cierto tiempo las oscilaciones propias cesan completamente.

La naturaleza de las fuerzas de resistencia es diversa. Estas fuerzas pueden ser las de resistencia del ambiente (aire, agua), la de la capa de aceite en los cojinetes, la fricción interior en las partículas del metal, etc. La fuerza de fricción depende de manera compleja y, a menudo, de manera indeterminada, de los parámetros del movimiento del sistema elástico. El carácter de esta dependencia se puede establecer solamente de manera aproximada. Para mayor simplicidad, generalmente, se admite que la fuerza de resistencia es proporcional a la primera potencia de la velocidad del movimiento.

Por ejemplo, en el sistema analizado anteriormente «masa — muelle» (fig. 534), al plantear las ecuaciones del movimiento, se incluye entre las fuerzas exteriores la de resistencia $\alpha\dot{\xi}$, siendo α, el factor de proporcionalidad entre la fuerza y la velocidad.

Volviendo a la ecuación (15.2) obtendremos,

$$\xi = \delta_{11}(-m\ddot{\xi} - \alpha\dot{\xi}),$$

ó

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0, \tag{15.5}$$

siendo

$$2n = \frac{a}{m}, \quad \omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}. \tag{15.6}$$

La solución de la ecuación (15.5) se puede escribir como sigue,

$$\xi = Ae^{-nt}\,\mathrm{sen}\,(\omega_1 t + \varphi), \tag{15.7}$$

siendo,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \tag{15.8}$$

De la expresión obtenida (15.7) se deduce que en el caso del amortiguamiento lineal las oscilaciones tienen lugar con amplitud

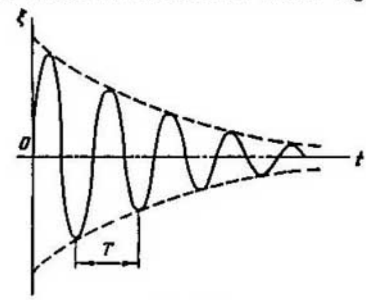


Fig. 535.

decreciente (fig. 535) y con la frecuencia ω_1. Esta última en poco se diferencia de ω, es decir, de la frecuencia de las oscilaciones propias sin amortiguamiento, puesto que n^2 es prácticamente insignificante en comparación con ω^2.

Cada lapso de tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ la amplitud de las oscilaciones disminuye según la razón,

$$\frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+T)}} = e^{nT}.$$

Como vemos en este caso la razón entre dos amplitudes consecutivas permanece constante y no depende del tiempo. Esto es justo en la medida en que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del movimiento de la masa. Sin embargo, en la inmensa mayoría de los sistemas oscilatorios que se encuentran en la práctica no se observa esta proporcionalidad. Las fuerzas de resistencia resultan,

como regla general, depender de la velocidad y de los desplazamientos de las masas de manera más compleja. Esto conduce a serias complicaciones en el análisis matemático de los procesos oscilatorios.

Para poder recurrir en la solución de los problemas necesarios al aparato simple de las ecuaciones lineales, en muchos casos, el amortiguamiento, como se dice, se linealiza, es decir, que a pesar de que las fuerzas de resistencia en cierta medida no son proporcionales a la velocidad, se emplea en el análisis la ecuación (15.5). La magnitud del coeficiente n se determina del ensayo, basándose en la valoración de la dispersión de la energía en las oscilaciones.

En el momento de la máxima desviación de la masa de la posición de equilibrio el sistema de un grado de libertad tiene la energía potencial siguiente,

$$U_{\max 1}=\frac{1}{2}(\xi_1 X_1)_{\max},$$

ó

$$U_{\max 1}=\frac{\xi_{1\max}^2}{2\delta_{11}}=\frac{A_1^2}{2\delta_{11}},$$

siendo A_1, la amplitud de las oscilaciones. La energía cinética en el momento de la máxima desviación es igual a cero.

Después del lapso de tiempo T

$$U_{\max 2}=\frac{A_2^2}{2\delta_{11}}.$$

La diferencia entre estas magnitudes constituye la energía que se pierde en un ciclo de las oscilaciones. La dispersión relativa de la energía será,

$$\frac{\Delta U_{\max}}{U_{\max}}=\frac{A_1^2-A_2^2}{A_1^2}.$$

Si A_2 se diferencia poco de A_1, es decir,

$$A_2\approx A_1=A \quad \text{y} \quad A_2-A_1=A,$$

entonces,

$$\frac{\Delta U_{\max}}{U_{\max}}=\frac{2\Delta A}{A}.$$

Como en el caso cuando el amortiguamiento lineal es pequeño la razón entre dos amplitudes consecutivas es e^{nT}, por lo tanto, si para cierto sistema se determinó experimentalmente la diferencia entre dos amplitudes consecutivas ΔA, basándonos en la igualdad de las energías disipadas en un ciclo, podremos afirmar que,

$$\frac{2\Delta A}{A}=1-e^{-2nT}.$$

De aquí se determina la magnitud del coeficiente n para el amortiguamiento lineal correspondiente que es equivalente, desde el punto de vista de la dispersión de la energía, al dado.

Está claro, que tal linealización del amortiguamiento es válida en un intervalo determinado de las amplitudes y cuando la desviación que se observa entre las relaciones reales y las aproximadas lineales no es muy grande. En la mayoría de los casos que se encuentran en la práctica esta valoración aproximada del amortiguamiento se puede emplear con suficiente éxito.

§ 104. Oscilaciones forzadas del sistema de un grado de libertad. Resonancia

Veamos el caso cuando sobre el sistema de un grado de libertad (fig. 536) actúa una fuerza que varía según la ley armónica.

$$P(t) = P_0 \operatorname{sen} \Omega t,$$

siendo P_0, el valor máximo de la fuerza y Ω, la frecuencia circular de su variación.

Al plantear la ecuación del movimiento de la masa se debe considerar no sólo la fuerza de inercia $m\ddot{\xi}$ y la fuerza de resistencia $\alpha\dot{\xi}$, sino también la fuerza exterior $P(t)$, es decir, la fuerza perturbadora.

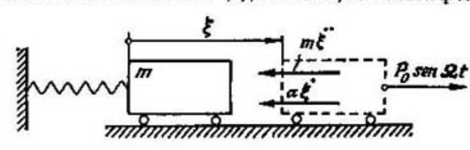


Fig. 536.

Según la primera de las ecuaciones (15.2)

$$\xi = \delta_{11}[P(t) - m\ddot{\xi} - \alpha\dot{\xi}],$$

ó

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{P_0}{m} \operatorname{sen} \Omega t. \qquad (15.9)$$

Las notaciones para n y ω permanecen las mismas.

Así pues, se ha obtenido una ecuación diferencial con el segundo miembro. La solución completa de esta ecuación se compone de la solución de la ecuación homogénea sin el segundo miembro y la solución particular de la ecuación con el segundo miembro. La ecuación homogénea

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

se analizó ya en el parágrafo anterior. Su solución nos proporciona la ley del movimiento de las oscilaciones propias con amortiguamiento.

Queda por determinar la solución particular de la ecuación (15.9). Admitimos,

$$\xi^* = C_1 \operatorname{sen} \Omega t + C_2 \cos \Omega t, \qquad (15.10)$$

siendo C_1 y C_2 constantes indeterminadas.

Introduciendo esta función en la ecuación (15.9) determinamos las constantes C_1 y C_2 de manera tal que se satisfaga idénticamente

la ecuación. Resulta entonces que,

$$C_1 = \frac{P_0}{m} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2},$$
$$C_2 = -\frac{P_0}{m} \frac{2n\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}.$$

Una vez introducidos C_1 y C_2, se obtiene para la expresión de la función ξ^*,

$$\xi^* = \frac{\frac{P_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \left[\frac{(\omega^2 - \Omega^2) \operatorname{sen} \Omega t}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} - \frac{2n\Omega \cos \Omega t}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \right].$$

Introducimos la notación siguiente,

$$\frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \cos\psi.$$

Como la suma de los cuadrados de los coeficientes de $\operatorname{sen} \Omega t$ y $\cos \Omega t$ es igual a la unidad podremos admitir que

$$\frac{2n\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \operatorname{sen} \psi$$

y entonces

$$\xi^* = \frac{\frac{P_0}{m\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \operatorname{sen} (\Omega t - \psi).$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{m\omega^2} = \delta_{11}$ obtendremos definitivamente

$$\xi^* = \frac{P_0\delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \operatorname{sen} (\Omega t - \varphi) \qquad (15.11)$$

Es decir que la solución completa de la ecuación (15.9) será,

$$\xi = Ae^{-nt} \operatorname{sen} (\omega_1 t + \varphi) + \xi^*$$

Como vemos, en el caso que analizamos, el sistema toma parte simultáneamente en dos movimientos oscilatorios. El primero constituye el movimiento oscilatorio propio cuyas amplitud y fase se determinan de las condiciones iniciales. Estas oscilaciones son amortiguadas y, después de cierto tiempo, prácticamente desaparecen. El segundo movimiento oscilatorio transcurre con la frecuencia de la fuerza perturbadora, pero con un desfasaje igual a ψ. Este movimiento no se amortigua, sino que se mantiene mientras actúe la fuerza perturbadora. Estas oscilaciones se denominan oscilaciones forzadas. La amplitud de estas oscilaciones es, según la expre-

sión (15.11),

$$A_{for}=\frac{P_0\delta_{11}}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}}. \qquad (15.12)$$

El producto $P_0\delta_{11}$ constituye el desplazamiento que recibiría la masa m, si se aplicase estáticamente la fuerza P_0. Por lo tanto, el coeficiente,

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \qquad (15.13)$$

indica cuántas veces la amplitud de las oscilaciones forzadas es mayor que el desplazamiento estático originado por el máximo valor de la fuerza perturbadora. Las tensiones que surgen en el elemento elástico (muelle, viga, etc.) serán también el mismo número

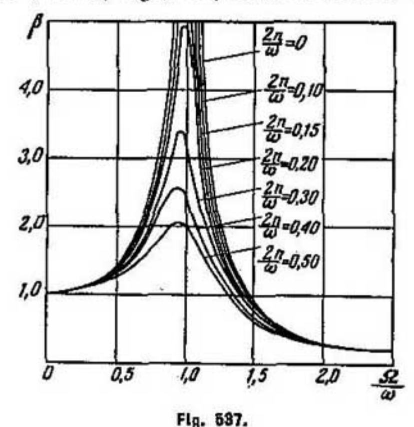


Fig. 537.

de veces mayores que las estáticas. El coeficiente β depende de dos magnitudes: de la razón entre las frecuencias $\frac{\Omega}{\omega}$ y del parámetro del amortiguamiento n. En la figura 537 están dadas las curvas de la dependencia entre β y $\frac{\Omega}{\omega}$ para algunos valores de n.

Cuando $n=0$, es decir, cuando no hay amortiguamiento, la magnitud de β, cuando coinciden las frecuencias de las oscilaciones propias y las oscilaciones forzadas ($\frac{\Omega}{\omega}=1$), se hace infinita. Esto indica que en estas condiciones la amplitud de las oscilaciones pro-

pias crece ilimitadamente. Cuando existe amortiguamiento ($n \neq 0$) β queda limitada, pero en la zona donde coinciden las frecuencias adquiere su máximo valor.

El fenómeno que consiste en el aumento de la amplitud, al coincidir las frecuencias de las oscilaciones propias y de la fuerza perturbadora se denomina *resonancia* y la propia coincidencia de las frecuencias, *condición de la resonancia.*

En la práctica de los cálculos de ingeniería de la resistencia dinámica, el problema de la resonancia, por su importancia, ocupa uno de los primeros lugares. En la mayoría de los casos las leyes de variación de las fuerzas perturbadoras tienen carácter periódico. Así, por ejemplo, las partes móviles no balanceadas del motor en trabajo crean fuerzas que varían periódicamente. El tren, al moverse con velocidad constante, recibe golpes periódicos en las juntas de los raíles. Las piezas de los aparatos establecidos sobre cimientos que vibran (en el avión, automóvil) reciben en el proceso de su trabajo golpes con una frecuencia igual a la de la base vibrante. Ejemplos de esta índole se pueden citar muchos. En todos estos casos surge la pregunta ¿en qué medida son peligrosas las fuerzas perturbadoras para el trabajo del sistema elástico y si son o no capaces de conducir a vibraciones excesivas y a la rotura prematura?

Este problema se resuelve, ante todo, comparando las frecuencias de las oscilaciones propias y de la fuerza perturbadora. Cuando estas frecuencias se diferencian considerablemente la una de la otra se puede estar seguro de que el fenómeno de la resonancia no surge y de que las condiciones de trabajo de los elementos elásticos son favorables. Al mismo tiempo resulta posible calcular, sin dificultad, la amplitud de las oscilaciones forzadas, sin conocer previamente la magnitud del coeficiente de amortiguamiento n. Como se ve de la figura 537 las curvas β se diferencian sensiblemente entre sí solamente en la zona de la resonancia. Ya cuando la frecuencia Ω es vez y media o dos veces mayor o menor que la frecuencia ω, se puede considerar que las curvas prácticamente coinciden y que el coeficiente de amortiguamiento n no tiene importancia. Se le puede considerar igual a cero, lo que contribuye al aumento de la reserva de la resistencia. Entonces la expresión (15.12) será,

$$\beta = \pm \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \qquad (15.14)$$

Una vez determinado el coeficiente β, será fácil calcular entonces las tensiones en los elementos elásticos del sistema oscilatorio,

$$\sigma = \sigma_{est}\beta, \qquad (15.15)$$

siendo σ_{est}, la tensión que surge en el sistema, cuando se aplica estáticamente el valor máximo de la fuerza perturbadora. Partiendo

de la tensión σ, si se considera necesario, se puede realizar el cálculo de la resistencia a la fatiga de los elementos más sobrecargados.

Cuando la comparación de las frecuencias Ω y ω indica que existe el peligro de la resonancia, generalmente con variaciones constructivas, se consigue, según las circunstancias lo indiquen, la variación de una u otra frecuencia. Lo más racional es variar las frecuencias de manera que la razón $\frac{\Omega}{\omega}$ aumente pues entonces (a juzgar por la figura 537) la disminución del coeficiente β resulta más sensible. La manera más simple de conseguirlo consiste en suavizar la suspensión, es decir, en disminuir la rigidez de los elementos elásticos del sistema oscilatorio. Si el constructor, debido a las circunstancias, no tiene la posibilidad de variar las frecuencias, entonces, al surgir el peligro de la resonancia se practica el amortiguamiento del sistema, es decir, el establecimiento de dispositivos especiales que aumentan la dispersión de la energía durante las oscilaciones. El coeficiente de amortiguamiento n crece y disminuye así la amplitud en la zona de la resonancia, sin variar la relación entre las frecuencias (fig. 537).

Al aplicar las fuerzas perturbadoras, la amplitud de las oscilaciones forzadas que se determina por la fórmula (15.12) no alcanza su máximo valor de una manera instantánea. Se necesita cierto tiempo más o menos largo para ello. Por lo tanto, la resonancia que dura poco tiempo, como regla general, no presenta peligro alguno para las estructuras puesto que la amplitud en ese corto lapso de tiempo no llega a alcanzar grandes valores.

Ejemplo 15.4. Un motor que se instala sobre dos vigas (fig. 538) tiene una masa giratoria desbalanceada m_0 ($m_0 g = 40$ kgf). La excentricidad de la masa es $r = 0,1$ cm. El número de revoluciones de la masa $n = 3\,000$ r. p. m. El peso del motor es 180 kgf y la longitud de las vigas $l = 1,5$ m. Las vigas están formadas por canales N°12 (véase la tabla en el apéndice) de momento de inercia de la sección $I_x = 304$ cm^4 para cada una. Se necesita comprobar la resonancia.

La frecuencia circular de la fuerza perturbadora es igual a la velocidad angular de rotación de la masa m_0. Entonces,

$$\Omega = \frac{3\,000}{60} 2\pi = 314 s^{-1}.$$

Determinamos la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema prescindiendo de la masa de las vigas,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}}.$$

Comenzamos por calcular δ_{11}, multiplicando el diagrama unitario (fig. 538) por sí mismo,

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48E \cdot 2I_x}.$$

Calculamos después ω,

$$\omega = \sqrt{\frac{48E \cdot 2I_x}{l^3 m}} = 307 s^{-1}.$$

Como vemos, las frecuencias prácticamente coinciden, es decir, que en el sistema deberá surgir el estado de resonancia. La manera más fácil de evitar esto consiste en sustituir el número del perfil por otro del surtido, es decir, cambiar la rigidez de las vigas EI. Es más conveniente aligerar la sustentación escogiendo un número menor del perfil. Admitimos, por ejemplo, el canal N°8 (I_x=89,4 cm^4). Entonces la frecuencia circular de las oscilaciones propias será,

$$\omega = 166\ s^{-1}.$$

Esta frecuencia se diferencia ya mucho de la frecuencia de la fuerza perturbadora Ω. Por lo tanto, existe la posibilidad de, prescindiendo del amortigua-

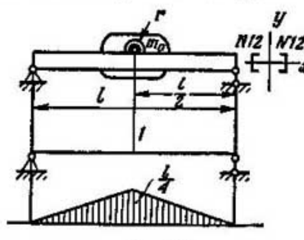


Fig. 538.

miento, calcular el coeficiente β por la fórmula (15.14)

$$\beta = \pm \frac{1}{1 - \frac{314^2}{166^2}}.$$

Escogiendo el signo correspondiente para que β sea positivo, obtendremos,

$$\beta = 0,388.$$

Determinamos ahora el valor máximo de la fuerza perturbadora,

$$P_0 = m_0 \Omega^2 r = 402\ \text{kgf}.$$

La tensión que surge en las vigas bajo la acción de esta fuerza, cuando se aplica estáticamente, es,

$$\sigma_{est} = \frac{M}{2W_x} = \frac{P_0 l}{8W_x} = \frac{402 \cdot 150}{8 \cdot 22,4} = 336\ \text{kgf/cm}^2,$$

siendo 22,4 el módulo de la sección del perfil N° 8. La tensión originada por las oscilaciones forzadas será,

$$\sigma = \sigma_{est}\beta = 131\ \text{kgf/cm}^2.$$

Estas tensiones alternadas se suman a las tensiones constantes originadas por el peso propio del motor $mg = 180$ kgf,

$$\sigma_{est} = \frac{mgl}{8W_x} = \frac{200 \cdot 150}{8 \cdot 22,4} = 150\ \text{kgf/cm}^2.$$

Así pues, al calcular la resistencia a la fatiga de la viga se debe considerar que el ciclo de las tensiones tiene las siguientes características nominales,

$$\sigma_m = 150\ \text{kgf/cm}^2 \text{ y } \sigma_a = 131\ \text{kgf/cm}^2.$$

Ejemplo 15.5. Para medir las vibraciones que surgen en el aparato volador sin piloto se emplea un captador compuesto por la masa establecida sobre una base vibrante a través del muelle (fig. 539). La masa se une a un contacto que se desplaza por un potenciómetro. Las señales del potenciómetro se transforman en señales de radio y se captan por una estación telemétrica instalada en la tierra.

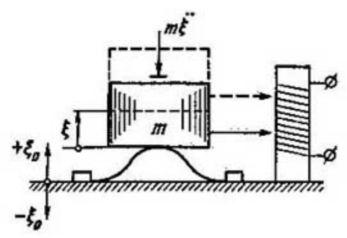


Fig. 539.

Determínese la manera de escoger los parámetros del captador para que las oscilaciones medidas se transmitan con las mínimas deformaciones posibles de las amplitudes.

Consideramos que la base oscila según la ley armónica de amplitud A_0 y frecuencia Ω,

$$\xi_0 = A_0 \operatorname{sen} \Omega t.$$

Prescindiendo de la resistencia escribimos como de común,

$$\xi - \xi_0 = \delta_{11} (-m\ddot{\xi}),$$

siendo ξ, el desplazamiento de la masa y $\xi - \xi_0$ la variación de la altura del muelle.

Así pues, después de introducir ξ_0 llegamos a la ecuación diferencial siguiente,

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = A_0 \omega^2 \operatorname{sen} \Omega t.$$

La solución particular de esta ecuación, correspondiente a las oscilaciones forzadas de la masa, será,

$$\xi^* = \frac{A_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \operatorname{sen} \Omega t = A_0 \beta \operatorname{sen} \Omega t.$$

Como el potenciómetro está relacionado con la base vibrante, el captador transmitirá señales proporcionales a la diferencia de las magnitudes ξ_0 y ξ^*, es decir,

$$\xi_0 - \xi^* = A_0 (1 - \beta) \operatorname{sen} \Omega t.$$

Vemos ahora que para que la ley de variación de $\xi_0 - \xi^*$ que se transmite coincida lo más plenamente posible con la ley de variación de las oscilaciones propias de la base $\xi_0 = A_0 \operatorname{sen} \Omega t$, es necesario que el coeficiente β tenga el valor absoluto menor posible. Para ello es necesario que la frecuencia de las oscilaciones propias de la masa ω sea pequeña en comparación con la frecuencia de la base Ω lo que fácilmente se consigue, al diseñar el captador.

Ejemplo 15.6. Establecer los estados de resonancia para el caso cuando la fuerza perturbadora varía según la ley indicada en la figura 540.

Descomponemos la función periódica de la fuerza perturbadora en serie trigonométrica,

$$P = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos\frac{4\pi t}{T} + \ldots$$

Las constantes a_0, a_1, ..., de acuerdo con las reglas de desarrollo en serie de Fourier, son las siguientes,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt;\quad a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T P\cos\frac{2\pi t}{T}\,dt;\quad a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T P\cos\frac{4\pi t}{T}\,dt;\ \ldots$$

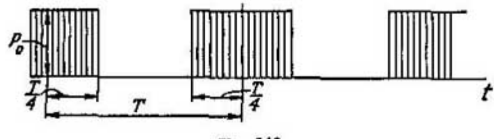


Fig. 540.

Como resultado obtendremos,

$$P = P_0\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{T} - \frac{2}{3\pi}\cos\frac{6\pi t}{T} + \frac{2}{5\pi}\cos\frac{10\pi t}{T} - \ldots\right].$$

Ahora es necesario hallar la solución particular de la ecuación,

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = P_0\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{T} - \ldots\right]$$

que será la siguiente,

$$\xi^* = P_0\left[\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\frac{2}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{T}}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} - \frac{\frac{2}{3\pi}\cos\frac{6\pi t}{T}}{\omega^2 - \left(\frac{6\pi}{T}\right)^2} + \ldots\right].$$

Bajo la acción de la fuerza exterior periódica perturbadora surge un estado de oscilaciones complejo compuesto por una serie de oscilaciones armónicas superpuestas. La amplitud de cada componente de la armónica depende del período de la fuerza perturbadora T. Las condiciones de resonancia surgen para la serie de valores consecutivos de T,

$$T = \frac{2\pi}{\omega};\quad T = \frac{6\pi}{\omega};\quad T = \frac{10\pi}{\omega};\ \ldots$$

§ 105. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad

Hasta aquí analizábamos los sistemas con un solo grado de libertad y en los diversos ejemplos nos convencimos de que la característica fundamental del sistema oscilatorio es la frecuencia de las oscilaciones propias. En función de la frecuencia de las oscilaciones propias se determina el grado de peligro de la aparición de la resonancia y la magnitud de las tensiones en caso de las oscilaciones

forzadas. Veamos ahora los métodos de determinación de las frecuencias de las oscilaciones propias en caso de varios grados de libertad.

En calidad de ejemplo elemental veamos el sistema de la figura 541. Si prescindimos de la masa de la viga y consideramos que los pesos están concentrados, obtendremos claro está, un sistema con dos grados de libertad.

Designemos por ξ_1 el desplazamiento de la primera masa y por ξ_2, el de la segunda. De las ecuaciones (15.2) obtendremos,

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{\xi}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{\xi}_2), \\ \xi_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{\xi}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{\xi}_2). \end{aligned}\right\} \qquad (15.16)$$

En lugar de una ecuación diferencial tenemos aquí un sistema de dos ecuaciones respecto a las variables ξ_1 y ξ_2. Como al aplicar la fuerza a la primera masa, la segunda recibe cierto desplazamiento, las ecuaciones resultan relacionadas entre sí ($\delta_{12} \neq 0$).

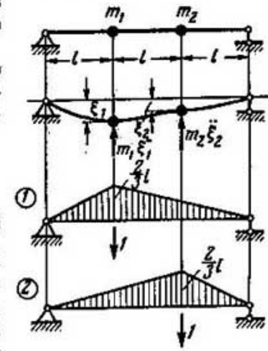


Fig. 541.

Escogemos la solución de las ecuaciones (15.16) como sigue,

$$\xi_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \xi_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi). \qquad (15.17)$$

Una vez introducidas estas funciones en las ecuaciones (15.16) obtendremos un sistema de ecuaciones homogéneas respecto a A_1 y A_2,

$$\left.\begin{aligned} A_1(\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) + A_2\delta_{12}m_2\omega^2 = 0, \\ A_1\delta_{21}m_1\omega^2 + A_2(\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15.18)$$

Este sistema tiene solución no nula solamente cuando su determinante es igual a cero,

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1\omega^2 - 1 & \delta_{12}m_2\omega^2 \\ \delta_{21}m_1\omega^2 & \delta_{22}m_2\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o, puesto que $\delta_{12} = \delta_{21}$,

$$\omega^4 m_1 m_2 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0.$$

De esta ecuación se obtienen dos valores para la frecuencia de las oscilaciones propias,

$$\omega^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 \pm \sqrt{(\delta_{11}m_1 - \delta_{22}m_2)^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \qquad (15.19)$$

En el ejemplo que analizamos δ_{11}, δ_{22}, y δ_{12} se determinan, multiplicando los diagramas unitarios (fig. 541),

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4l^3}{9EI}, \quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{7l^3}{18EI}.$$

Consideremos para mayor simplicidad que $m_1=m_2=m$. Entonces, obtendremos,

$$\omega_1^2=\frac{6EI}{5ml^3}, \quad \omega_2^2=\frac{90EI}{5ml^3}.$$

Si el determinante del sistema es igual a cero esto indicará que por lo menos una de las ecuaciones es una combinación lineal de las otras. En nuestro caso, cuando la frecuencia ω adquiere uno de los valores indicados, el determinante se convierte en cero y una de las ecuaciones (15.18) se podrá considerar como derivada de la otra.

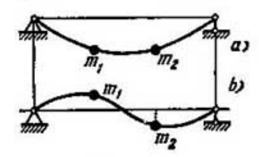


Fig. 542.

Tenemos pues de hecho no dos ecuaciones, sino una de la que se puede obtener la relación de las magnitudes A_1 y A_2. Introduciendo, por ejemplo, en la primera ecuación en lugar de ω^2 la magnitud ω_1^2, para $m_1=m_2=m$, hallaremos,

$$A_2=+A_1,$$

y si introducimos ω_2^2,

$$A_2=-A_1,$$

Así pues, las funciones (15.17) adquieren las expresiones siguientes: cuando $\omega=\omega_1$,

$$\xi_1=A\operatorname{sen}(\omega_1 t+\varphi), \quad \xi_2=A\operatorname{sen}(\omega_1 t+\varphi),$$

y cuando $\omega=\omega_2$,

$$\xi_1=A\operatorname{sen}(\omega_2 t+\varphi), \quad \xi_2=-A\operatorname{sen}(\omega_2 t+\varphi).$$

Por lo tanto para el sistema de dos grados de libertad existen dos formas de vibraciones. Cuando las oscilaciones transcurren con la frecuencia menor, los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 se hallan en la misma fase (fig. 542, *a*) puesto que las amplitudes tienen el mismo signo. En el caso de la segunda forma de las oscilaciones (con la frecuencia ω_2) las amplitudes serán de signos opuestos, es decir, que las oscilaciones se encuentran en fases opuestas. La forma de las oscilaciones está representada en la figura 542, *b*.

De las dos funciones obtenidas se puede componer ahora la solución completa del sistema (15.16),

$$\xi_1 = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$\xi_2 = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) - B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2),$$

donde A, B, φ_1 y φ_2 se determinan de las condiciones iniciales, es decir, se obtienen dadas las velocidades y las posiciones de las dos masas en un momento determinado.

Así pues, el sistema con dos grados de libertad tiene dos frecuencias propias. Si el sistema tiene tres grados de libertad, tendrá también tres frecuencias propias y para obtenerlas será necesario resolver no una ecuación cuadrática, sino una ecuación cúbica. Al aumentar el grado de libertad se complica pues el problema.

Ejemplo 15.7. Determinar las frecuencias de las oscilaciones propias de la masa concentrada m fijada al pórtico de forma Γ (fig. 543). La rigidez de los elementos del pórtico a la flexión es EI y a la torsión, GI_t.

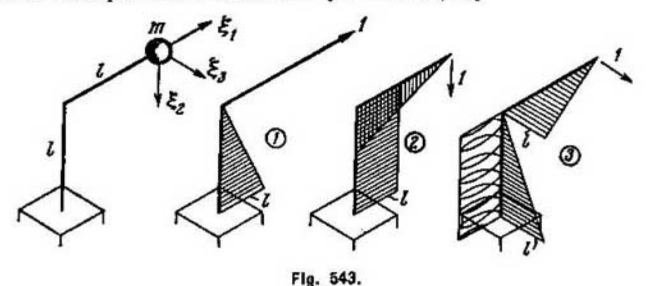


Fig. 543.

El grado de libertad del sistema es igual a tres. Las ecuaciones del movimiento serán,

$$\xi_1 = -\delta_{11} m\ddot{\xi}_1 - \delta_{12} m\ddot{\xi}_2 - \delta_{13} m\ddot{\xi}_3,$$
$$\xi_2 = -\delta_{21} m\ddot{\xi}_1 - \delta_{22} m\ddot{\xi}_2 - \delta_{23} m\ddot{\xi}_3,$$
$$\xi_3 = -\delta_{31} m\ddot{\xi}_1 - \delta_{32} m\ddot{\xi}_2 - \delta_{33} m\ddot{\xi}_3.$$

Multiplicando los diagramas unitarios (fig. 543) hallaremos,

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}, \quad \delta_{12} = \frac{l^3}{2EI}, \quad \delta_{13} = 0,$$

$$\delta_{22} = \frac{4l^3}{3EI}, \quad \delta_{23} = 0, \quad \delta_{33} = l^3\left(\frac{2}{3EI} + \frac{1}{GI_t}\right).$$

Como $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$, la tercera ecuación resulta ser independiente de las dos primeras,

$$\xi_1 = -m\delta_{11}\ddot{\xi}_1 - m\delta_{12}\ddot{\xi}_2,$$
$$\xi_2 = -m\delta_{21}\ddot{\xi}_1 - m\delta_{22}\ddot{\xi}_2,$$
$$\xi_3 = -m\delta_{33}\ddot{\xi}_3.$$

Las frecuencias ω_1 y ω_2 se determinan por la fórmula (15.19), introduciendo δ_{11}, δ_{12}, δ_{22} y $m_1 = m_2 = m$,

$$\omega_1^2 = \frac{6EI}{7ml^3}(5 - 3\sqrt{2}),$$

$$\omega_2^2 = \frac{6EI}{7ml^3}(5 + 3\sqrt{2}).$$

La tercera frecuencia será,

$$\omega_3^2 = \frac{1}{m\delta_{33}} = \frac{1}{ml^3}\,\frac{1}{\frac{2}{3EI} + \frac{1}{GI_t}}.$$

Ejemplo 15.8. Determinar la frecuencia de las oscilaciones propias torsionales del árbol con tres volantes, cada uno de los cuales tiene el momento de inercia I, (fig. 544).

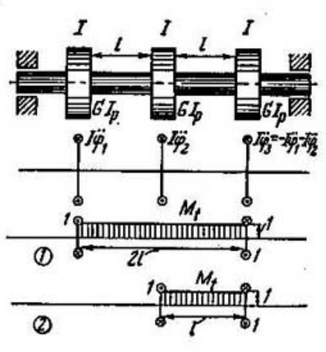


Fig. 544.

El grado de libertad del sistema es tres, pero solamente dos grados de libertad son oscilatorios, ya que una de las coordenadas determina la posición del sistema interpretado como un todo rígido. Sean los ángulos de giro de los volantes φ_1, φ_2 y φ_3. Los momentos inerciales respectivos serán $I\ddot{\varphi}_1$, $I\ddot{\varphi}_2$ e $I\ddot{\varphi}_3$ y como es lógico,

$$I\ddot{\varphi}_3 = -I\ddot{\varphi}_1 - I\ddot{\varphi}_2. \tag{15.20}$$

Planteamos ahora las ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_3 &= -\delta_{11}I\ddot{\varphi}_1 - \delta_{12}I\ddot{\varphi}_2, \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= -\delta_{21}I\ddot{\varphi}_1 - \delta_{22}I\ddot{\varphi}_2, \end{aligned}\right\} \tag{15.21}$$

donde los coeficientes δ_{11}, δ_{12} y δ_{22} se determinan, multiplicando los diagramas (fig. 544),

$$\delta_{11} = \frac{2l}{GI_p}, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{GI_p}.$$

Tenemos para las soluciones de los sistemas (15.20) y (15.21),

$$\varphi_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$
$$\varphi_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$
$$\varphi_3 = A_3 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi).$$

Después de introducir estas funciones en las ecuaciones (15.20) y (15.21) hallaremos,

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$
$$A_1(\delta_{11} I\omega^2 - 1) + A_2\delta_{12} I\omega^2 + A_3 = 0,$$
$$A_1\delta_{21} I\omega^2 + A_2(\delta_{22} I\omega^2 - 1) + A_3 = 0.$$

e igualando a cero el determinante del sistema, hallamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_{11} I\omega^2 - 1 & \delta_{12} I\omega^2 & 1 \\ \delta_{21} I\omega^2 & \delta_{22} I\omega^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, una vez introducidos aquí δ_{11}, δ_{12} y δ_{22}, hallaremos,

$$\omega_1^2 = \frac{GI_p}{Il}, \quad \omega_2^2 = \frac{3GI_p}{Il}.$$

Las leyes de variación de los desplazamientos angulares correspondientes a las dos formas de las oscilaciones del árbol se representan en la figura 545.

Ejemplo 15.9. Determinar las frecuencias de las oscilaciones propias de la carrocería del automóvil (fig. 546), teniendo en consideración solamente los

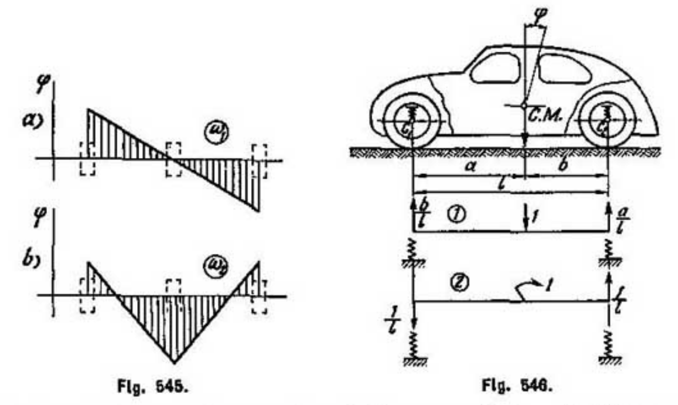


Fig. 545. Fig. 546.

desplazamientos verticales y angulares de la masa en el plano del dibujo. La masa de la carrocería es m y su momento de inercia respecto al eje central transversal, I.

Las características de las ballestas son lineales,

$$\lambda_1 = \frac{P}{c_1}, \quad \lambda_2 = \frac{P}{c_2},$$

siendo c_1 y c_2 los coeficientes de rigidez de las ballestas que se consideran dados. La posición del centro de gravedad se indica en el dibujo. El sistema tiene dos grados de libertad. El desplazamiento vertical del centro de gravedad se designa por ξ y el ángulo de giro de la carrocería, por φ. Las ecuaciones del movimiento, serán,

$$\xi = -\delta_{11} m\ddot{\xi} - \delta_{12} I\ddot{\varphi}, \quad \varphi = -\delta_{21} m\ddot{\xi} - \delta_{22} I\ddot{\varphi}.$$

Para determinar los ceficientes δ_{11}, δ_{12} y δ_{22} calculamos los esfuerzos que surgen en las ballestas bajo la acción de los factores de fuerza unitarios (fig. 546). Determinamos después los desplazamientos y ángulos de giro de la carrocería bajo la acción de estos factores de fuerza, obteniendo,

$$\delta_{11} = \frac{b^2}{l^2 c_1} + \frac{a^2}{l^2 c_2}, \quad \delta_{21} = \delta_{12} = \frac{b}{l^2 c_1} - \frac{a}{l^2 c_2}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{l^2 c_1} + \frac{1}{l^2 c_2}.$$

Las frecuencias se determinan por la fórmula (15.19) en la cual m_1 se sustituye por m y m_2, por I.

§ 106. Oscilaciones longitudinales de una barra homogénea

Anteriormente se demostró que el estudio de las oscilaciones del sistema que tiene n grados de libertad se reduce a la solución de n ecuaciones diferenciales conjuntas. Cuando $n=\infty$, es decir, en el caso de un sistema de masas distribuidas tiene lugar un paso

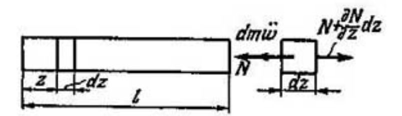


Fig. 547.

cualitativo en la ley indicada y surge la necesidad de resolver una sola ecuación, pero en derivadas parciales.

En calidad de sistema simple de masas destribuidas veamos la barra prismática homogénea en la que se generan oscilaciones longitudinales (fig. 547).

Sea ρ la densidad del material de la barra. Entonces la masa del elemento de la barra de longitud dz será,

$$dm = \rho F\, dz.$$

Si designamos por w el desplazamiento axial en una sección variable, entonces, analizando las condiciones de equilibrio del elemento dz, obtendremos fácilmente,

$$\rho F\ddot{w} = \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Por otra parte el alargamiento del elemento será,

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N}{EF}. \qquad (15.22)$$

Eliminando N de las dos ecuaciones obtenidas hallaremos,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\rho \partial^2 w}{E \partial t^2}. \tag{15.23}$$

Así pues, hemos obtenido la ecuación en la que la magnitud que se busca w es una función de dos variables independientes z y t.

Su solución es la siguiente,

$$w = Z \operatorname{sen} \omega t,$$

siendo Z, una función de un solo argumento independiente, z. Una vez introducida w en la ecuación (15.23) hallaremos,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\rho \omega^2}{E} Z = 0,$$

de donde se obtiene,

$$Z = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} z + B \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} z. \tag{15.24}$$

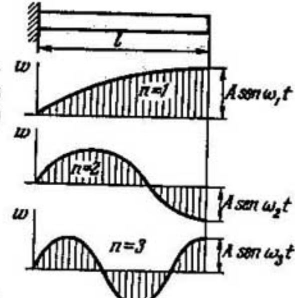


Fig. 548.

Las constantes A y B se determinan de las condiciones de borde de la barra. Por ejemplo, si la barra está libre en un extremo, entonces en éste $N=0$ y, de acuerdo a la expresión (15.22), $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. Si el extremo de la barra está empotrado entonces $w = Z = 0$.

Supongamos que la barra está empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho (fig. 548). Entonces cuando $z=0$ la función $Z=0$ y cuando $z=l$ su derivada $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. Así pues, obtenemos,

$$B = 0, \quad A \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} l = 0.$$

De la última expresión se deduce que ó $A=0$ ó $\cos \times \times \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} l = 0$. En el primer caso se obtiene para w una solución nula que no presenta interés. En el segundo caso,

$$\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\pi}{2} (2n - 1),$$

siendo n, un número entero arbitrario. De aquí se obtiene una serie de valores consecutivos de las frecuencias propias de las oscilaciones longitudinales de la barra,

$$\omega = \frac{\pi}{2l} (2n - 1) \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{15.25}$$

Así pues, la barra tiene una infinidad de frecuencias de las oscilaciones propias.

De acuerdo a estas frecuencias pueden surgir los correspondientes estados de resonancia. La frecuencia más baja o, como se dice, la frecuencia del tono fundamental será,

$$\omega = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Introduciendo ω (15.25) en la expresión (15.24) se puede determinar las formas de las oscilaciones correspondientes a los diversos valores de n,

$$Z = A \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{2l},$$

$$w = A \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{2l} \operatorname{sen} \omega t.$$

Las formas de las oscilaciones se representan en la figura 548. La aparición de una u otra forma de las oscilaciones depende de las condiciones iniciales de generación de las oscilaciones propias.

§ 107. Oscilaciones transversales de la viga

Veamos las oscilaciones transversales de una viga de sección constante F (fig. 549). La masa del tramo de la viga de longitud dz será,

$$dm = \rho F\,dz,$$

siendo ρ, la densidad del material.

Considerando que y es el desplazamiento transversal, obtendremos la fuerza de inercia correspondiente a la unidad de longitud de la viga,

$$q = -\rho F \ddot{y}.$$

El signo negativo indica que la carga q está orientada en la dirección opuesta a la flecha. Como del capítulo IV sabemos que,

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q,$$

obtendremos para las oscilaciones transversales de la viga,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\rho F}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \qquad (15.26)$$

Al igual que en el caso de las oscilaciones longitudinales admitimos la solución siguiente,

$$y = Z \operatorname{sen} \omega t,$$

que una vez introducida en la ecuación nos da,

$$Z^{(IV)} - a^4 Z = 0, \qquad (15.27)$$

siendo

$$a^4=\frac{\rho F\omega^2}{EI}. \qquad (15.28)$$

La solución de la ecuación (15.27) es,

$$Z=A\operatorname{sen} az+B\cos az+C\operatorname{sh} az+D\operatorname{ch} az. \qquad (15.29)$$

Las constantes A, B, C y D se obtienen de las condiciones de borde.

Supongamos que la viga está articulada en sus extremos, como se indica en la figura 549. Entonces en cada apoyo la flecha y y el momento flector $EI\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ serán iguales a cero y, por lo tanto, tendremos las siguientes condiciones de borde,

cuando $z=0$ $Z=0$ y $\frac{d^2Z}{dz^2}=0$,

cuando $z=l$ $Z=0$ y $\frac{d^2Z}{dz^2}=0$.

De las dos primeras condiciones se deduce que $B=D=0$. De las otras dos,

$$A\operatorname{sen} al+C\operatorname{sh} al=0,$$
$$-A\operatorname{sen} al+C\operatorname{sh} al=0.$$

Igualamos a cero el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix}\operatorname{sen} al & \operatorname{sh} al\\ -\operatorname{sen} al & \operatorname{sh} al\end{vmatrix}=0$$

ó

$$\operatorname{sen} al\cdot\operatorname{sh} al=0.$$

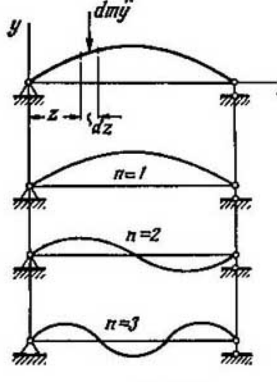


Fig. 549.

Como el seno hiperbólico se convierte en cero solamente cuando $al=0$, obtendremos,

$$\operatorname{sen} al=0,\ al=\pi n,$$

o de acuerdo con la notación (15.28),

$$\omega=\frac{\pi^2n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Como vemos también en el caso de las oscilaciones flexionantes se forma una secuencia infinita de frecuencias que, a diferencia de las oscilaciones longitudinales, son proporcionales no a la primera potencia de los números de la serie natural, sino a la segunda.

La forma de la línea elástica de la viga durante las oscilaciones transversales se determina de la expresión (15.29). Como $B=C=D=0$

y $a=\frac{\pi n}{l}$, obtendremos,

$$Z=A \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{l}.$$

En las oscilaciones correspondientes al tono fundamental la viga se flexiona según una semionda de sinusoide. Cuando $n=2$ aparecen dos semiondas, cuando $n=3$, tres, etc. (fig. 549). De acuerdo a estas frecuencias, cuando existen fuerzas exteriores que varían periódicamente, pueden aparecer estados de resonancia.

Las amplitudes de las diversas formas de las oscilaciones propias dependen de las condiciones iniciales, es decir, del tipo de perturbación. Si la perturbación se debe a un golpe sobre la viga entonces se oirán vibraciones acústicas de distinto tono según el lugar de la viga donde se dio el golpe. Si este último tiene lugar en el centro de la viga, entonces la máxima amplitud corresponderá a la forma fundamental de oscilaciones y a las que tienen un número impar de semiondas. Si el golpe se da en las proximidades de uno de los apoyos, jugarán un papel importante las formas con un número par de semiondas y el tono acústico de las vibraciones será otro.

Ejemplo 15.10. Determinar la frecuencia fundamental de las oscilaciones propias del voladizo homogéneo (fig. 550).

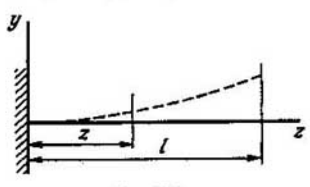


Fig. 550.

Para la función Z (15.29) se dispone de las siguientes condiciones de borde,

$$\text{cuando } z=0 \quad Z=0 \text{ y } \frac{dZ}{dz}=0.$$

En el extremo de la viga (cuando $z=l$) el momento flector y la fuerza cortante serán iguales a cero. Por lo tanto,

$$\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \quad \text{y} \quad \frac{d^3Z}{dz^3}=0.$$

Es decir, disponemos de cuatro ecuaciones,

$$B+D=0,$$
$$A+C=0,$$
$$-A \operatorname{sen} al-B\cos al+C \operatorname{sh} al+D \operatorname{ch} al=0,$$
$$-A\cos al+B \operatorname{sen} al+C \operatorname{ch} al+D \operatorname{sh} al=0.$$

Igualamos a cero el determinante de este sistema,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} al & -\cos al & \operatorname{sh} al & \operatorname{ch} al \\ -\cos al & \operatorname{sen} al & \operatorname{ch} al & \operatorname{sh} al \end{vmatrix} = 0,$$

obteniendo,

$$\operatorname{ch} al \cos al = -1. \tag{15.30}$$

La raíz mínima de esta ecuación transcendental será,

$$al = 1,875.$$

Teniendo en cuenta la notación (15.28) hallamos la frecuencia del tono fundamental,

$$\omega = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Para determinar las frecuencias superiores es necesario determinar las correspondientes raíces de la ecuación (15.30).

§ 108. Métodos aproximados de determinación de las frecuencias de las oscilaciones propias de los sistemas elásticos

La práctica de los cálculos de las oscilaciones de los sistemas elásticos demuestra que en la inmensa mayoría de los casos las simplificaciones que se admitieron en los problemas que más arriba se analizaron son incorrectas. Así, por ejemplo, generalmente la masa

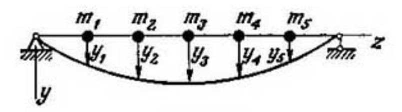


Fig. 551.

propia de las ligaduras elásticas (vigas, árboles) son comparables con las masas aplicadas. A su vez estas últimas rara vez se pueden interpretar como masas concentradas. Generalmente en la práctica de los cálculos nos encontramos con vigas o árboles de rigidez variable y de masa distribuida de manera no uniforme. En estos casos la determinación de las frecuencias de las oscilaciones propias por los métodos expuestos anteriormente resulta complicado y es preferible la solución aproximada. Más abajo veremos el más difundido de los métodos aproximados, el método de Rayleigh.

Supongamos dado cierto sistema oscilatorio compuesto, por ejemplo, por la ligadura elástica (la viga) y cierto número de masas fijadas a ella (fig. 551). Entre estas masas puede figurar también, por partes, la masa de la propia viga.

Veamos la forma de las oscilaciones del tono fundamental y admitamos que las oscilaciones de todas las masas son cofásicas. La ley del movimiento de la masa i será la siguiente,

$$y_i = A_i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi).$$

La velocidad de la masa i será,

$$\dot{y}_i = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

En el momento cuando todas las masas pasan por la posición de equilibrio y_i se convierte en cero y la velocidad $\dot{y}_i$ alcanza el valor máximo. El valor máximo lo alcanzará también la energía cinética del sistema,

$$K = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2.$$

La energía elástica potencial del sistema será, en este caso, igual a cero.

Cuando la desviación de las masas de la posición de equilibrio es la máxima, la energía cinética será igual a cero, mientras que la energía potencial de la viga flexionada será la máxima. Anotando esta última por U, obtendremos de la condición de la conservación de la energía,

$$\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2 = U$$

ó

$$\omega^2 = \frac{2U}{\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2}. \qquad (15.31)$$

Para poder calcular por esta fórmula la frecuencia es necesario conocer la forma de la línea elástica de la viga. Pero ésta puede ser determinada solamente sobre la base de la solución de la ecuación diferencial, es decir, sobre la base de los métodos exactos que conducen a cálculos muy complicados. Parece que el método energético de determinación de las frecuencias propias no tiene ventajas algunas. Sin embargo, como en el caso de determinación de las fuerzas críticas (capítulo XIV) aquí existe la posibilidad de determinar la frecuencia ω, no para la configuración exacta de la línea elástica de la viga, sino para otra, aproximada. En este caso la frecuencia que se obtiene por la fórmula (15.31) se diferencia poco del valor exacto.

Ejemplo 15.11. Determínese por el método de Rayleigh la frecuencia mínima de las oscilaciones propias longitudinales del sistema compuesto por la barra y la masa m aplicada a ésta (fig. 552). La masa de la barra es m_0, su longitud, l y su rigidez a la tracción EF.

Consideremos que el desplazamiento w para las diversas secciones de la barra es una función lineal de z (fig. 552),

$$w = A\frac{z}{l}$$

y calculamos, en este caso, la frecuencia ω por la fórmula (15.31).

En el caso de la barra traccionada la energía potencial será,

$$u = \int_0^l \frac{N^2\,dz}{2EF} = \frac{1}{2}EF\int_0^l \varepsilon^2\,dz,$$

y el alargamiento unitario,

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{A}{l}.$$

Por lo tanto,

$$U = \frac{1}{2l}A^2EF.$$

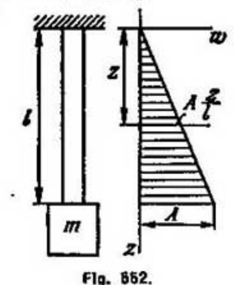


Fig. 552.

Determinamos después $\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2$. Esta suma deberá calcularse tanto para la barra, como para la masa aplicada,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2 = \int_0^l \frac{m_0}{l}\left(A\frac{z}{l}\right)^2 dz + mA^2.$$

La magnitud $\frac{m_0 dz}{l}$, que figura bajo el signo de la integral, constituye la masa del elemento de la barra de longitud dz y $A\frac{z}{l}$, el desplazamiento de este elemento. Por la fórmula (15.31) se obtiene,

$$\omega^2 = \frac{EF}{l\left(m + \frac{1}{3}m_0\right)}. \qquad (15.32)$$

Si la masa de la barra es pequeña, entonces,

$$\omega^2 = \frac{EF}{lm}.$$

Generalmente $^1/_3 m_0$ que figura en la expresión (15.32) se interpreta como la *masa reducida* y $^1/_3$, como el *coeficiente de reducción* que indica que parte de la masa del sistema elástico se debe unir a la masa oscilante principal para considerar la capacidad de inercia del elemento elástico, en el caso dado de la barra dada. La magnitud del coeficiente de reducción depende de las particularidades del sistema y, en una pequeña medida, de la ley de distribución admitida de los desplazamientos en el elemento elástico.

Ejemplo 15.12. Determinar el coeficiente de reducción para el voladizo con una masa instalada en su extremo (fig. 553, *a*).

La línea elástica de la viga durante las oscilaciones se admite, aproximadamente, igual a la de la solicitación estática por una fuerza aplicada en el extre-

mo (fig. 553, *b*). En este caso,

$$EIy = P\frac{z^3}{6} - Pl\frac{z^2}{2}.$$

Introduciendo la constante indeterminada A obtendremos,

$$y = A\,(z^3 - 3lz^2).$$

Calculamos ahora,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2 = my_{z=l}^2 l + \int_0^l \frac{m_0}{l} A^2 (z^3 - 3lz^2)^2 dz,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2 = 4A^2 l^6 \left(m + \frac{33}{140} m_0\right).$$

Es decir, que el coeficiente de reducción es 33/140.

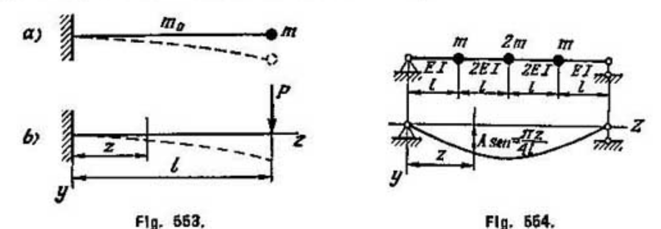


Fig. 553.

Fig. 554.

Ejemplo 15.13. Determinar por el método de Rayleigh la frecuencia inferior de las oscilaciones propias de la viga de rigidez variable (fig. 554) con tres masas aplicadas. Se puede prescindir del peso propio de la viga.

Admitimos que la línea elástica de la viga durante las oscilaciones puede ser representada por la función,

$$y = A\,\text{sen}\,\frac{\pi z}{4l}.$$

La energía potencial de la barra flexionada es,

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{4l} EIy''^2\,dz = EI\int_0^l A^2\left(\frac{\pi}{4l}\right)^2 \text{sen}^2\frac{\pi z}{4l}\,dz + 2EI\int_l^{2l} A^2\left(\frac{\pi}{4l}\right)^2 \text{sen}^2\frac{\pi z}{4l}\,dz.$$

Una vez realizada la integración hallaremos,

$$U = EIA^2 l\left(\frac{\pi}{4l}\right)^4\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\right).$$

Más adelante hallamos,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^2 = 2m\left(A\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2mA^2 = 3mA^2,$$

y por la fórmula (15.31),

$$\omega^2 = \frac{EI\pi^4}{384l^3 m}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\right).$$

En toda una serie de casos para la línea elástica se admite la que resulta, al aplicar al sistema ciertas fuerzas estáticas $P_i = m_i g$. Entonces la energía potencial U podrá ser representada como la suma de los trabajos de estas fuerzas en los desplazamientos correspondientes A, es decir,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i A_i.$$

La fórmula (15.31) será en este caso,

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i A_i^2}, \tag{15.33}$$

siendo A_i, la flecha en el punto i, originada por el sistema de fuerzas P_i.

Sobre la base de la expresión (15.33) se puede proponer un método de aproximaciones sucesivas para determinar las frecuencias de las oscilaciones propias. Veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 15.14. Determinar la frecuencia de las oscilaciones propias del árbol escalonado con discos masivos de 1 300 y 2 000 kgf respectivamente (fig. 555).

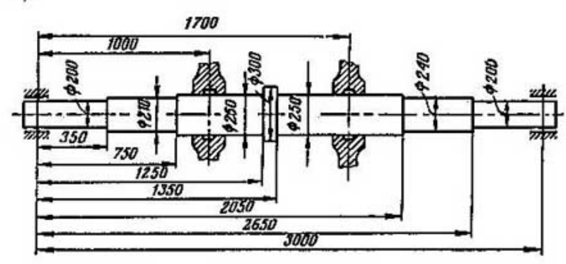


Fig. 555.

Para recurrir a la expresión (15.33) es necesario determinar la forma de la línea elástica del árbol. Como primera aproximación escogemos la línea elástica del árbol solicitado estáticamente por las dos fuerzas dadas y por el peso propio. Como la rigidez del árbol varía constantemente a lo largo del eje, la determinación de la línea elástica por el método analítico del capítulo IV presenta grandes dificultades. En estos casos se recurre al método gráfico o al método de la integración numérica. Este último actualmente se emplea más. Veamos este método.

Ante todo escogemos el paso de la integración a lo largo del eje del árbol $\Delta z = 10$ cm, dividiendo el árbol en 30 tramos. Interpretamos el peso propio del árbol como fuerzas concentradas aplicadas en estas secciones, incluyendo en

cada fuerza el peso del tramo del árbol de longitud 5 cm a la derecha y otro de igual longitud a la izquierda de la sección. El peso específico del material es $7,8\cdot 10^{-3}$ kgf/cm^3. Calculamos además para cada sección el valor de $EI=E\,\frac{\pi d^4}{64}$ ($E=2\cdot 10^6$ kgf/cm^2). Los resultados de los cálculos los ubicamos en la tabla 13.

Calculamos después el momento flector M_i en cada sección como la suma de los momentos de todas las fuerzas que se encuentran a un lado de la sección. Para ello, claro está, será necesario determinar las reacciones de apoyos. En nuestro caso la reacción en el apoyo izquierdo es 2226,9 kgf y en el derecho, 2076,1 kgf. Después de cálculos simples se llenan las columnas 4 y 5 de la tabla 13.

El ángulo de inclinación de la línea elástica ϑ se determina de la primera integración, es decir, sumando las magnitudes

$$\Delta\vartheta_i=\frac{M_i}{EI_i}\Delta z \quad \text{y} \quad \vartheta^*=\sum_{i=1}^{i}\frac{M_i}{EI_i}\Delta z.$$

La magnitud ϑ^* se diferencia del ángulo real ϑ en que, al calcularla no se han considerado aún las condiciones de apoyo de la barra.

Después de obtener los valores de ϑ^* determinamos los desplazamientos y^*, sin considerar las condiciones de borde

$$y^*=\sum_{i=1}^{i}\vartheta_i^*\Delta z.$$

Los resultados de los cálculos se ubican en las columnas correspondientes de la tabla 13.

Después de una doble integración se obtendrán dos constantes C_1 y C_2,

$$y=y^*+C_1z+C_2,$$

que se deberán escoger de manera tal que cuando $z=0$ y $z=l$ el desplazamiento y sea igual a cero. La primera condición se cumple cuando $C_2=0$ y la segunda, cuando

$$0=226,99+C_1\,300,$$

de donde se obtiene $C_1=-0,75664$. Así, pues, $y=y^*-0,75664\,z$. De esta ecuación se determinan los valores de y y se introducen en la última columna de la tabla 13.

Sumamos después los productos $P_i^{\text{I}}y_i$ y $P_i^{\text{I}}y_i^2$, obteniendo,

$$\sum_{i=1}^{n}P_i^{\text{I}}y_i=221,7\ \text{kgf}\cdot\text{cm},\qquad \sum_{i=1}^{n}P_i^{\text{I}}y_i^2=11,87\ \text{kgf}\cdot\text{cm}^2.$$

Entonces de acuerdo a la expresión (15.33),

$$\omega^2=18\,322s^{-2},\quad \omega=135,4s^{-1}.$$

Este valor buscado de la frecuencia se obtiene como primera aproximación. Para precisar el resultado se debe tener en cuenta que durante las oscilaciones el árbol se solicita no por las fuerzas del peso m_ig, sino por las de inercia $-m_i\ddot{y}$.

Como para el punto i,

$$y=y_i\,\text{sen}\,(\omega t+\varphi),$$

resulta,

$$\ddot{y}=-y_i\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t+\varphi).$$

Así pues, el valor máximo de la fuerza de inercia en el punto i será $my_1\omega^2$. Teniendo en cuenta los valores de y_i y ω^2 correspondientes a la primera aproximación y variando los valores de las fuerzas P_i^{I} en la relación $\frac{y_i\omega^2}{g}$ obtendremos que

Tabla 13

z, cm	$\frac{1}{EI}$, $\frac{1}{\text{kgf}\cdot\text{cm}^2}$	P_i^1, kgf	M_i, kgf·cm	$\frac{M_i}{EI}$, $\frac{1}{\text{cm}}$	ϑ^*	y^*, cm	$-y$, cm
0	$6{,}366\cdot10^{-11}$	12,2	0	0	0	0	0
10	6,366	24,5	22 100	$0{,}141\cdot10^{-5}$	$0{,}141\cdot10^{-4}$	$0{,}141\cdot10^{-3}$	$7{,}42\cdot10^{-3}$
20	6,366	24,5	44 000	0,280	0,421	0,562	14,57
30	6,366	24,5	65 700	0,418	0,849	1,411	21,29
40	5,277	26,9	87 100	0,460	1,309	2,720	27,55
50	5,277	26,9	108 300	0,571	1,880	4,600	33,23
60	5,277	26,9	129 100	0,681	2,561	7,161	38,24
70	5,277	26,9	149 700	0,790	3,351	10,512	42,45
80	2,602	38,2	170 100	0,443	3,794	14,306	46,23
90	2,602	38,2	190 000	0,494	4,288	18,594	49,50
100	2,602	1338,2	209 600	0,545	4,833	23,427	52,24
110	2,602	38,2	215 800	0,562	5,395	28,822	54,41
120	2,602	38,2	221 600	0,577	5,972	34,784	56,01
130	1,255	55,0	227 000	0,285	6,257	41,041	57,32
140	2,602	38,2	231 900	0,603	6,860	47,901	58,03
150	2,602	38,2	236 400	0,615	7,475	55,376	58,12

Continuación

z, cm	$\frac{1}{EI}$, $\frac{1}{\text{kgf}\cdot\text{cm}^2}$	P_i^1, kgf	M_i, kgf·cm	$\frac{M_i}{EI}$, $\frac{1}{\text{cm}}$	θ^*	y^*, cm	$-y$, cm
160	$2,602\cdot10^{-11}$	38,2	240 500	$0,626\cdot10^{-5}$	$8,101\cdot10^{-4}$	$63,477\cdot10^{-3}$	$57,58\cdot10^{-3}$
170	2,602	2038,2	244 200	0,635	8,736	72,213	56,41
180	2,602	38,2	227 600	0,592	9,328	81,541	54,65
190	2,602	38,2	210 600	0,548	9,876	91,417	52,34
200	2,602	38,2	193 100	0,502	10,378	101,795	49,53
210	3,064	35,1	175 300	0,537	10,915	112,710	46,18
220	3,064	35,1	157 200	0,482	11,397	124,107	42,35
230	3,064	35,1	138 800	0,425	11,882	135,929	38,10
240	3,064	35,1	120 000	0,368	12,190	148,119	33,47
250	3,064	35,1	100 900	0,309	12,499	160,618	28,54
260	3,064	35,1	81 500	0,250	12,749	173,367	23,36
270	6,366	24,5	61 700	0,393	13,142	186,509	17,78
280	6,366	24,5	41 600	0,265	13,407	199,916	11,94
290	6,366	24,5	20 600	0,131	13,538	213,454	5,97
300	6,366	12,2	0	0	13,538	226,992	0

el árbol se solicita por las fuerzas,

$$P_i^{II} = P_i^{I} \frac{y_i \omega^2}{g},$$

siendo P_i^I, los valores de las fuerzas e y_i, los desplazamientos de la tabla 13. Se repiten después plenamente los cálculos y se confecciona la tabla 14.

Efectuando la suma se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^{II} y_i = 221{,}4 \text{ kgf}\cdot\text{cm}, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i y_i^2 = 12{,}00 \text{ kgf}\cdot\text{cm}^2,$$

$$\omega^2 = 18\,099 s^{-2}, \quad \omega = 134{,}5 s^{-1}.$$

Una vez calculado el nuevo valor de ω se puede pasar a la aproximación siguiente. Para ello se calculan de nuevo los valores de las fuerzas suponiendo,

$$P_i^{III} = P_i^{II} \frac{y_i \omega^2}{g},$$

donde y_i y ω^2 corresponden ya a los resultados de la segunda aproximación y no de la primera.

En el ejemplo que analizamos, sin embargo, no hay necesidad de recurrir a las aproximaciones siguientes, puesto que los valores de ω obtenidos se diferencian poco el uno del otro. La diferencia entre los valores resulta sensiblemente menor no sólo que los errores propios de la integración numérica, sino que también menor que los errores que se cometen, al escoger el sistema de cálculo. Por ejemplo, la suposición según la cual los apoyos son absolutamente rígidos en las condiciones reales ya presupone de por sí un error mayor que el propio del método de cálculo de ω.

En la actualidad el método de Rayleigh de cálculo de las frecuencias se sustituye por los métodos mecánicos. El más difundido es el de los parámetros de origen que se explicó con detalle en el § 97. Veamos su aplicación en el mismo ejemplo del árbol escalonado (fig. 555).

En este caso en la ecuación de las oscilaciones,

$$(EIy'')'' + \rho F\ddot{y} = 0.$$

Las magnitudes EI y ρF varían de tramo en tramo, permaneciendo constantes en cada uno de ellos. Suponiendo que $y = Z \operatorname{sen} \omega t$, obtendremos,

$$Z^{IV} - \omega^2 \frac{\rho F}{EI} z = 0.$$

Escribimos esta ecuación en forma adimensional, suponiendo

$$Z = l\eta; \; z = l\zeta; \; w^2 = \frac{EI_1}{\rho F_1 l^4} \omega_0^2 \qquad (15.34)$$

siendo l, la longitud del árbol, I_1 y F_1, el momento de inercia y el área de la sección del primer tramo. Entonces la ecuación será,

$$\frac{d^4\eta}{d\zeta^4} - \frac{F}{F_1}\frac{I_1}{I}\omega_0^2\eta = 0.$$

Tabla 14

z, cm	$\frac{1}{EI}$, $\frac{1}{\text{kgf}\cdot\text{cm}^2}$	P_i^{II}, kgf	M_i, kgf·cm	$\frac{M_i}{EI}$, $\frac{1}{\text{cm}}$	ϑ^*	y^*, cm	$-y$, cm
0	$6{,}366\cdot10^{-11}$	0	0	0	0	0	0
10	6,366	3,39	21 400	$0{,}136\cdot10^{-5}$	$0{,}136\cdot10^{-4}$	$0{,}136\cdot10^{-3}$	$7{,}37\cdot10^{-3}$
20	6,366	6,66	42 800	0,273	0,409	0,545	14,48
30	6,366	9,74	64 200	0,408	0,817	1,362	21,17
40	5,277	13,84	85 400	0,451	1,268	2,630	27,41
50	5,277	16,70	106 500	0,562	1,830	4,460	33,09
60	5,277	19,20	127 400	0,672	2,502	6,962	38,10
70	5,277	21,32	148 100	0,782	3,284	10,246	42,33
80	2,602	32,97	168 700	0,439	3,723	13,969	46,11
90	2,602	35,30	188 900	0,491	4,214	18,183	49,11
100	2,602	1305,15	208 700	0,543	4,757	22,940	52,16
110	2,602	38,80	215 500	0,561	5,318	28,258	54,36
120	2,602	39,94	221 900	0,577	5,895	34,153	55,97
130	1,255	58,86	227 900	0,286	6,181	40,334	57,30
140	2,602	41,39	233 300	0,607	6,788	47,122	58,02
150	2,602	41,45	238 300	0,620	7,408	54,530	58,12

Continuación

x, cm	$\frac{1}{EI}$, $\frac{1}{kgf \cdot cm^2}$	P_i^{II}, kgf	M_i, kgf·cm	$\frac{M_i}{EI}$, $\frac{1}{cm}$	v^*	y^*, cm	$-y$, cm
160	$2,602 \cdot 10^{-11}$	41,06	242 900	$0,632 \cdot 10^{-5}$	$8,040 \cdot 10^{-4}$	$62,570 \cdot 10^{-3}$	$57,59 \cdot 10^{-3}$
170	2,602	2146,63	247 100	0,643	8,683	71,253	56,42
180	2,602	38,98	229 800	0,598	9,281	80,534	54,65
190	2,602	37,33	212 100	0,552	9,833	90,367	52,33
200	2,602	35,32	194 000	0,505	10,338	100,705	49,50
210	3,064	30,26	175 600	0,538	10,876	111,581	46,14
220	3,064	27,75	156 900	0,481	11,357	122,938	42,29
230	3,064	24,97	137 900	0,423	11,780	134,718	38,02
240	3,064	21,93	118 700	0,364	12,144	146,862	33,39
250	3,064	18,70	99 200	0,304	12,448	159,310	28,45
260	3,064	15,31	79 600	0,244	12,692	172,002	23,27
270	6,366	8,13	59 800	0,381	13,073	185,075	17,70
280	6,366	5,46	39 900	0,254	13,327	198,402	11,89
290	6,366	2,73	20 000	0,127	13,454	211,856	5,94
300	6,366	0	0	0	13,454	225,310	0

Introducimos tres nuevas variables,

$$\frac{d\eta}{d\zeta}=\eta_1;\quad \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}=\eta_2;\quad \frac{d^3\eta}{d\zeta^3}=\eta_3$$

y pasamos al sistema de cuatro ecuaciones de primer orden que escribimos en diferencias finitas,

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\eta=\eta_1\Delta\zeta;\ \Delta\eta_1=\eta_2\Delta\zeta;\ \Delta\eta_2=\eta_3\Delta\zeta;\\ \Delta\eta_3=\frac{F}{F_1}\frac{I_1}{I}\,\omega_0^2\eta\Delta\zeta.\end{array}\right\} \quad (15.35)$$

En el apoyo izquierdo el desplazamiento y y el momento flector son iguales a cero, por lo tanto $\eta_{\zeta=0}=0$ y $\eta_{2\zeta=0}=0$.

Las magnitudes $\eta_{1\zeta=0}=A$ y $\eta_{3\zeta=0}=B$ permanecen indeterminadas y deberán ser escogidas de manera tal que en el segundo extremo del árbol (cuando $\zeta=1$) se conviertan en cero el desplazamiento y el momento, es decir, $\eta_{\zeta=1}=0$ y $\eta_{2\zeta=1}=0$. Estas magnitudes dependen linealmente de A y B. Por lo tanto

$$\left.\begin{array}{l}\eta_{\zeta=1}=a_{11}A+a_{12}B=0;\\ \eta_{2\zeta=1}=a_{21}A+a_{22}B=0,\end{array}\right\} \quad (15.36)$$

siendo a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} ciertos coeficientes por ahora desconocidos.

Las frecuencias que se buscan se determinan de la condición

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=0.$$

El orden a seguir en los cálculos es el siguiente. Primeramente, para cada uno de los siete tramos se calculan los valores del coeficiente,

$$\frac{F}{F_1}\frac{I_1}{I}=\frac{d_1^2}{d^2},$$

siendo d_1, el diámetro en el primer tramo y d, el diámetro del tramo en cuestión.

Se escoge el paso de la integración $\Delta\zeta$, por ejemplo, $\Delta\zeta=0{,}01$, obteniendo respectivamente 100 tramos de integración en toda la longitud l. En este caso, en el programa se puede prescindir del bloque lógico para calcular el coeficiente $\frac{F}{F_1}\frac{I_1}{I}=f(\zeta)$ y simplemente introducir en la máquina la tabla de cien números, si esto lo permite la memoria de la máquina.

En los tramos donde figuran los discos masivos el valor del coeficiente $\frac{E}{E_1}\frac{I_1}{I}$ debe sustituirse por la magnitud $\frac{M}{M_1}\frac{I_1}{I}$, siendo M, la masa de la parte del disco correspondiente a la unidad de longitud del árbol y M_1, la masa del árbol por unidad de longitud del primer tramo.

Hallamos el orden del valor de la frecuencia adimensional ω_0. Para ello simplificamos al máximo el esquema de cálculo. Supongamos que la rigidez del árbol es constante e igual a EI_1 y los discos masivos son desplazados al centro de la luz. Entonces la frecuencia (véase el ejemplo 15.4) será $\omega = \sqrt{\frac{48\,EI_1}{Ml^3}}$, siendo M, la suma de las masas de los dos discos.

De acuerdo a las notaciones (14.34) obtenemos,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{48\rho F_1 l}{M}} = 3{,}26.$$

Suponemos ahora que $\omega_0 = 3{,}3$. El paso de la variación de la frecuencia $\Delta\omega_0$ se puede considerar, por ejemplo, igual a 0,1.

Integramos el sistema (15.35) de $\zeta=0$ a $\zeta=1$. Los valores originales de η y η_2 son iguales a cero. En lo que se refiere a los valores originales de η_1 y η_3 suponemos primeramente que $\eta_1 = A = 1$ y $\eta_3 = B = 0$ y después que $\eta_1 = A = 0$ y $\eta_3 = B = 1$. De la expresión (15.36) se deduce que en el primer caso (cuando $A=1$ y $B=0$) $\eta_{\zeta=1} = a_{11}$, $\eta_{2\zeta=1} = a_{21}$. De la segunda integración obtenemos a_{12} y a_{22}. Hallamos después el determinante D que no resulta ser igual a cero. Sumamos a ω_0 el incremento $\Delta\omega_0$ y calculamos de nuevo el determinante D. El nuevo valor se compara con el anterior. Si el determinante D cambia de signo, interpolando, hallamos la frecuencia adimensional ω_0 y después con su ayuda ω (15.34). Si se requiere determinar la segunda frecuencia, la tercera y las siguientes, este proceso se debe prolongar hasta dar con los siguientes cambios de signo del determinante D. El tiempo que requiere la máquina para esta operación se mide en segundos.

El método de los parámetros de origen adquiere gran importancia cuando se requiere, no sólo determinar la frecuencia sino también calcular las relaciones óptimas entre las dimensiones del objeto, partiendo de las exigencias impuestas por las características de las frecuencias.

§ 109. Número crítico de revoluciones del árbol

Las piezas que giran a gran velocidad no pueden ser balanceadas de forma ideal y en los casos prácticos siempre existen fuerzas de inercia originadas por el desbalanzamiento que desvían la pieza en rotación (árbol, rotor) del eje de rotación. Como lo demuestra la práctica, cuando las velocidades angulares de giro reciben valores determinados, denominados críticos las flechas del sistema son máximas y lo es también el cabeceo creciente. Al aumentar después el número de revoluciones este cabeceo disminuye. Este fenómeno tiene una explicación bastante simple, si analizamos el sistema

elástico como un sistema oscilatorio y las fuerzas del desbalanceamiento como fuerzas perturbadoras.

Supongamos dado un árbol sobre el cual se encuentra un disco de excentricidad e (fig. 556). Sea velocidad angular de giro del árbol Ω.

Las proyecciones de la fuerza $m\Omega^2 e$ sobre los ejes x e y serán,

$$P_x = m\Omega^2 e \cos \Omega t \text{ y } P_y = m\Omega^2 e \,\mathrm{sen}\, \Omega t.$$

Así pues, en los planos vertical y horizontal sobre el árbol actúan fuerzas perturbadoras de frecuencia Ω igual a la velocidad angular del árbol. En este caso, cuando la frecuencia de la fuerza perturbadora Ω es igual a la frecuencia de las oscilaciones transversales propias del árbol surge el estado de resonancia. Es decir, que la velocidad angular crítica es

$$\Omega_{\mathrm{crit}} = \omega.$$

Por lo tanto, cuando se calcula el número crítico de revoluciones de un árbol o rotor, se determina la frecuencia angular de las oscilaciones transversales que es precisamente igual a la velocidad angular crítica. Así, por ejemplo, en el último ejemplo numérico analizado en el parágrafo anterior para el árbol se obtiene,

$$\Omega_{\mathrm{crit}} = 134{,}5\,\mathrm{s}^{-1},\quad n_{\mathrm{crit}} = \frac{30\Omega_{\mathrm{crit}}}{\pi} = 1285 \text{ r.p.m.}$$

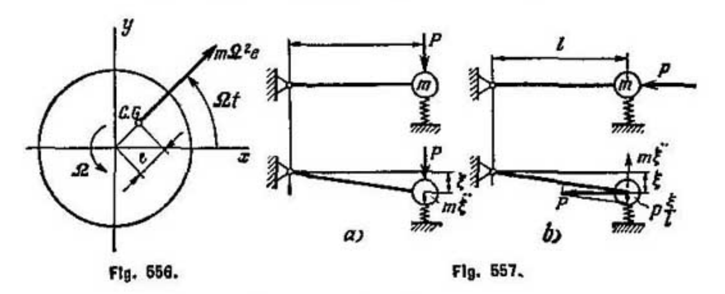


Fig. 556. Fig. 557.

§ 110. Resonancia paramétrica y autooscilaciones

Al resolver los problemas técnicos, con frecuencia nos encontramos con las, así denominadas, oscilaciones paramétricas y con el fenómeno de la resonancia paramétrica.

Veamos los dos sistemas oscilatorios simples de la figura 557.

La masa m se apoya sobre el muelle de rigidez c y está unida a una barra horizontal imponderable. A la masa se aplica una fuerza exterior perturbadora que varía según la ley periódica,

$$P = P_0 \,\mathrm{sen}\, \Omega t.$$

En el primer caso la fuerza P es vertical y en el segundo, horizontal. Introduciendo las fuerzas de inercia $m\ddot{\xi}$ planteamos las ecuaciones del movimiento

para los dos casos *a*) y *b*) (fig. 557),

$$\text{a) } \xi = \delta_{11}(P - m\ddot{\xi}),$$

$$\text{b) } \xi = \delta_{11}\left(P\frac{\xi}{l} - m\ddot{\xi}\right),$$

siendo δ_{11}, la magnitud inversa a c,

$$\delta_{11} = \frac{1}{c}.$$

Transformando las dos ecuaciones obtendremos,

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \ddot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{P_0}{m}\,\mathrm{sen}\,\Omega t, \\ &\text{b) } \ddot{\xi} + \omega^2\left(1 - \frac{P_0}{cl}\,\mathrm{sen}\,\Omega t\right)\xi = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (15.37)$$

siendo como de común,

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{c}{m}.$$

La primera ecuación (15.37) es la ecuación común de las oscilaciones forzadas. El sistema representado en la figura 557, *a* no tiene particularidades especiales que le diferencien de los sistemas análogos analizados anteriormente.

La segunda ecuación (15.37) se diferencia considerablemente de la primera. Ante todo, en ella no existe el primer miembro y, en este sentido, se le puede considerar como la ecuación de las oscilaciones propias, pero con coeficiente de rigidez variable. Basándonos en el tipo de la ecuación se puede afirmar que la acción de la fuerza sobre el sistema no es directa, sino indirecta. La acción exterior se reduce a la variación periódica de los parámetros de la ecuación. De aquí procede el nombre «oscilaciones paramétricas». La ecuación obtenida es la más elemental de las oscilaciones paramétricas y el sistema mecánico de la figura 557, *b* es un sistema oscilatorio con perturbación paramétrica.

Es característico de este sistema que las fuerzas exteriores realizan trabajo, no en los desplazamientos directos, sino en los secundarios que, como se ve de la figura 557, *b*, son de orden inferior. Es importante que la fuerza exterior, a diferencia del caso de las oscilaciones forzadas comunes, no es capaz, por sí sola, de originar desviaciones del sistema con respecto a la posición de equilibrio. Hace falta cierta acción exterior que comunique al sistema aunque sea una desviación pequeña después de la cual podrá ya apreciarse el papel de los factores periódicos exteriores (en nuestro caso la fuerza P).

En el caso de las oscilaciones paramétricas, como en el de las oscilaciones comunes, puede ocurrir un aumento brusco de la amplitud que, cuando no existe amortiguamiento, crece indefinidamente. Es posible la, así denominada, resonancia paramétrica. Sobre la base de razonamientos físicos simples es fácil establecer en qué caso esta resonancia es más probable.

Supongamos que debido a cierta causa, por ejemplo, a un golpe casual exterior, el sistema de la figura 557, *b* comienza a oscilar. Para que la fuerza horizontal P realice el trabajo máximo posible se requiere, claro está, que la fuerza P aumente, al desviarse la masa en una dirección, y vuelva a aumentar otra vez, al desviarse la masa en la otra dirección, es decir, se requiere que la fuerza P en el período completo del movimiento de la masa tenga tiempo de realizar dos períodos de las oscilaciones.

Así pues, resulta que la frecuencia de la variación de la fuerza P en la resonancia paramétrica deberá ser dos veces mayor que la frecuencia de las oscilaciones propias.

Al mismo tiempo el cabeceo del sistema es posible también cuando la fuerza exterior alcanza su valor máximo no al compás de cada desviación, sino cada dos, tres, cuatro, etc., tiempos. Por lo tanto en las oscilaciones paramétricas existe no un estado de resonancia, sino toda una serie de estados. Un estudio más detallado de esta cuestión demuestra que el estado de resonancia aparece no sólo cuando se cumplen exactamente las correlaciones indicadas entre las frecuencias. Existen zonas enteras de estados de resonancia. La anchura de estas zonas depende de la amplitud de la acción paramétrica (en el ejemplo que analizamos de la magnitud de P_0). La resonancia más importante es la correspondiente a la relación entre las frecuencias $\frac{\Omega}{\omega}$ próxima a 2. En los otros estados de resonancia, la transmisión de la energía al sistema será bastante menor y cuando hay dispersión, el cabeceo resulta o pequeño o inapreciable.

El sistema analizado con perturbación paramétrica no es el único. Se puede indicar toda una serie de sistemas simples y complicados donde es posible la aparición de la resonancia paramétrica. En la figura 558 se representan tres de estos sistemas.

En el péndulo común (fig. 558, *a*) aparece la primera resonancia paramétrica, al variar la longitud del hilo con una frecuencia igual al doble de la frecuencia de las oscilaciones transversales.

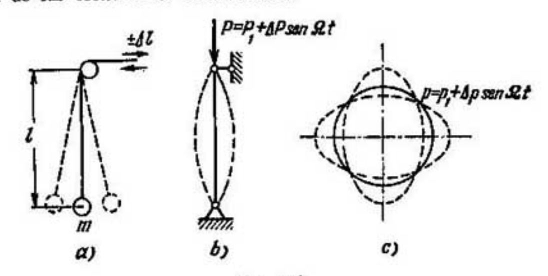


Fig. 558.

La barra solicitada por una fuerza pulsante (fig. 558, *b*) entra en el estado de resonancia paramétrica cuando la frecuencia Ω es también igual al doble de la frecuencia de las oscilaciones transversales ω. Esta última deberá calcularse para la barra, teniendo en cuenta la fuerza constante de compresión P_1. La condición que acompaña a la resonancia paramétrica en el caso de la barra comprimida se denomina con frecuencia condición de estabilidad dinámica de la barra.

En el tercer ejemplo (fig. 558, *c*) el recipiente cilíndrico se somete a la acción de la presión pulsante que varía según la ley

$$p = p_1 + \Delta p \operatorname{sen} \Omega t.$$

Aquí es necesario conocer la frecuencia de las oscilaciones flexionantes de la bóveda ω cuando actúa la presión p_1. La zona inferior de la resonancia aparece cuando Ω se acerca a 2ω.

Las oscilaciones en un sistema mecánico pueden surgir no sólo bajo la acción de las fuerzas periódicas exteriores perturbadoras, sino también cuando actúan factores constantes que no son periódicos. Las oscilaciones que en este caso surgen se denominan *autooscilaciones*.

En calidad de ejemplo simple que ilustra el fenómeno de las autooscilaciones se puede analizar el movimiento oscilatorio de la cuerda del violín que, a di-

ferencia de las cuerdas de otros instrumentos musicales, es perturbada no por un golpe, sino por el movimiento uniforme del arco.

Entre el arco y la cuerda surge una fuerza de fricción. El coeficiente de fricción depende de la velocidad del movimiento del arco respecto a la cuerda. Cuando la velocidad es nula, la fricción (fricción de reposo) es máxima y disminuye, al crecer la velocidad relativa. En la figura 559 se representa la dependencia aproximada entre el coeficiente de fricción f y la velocidad relativa v.

Supongamos que el arco se mueve por la cuerda. La fuerza de fricción arrastra la cuerda mientras se lo permita la tensión de la cuerda. En cierto momento (en el punto A de la figura 560), comienza el deslizamiento de la cuerda respecto al

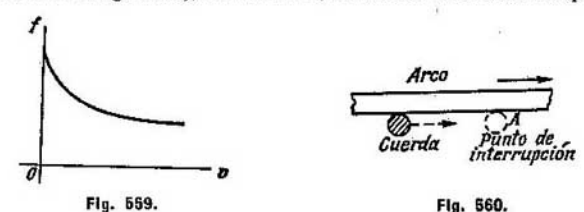


Fig. 559. Fig. 560.

arco. Esto está relacionado con la disminución de la fuerza de fricción. La cuerda comienza a moverse hacia la izquierda mientras que el arco sigue moviéndose hacia la derecha. La velocidad relativa aumenta mientras que la fuerza de fricción disminuye. La cuerda, debido a su inercia, pasa por su posición inicial de equilibrio, su velocidad disminuye hasta hacerse igual a cero y comienza de nuevo a moverse hacia la derecha.

Su velocidad respecto al arco disminuye, la fuerza de fricción arrastra de nuevo la cuerda hasta el punto A de interrupción y el proceso se repite. Si la característica de la fricción (fig. 559) no disminuyera con el aumento de la velocidad, no surgirían las autooscilaciones. Para obtener la característica necesaria de la fricción, el arco se unta con colofonia.

Como vemos en el ejemplo analizado el sistema es un sistema oscilatorio «intrínseco». La acción exterior no es periódica. La energía necesaria para mantener las oscilaciones proviene de la mano del violinista y se transmite por el arco.

Las autooscilaciones tienen gran importancia para muchos problemas prácticos y plantean en muchos casos serios problemas a los constructores al crear nuevas máquinas. Un ejemplo de estos problemas relativamente complicados y relacionados con las autooscilaciones es, en particular, el caso del flameo que consiste en las autovibraciones del ala del avión acompañadas de la torsión y la flexión cuando el ala se encuentra en el flujo aerodinámico. Otro ejemplo puede ser el problema muy importante de las autovibraciones de las ruedas directrices del automóvil cuando se mueve a gran velocidad.

§ 111. Cargas de impacto

Se entiende por carga de impacto toda carga que, en términos generales, varía rápidamente. El problema del cálculo de las estructuras sometidas a carga de impacto presenta de por sí muchas dificultades que no siempre se pueden vencer por los métodos más simples. A esto se refiere, ante todo, el análisis del estado tensional en la zona de contacto de los cuerpos que chocan y el proceso de variación, en

función del tiempo, de las fuerzas de contacto. La necesidad de considerar en los choques bruscos los grados de libertad adicionales del cuerpo elástico crea grandes complicaciones. En otros casos de solicitación estos grados de libertad pueden ignorarse. Un gran papel en el proceso del choque lo juega el factor de la dispersión de la energía que es muy difícil de analizar.

Más adelante veremos solamente los métodos más simples de cálculo que no proporcionan gran exactitud, pero que permiten de manera correcta valorar el orden de los desplazamientos, tensiones y deformaciones durante el impacto.

Veamos cómo actúa la carga de impacto sobre el sistema de un grado de libertad (fig. 561). La masa m se mueve en dirección horizontal con la velocidad v_0 y es parada por el elemento elástico de la figura 561 en forma de muelle. Consideramos que la masa del muelle es despreciablemente pequeña en comparación con la del peso.

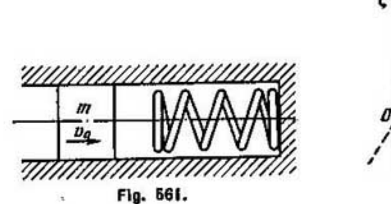


Fig. 561.

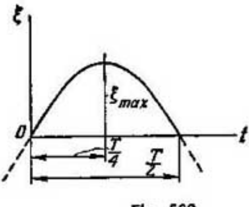


Fig. 562.

Cuando el peso entra en contacto con el muelle su velocidad comienza a disminuir y cuando toda la energía cinética del peso se transforme en energía potencial del muelle comprimido, el peso se parará, mientras que la fuerza que comprime el muelle alcanzará su valor máximo. Comenzará después el movimiento en dirección contraria y la fuerza de interacción entre el peso y el muelle disminuirá. Al restablecer el muelle su longitud inicial, el peso, en el caso de que no existan fuerzas de fricción, recibirá su velocidad inicial v_0, pero en dirección contraria.

El proceso del movimiento conjunto del peso y del muelle se puede describir por la ecuación de las oscilaciones armónicas que ya conocemos,

$$\xi = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t,$$

siendo $\omega = \sqrt{1/m\delta_{11}}$, la frecuencia de las oscilaciones propias del peso unido al muelle. Consideramos que el tiempo t se mide desde el momento en que el peso entra en contacto con el muelle. Entonces obtendremos las siguientes condiciones iniciales: cuando $t=0$

$\xi=0$ y $\dot{\xi}=v_0$. Esto nos permite determinar las constantes C_1 y C_2,

$$C_1=\frac{v_0}{\omega}, \quad C_2=0,$$

y entonces

$$\xi=\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t.$$

La ley de variación del desplazamiento del peso en función del tiempo se da en la figura 562. El desplazamiento máximo será

$$\xi_{max}=\frac{v_0}{\omega},$$

y tendrá lugar al pasar un tiempo igual a $\frac{T}{4}$ desde el momento de entrar en contacto el peso y el muelle. La máxima magnitud de la fuerza que comprime el muelle se donomina *carga dinámica* y es,

$$P_{max}=\frac{\xi_{max}}{\delta_{11}}=\frac{v_0}{\omega\delta_{11}}. \qquad (15.38)$$

La magnitud de la fuerza P_{max} se puede determinar también de la condición del balance energético. Igualando la energía cinética del peso en movimiento y la energía potencial del muelle comprimido obtendremos,

$$K_0=U, \quad \frac{mv_0^2}{2}=\frac{1}{2}P_{max}^2\delta_{11},$$

de donde hallamos,

$$P_{max}=v_0\sqrt{\frac{m}{\delta_{11}}}=\frac{v_0}{\omega\delta_{11}}$$

resultado que coincide con la expresión (15.38).

El planteamiento energético es preferible en aquellos casos cuando se requiere obtener solamente los valores máximos de las fuerzas dinámicas y de las flechas dinámicas y no se pretende determinar las leyes del movimiento de las masas. En los cálculos prácticos precisamente de esto se trata.

Veamos ahora el caso del movimiento vertical del peso que choca (fig. 563). Aquí, al plantear el balance energético, es necesario tener en consideración la variación de la energía potencial del peso en el desplazamiento f_d igual a la flecha dinámica que recibe el muelle,

$$K_0+\Pi=U,$$

siendo K_0, la energía cinética del peso en el momento de entrar en contacto con el muelle, Π, la variación de la energía potencial del peso en el desplazamiento f_d y U, la energía elástica del muelle comprimido. Es obvio que,

$$\Pi=mgf_d, \quad U=\frac{1}{2}\frac{f_d^2}{\delta_{11}}.$$

Entonces,

$$2\delta_{11}K_0+2\delta_{11}mgf_d=f_d^2.$$

El producto $\delta_{11}mg$ es igual a la flecha f_{est} que recibe el muelle bajo la acción de la fuerza igual al peso de la masa que cae, pero aplicada estáticamente. Por lo tanto,

$$f_d^2 - 2\delta_{11}K_0 - 2f_{est}f_d = 0,$$

de donde se obtiene

$$f_d = f_{est}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}K_0}{f_{est}^2}}\right].$$

La magnitud que figura entre los corchetes se denomina *coeficiente dinámico*. Anotándolo por $\varkappa$,

$$\varkappa = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}K_0}{f_{est}^2}}, \qquad (15.39)$$

obtendremos

$$f_d = \varkappa f_{est}. \qquad (15.40)$$

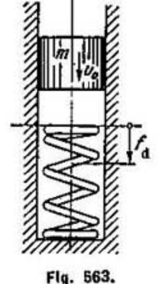


Fig. 563.

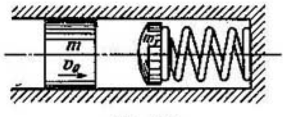


Fig. 564.

El coeficiente dinámico muestra cuántas veces la flecha debida al impacto, es mayor que la flecha que ocurre cuando la carga se aplica estáticamente. En la misma proporción varían las fuerzas interiores y las tensiones,

$$\sigma_d = \varkappa\sigma_{est}. \qquad (15.41)$$

La magnitud $\varkappa$ depende, ante todo, de la rigidez del sistema y de la energía cinética del peso que cae. Si, por ejemplo, el peso se aplica al sistema elástico de manera repentina sin velocidad inicial entonces la energía cinética será $K_0=0$ y $\varkappa=2$. En este caso la flecha máxima es dos veces mayor que la que surge en el caso de solicitación estática. Las tensiones también resultan ser dos veces mayores.

Todo lo dicho hasta aquí se refiere al caso cuando el peso choca directamente con el elemento elástico de masa muy pequeña. Generalmente entre el peso que choca y el sistema elástico existe una pieza intermedia (el parachoques) de masa m_1 (fig. 564).

Al estudiar el impacto en este caso es necesario diferenciar dos tipos de deformaciones: las deformaciones locales de los pesos, que aparecen en la zona de contacto, y las deformaciones generales del muelle.

Las deformaciones locales se rigen por leyes complejas y no se pueden determinar con los métodos de la resistencia de los materia-

les. En lo que se refiere a las deformaciones generales del muelle, éstas se determinan fácilmente sobre la base de las relaciones energéticas, considerando que el impacto entre el peso y el parachoques no es elástico y que las dos masas después del impaco se mueven con la velocidad común v_1.

Entonces de la condición de conservación de la cantidad de movimiento se obtiene,

$$mv_0 = (m + m_1)\, v_1,$$

ó

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m + m_1}.$$

El proceso posterior de compresión del muelle transcurre de la misma forma que en los casos analizados anteriormente. La única diferencia consiste en que ahora en lugar de la masa m con el muelle choca la masa $m + m_1$ con la velocidad v_1 en lugar de v_0. La energía cinética correspondiente será,

$$\frac{1}{2}(m + m_1)\, v_1^2 = \frac{K_0}{1 + \frac{m_1}{m}},$$

siendo K_0, como antes, la energía cinética del peso en movimiento.

Por lo tanto, cuando existe la masa intermedia del parachoques m_1 se pueden aplicar las fórmulas anteriores, introduciendo la corrección indicada en la magnitud de la energía cinética. La fórmula (15.39) será en este caso,

$$\varkappa = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11} K_0}{f_{\text{est}}^2 \left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}}. \qquad (15.42)$$

En la magnitud m_1 se puede incluir también la masa del muelle m_m reducida previamente al punto de impacto (véanse los ejemplos 15.11 y 15.12). Entonces, en la fórmula (15.42), en lugar de m_1, se deberá introducir $m_1 + km_m$, siendo k el coeficiente de reducción de la masa del muelle. Se debe, sin embargo, tener en cuenta que este método de consideración de la masa del elemento elástico puede precisar el cálculo solamente en lo que se refiere a la determinación de los desplazamientos, pero no de las tensiones.

Ejemplo 15.15. La cabina que pesa $P = 2$ tf baja a la velocidad de $v_0 = 1$ m/s. Realícese el cálculo de comprobación de la resistencia en el caso de una avería que consiste en el atascamiento inesperado del cable. La longitud del cable l en el momento del atascamiento se supone igual a 10 m. El módulo de elasticidad reducido *) del cable es $E = 0{,}7 \cdot 10^6$ kgf/cm², $F = 4$ cm² y la carga admisible del cable, 12 tf.

*) El módulo de elasticidad del cable a la tracción, debido a que se endereza el cordón, es bastante menor que el módulo de elasticidad del material de los hilos.

En este caso no se puede recurrir a la fórmula (15.39) para la determinación del coeficiente dinámico puesto que en el momento del choque sobre el cable actúa ya la carga estática igual al peso de la cabina. Al pararse la cabina su energía cinética es $\frac{Pv_0^2}{2g}$ y la energía potencial correspondiente al desplazamiento $f_d - f_{est}$ se transforma en energía potencial adicional del cable,

$$\frac{1}{2}\frac{f_d^2}{\delta_{11}} - \frac{1}{2}\frac{f_{est}^2}{\delta_{11}}.$$

Así pues, obtenemos la ecuación del balance energético,

$$\frac{Pv_0^2}{2g} + P(f_d - f_{est}) = \frac{1}{2\delta_{11}}(f_d^2 - f_{est}^2).$$

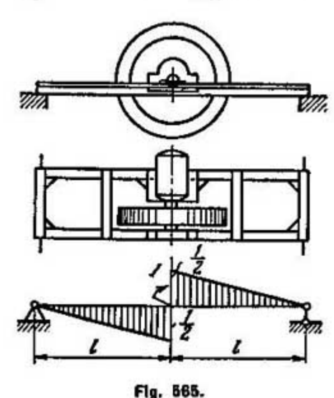


Fig. 565.

Pero como $P\delta_{11} = f_{est}$ hallaremos,

$$f_d^2 - 2f_{est}f_d + f_{est}^2 - \frac{v_0^2 f_{est}}{g} = 0$$

y entonces

$$f_d = f_{est}\left[1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{gf_{est}}}\right].$$

En este caso claro está,

$$\delta_{11} = \frac{l}{EF} \text{ y } f_{est} = \frac{Pl}{EF}.$$

El coeficiente dinámico será,

$$\varkappa = 1 + \sqrt{\frac{EFv_0^2}{Plg}} = 4,8$$

y, por lo tanto,

$$P_d = \varkappa P_{est} = 9,6 \text{ tf},$$

es decir, que el cable satisface en este caso la condición de resistencia.

Ejemplo 15.16. El volante de momento de inercia I_m gira con n revoluciones. Sobre el pórtico compuesto por dos vigas se instala un motor eléctrico (fig. 565). El momento de inercia del estator del motor eléctrico y de los apoyos de los cojinetes respecto al eje del volante es I_{m1}. Determínese el momento dinámico M_d que actúa sobre el pórtico cuando el volante se para de repente.

Igualamos la energía cinética del volante a la energía potencial de la flexión del pórtico. Tenemos en cuenta la correlación de que el choque con la masa fija no es elástico

$$\frac{1}{1+\frac{I_{m1}}{I_m}} K_0 = U,$$

o sea,

$$\frac{1}{1+\frac{I_{m1}}{I_m}} \frac{I_m}{2} \left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 = \frac{1}{2} M_d^2 \delta_{11}.$$

La magnitud δ_{11} se determina, multiplicando el diagrama unitario (fig. 565) por sí mismo,

$$\delta_{11} = \frac{l}{6EI},$$

siendo I, el momento de inercia total de las secciones transversales de las vigas. Así pues, como resultado obtenemos,

$$M_d = \frac{\pi n}{30} I_m \sqrt{\frac{1}{I_m + I_{m1}} \frac{6EI}{l}}.$$

Capítulo XVI

METODOS EXPERIMENTALES DE INVESTIGACION DE LOS ESTADOS TENSIONAL Y DE DEFORMACION

§ 112. Ensayo de los materiales y ensayo de las estructuras

Cuando se habla de los métodos experimentales de medición de las deformaciones y de las tensiones se debe diferenciar entre los ensayos mecánicos de los materiales y los ensayos de las estructuras.

El ensayo de los materiales se realiza para determinar las características mecánicas tales como el límite de fluencia, límite de rotura, módulo de elasticidad, etc. Puede realizarse también el ensayo con el propósito de investigar, por ejemplo, las condiciones de resistencia en los estados tensionales complejos o, en general, para establecer las propiedades mecánicas del material en las diversas condiciones.

Los ensayos de los materiales se realizan con probetas, cuyas dimensiones y formas pueden variar según los aparatos de medición de que se disponga y las propias condiciones de los ensayos.

Para obtener características objetivas del material se debe cumplir la condición de homogeneidad del estado tensional, es decir, se debe garantizar que el estado tensional sea constante para *todos* los puntos de la probeta que se ensaya. Esta condición se cumple, por ejemplo, al traccionar, en parte, al comprimir una probeta corta y al torsionar un tubo de paredes delgadas. La variación de las propiedades del material en estos ensayos ocurre simultáneamente en todo el volumen de la probeta y es fácil de evaluar cuantitativamente. En los ensayos a torsión de probetas macizas y en los ensayos a flexión, el estado tensional no es homogéneo. Las variaciones cualitativas de las propiedades del material en puntos aislados no originan variaciones sensibles de las características de la probeta. Los procesos que transcurren en el material se manifiestan sólo en su valor medio y los resultados de los ensayos exigen un estudio suplementario durante el cual se pierde el grado de objetividad.

La exigencia de homogeneidad del estado tensional implica serias limitaciones sobre los resultados de muchos tipos de ensayos. En particular, hasta ahora no se ha conseguido realizar ensayos objetivos en condiciones de tracción triaxial homogénea. Este estado tensional se puede crear por ahora solamente en puntos ais-

lados de la probeta, por ejemplo, en el centro de una esfera maciza que se calienta rápidamente desde el exterior.

Uno de los tipos de ensayos mecánicos son las *pruebas tecnológicas* que permiten obtener características que no son objetivas, sino solamente comparativas de los materiales y que se llevan a cabo en condiciones severamente reglamentadas. A este tipo se refiere la determinación de la dureza, tenacidad y otros. En cierta medida a las pruebas tecnológicas se refieren también los ensayos para la determinación de la resistencia a la fatiga.

Cuando se habla del ensayo de una estructura se tiene en cuenta la determinación de la resistencia de toda una máquina, de sus nudos por separado o de modelos. Este ensayo tiene el propósito, por una parte, de comprobar la exactitud de los cálculos realizados y, por otra, de comprobar los procesos tecnológicos admitidos para la elaboración de los nudos y el montaje, puesto que en el caso de procesos tecnológicos insuficientemente correctos puede ocurrir una debilitación local de la estructura. El ensayo de las estructuras está ampliamente desarrollado en las ramas de la técnica como la construcción de aviones y la construcción de cohetes donde debido a la necesidad de economizar el peso, los problemas de la resistencia son fundamentales. Al crear una nueva máquina, sus diversos nudos una vez elaborados se someten a ensayos estáticos hasta obtener la rotura completa para determinar la, así denominada, carga de rotura. Esta carga se compara después con la obtenida por el cálculo. El carácter de la aplicación de las fuerzas en los ensayos estáticos se establece de manera que se imiten las cargas de trabajo para un caso determinado de cálculo, previamente elegido, por ejemplo, en el caso del chasis del avión, el momento de aterrizaje, en el caso de las alas, la salida del picado, etc.

Aparte de los ensayos estáticos con frecuencia surge la necesidad de realizar ensayos dinámicos. Por ejemplo, son muy difundidos los ensayos de los dispositivos que trabajan en las condiciones de vibraciones. Estos ensayos se realizan en mesas vibratorias especiales para diferentes frecuencias y amplitudes. En estos ensayos la medición de las deformaciones y de las tensiones en las piezas vibrantes del dispositivo generalmente no se realiza. Se juzga sobre la resistencia de nudos aislados solamente en el caso de que se destruyan. En toda una serie de casos los ensayos dinámicos se realizan, midiendo con oscilógrafos las deformaciones que transcurren rápidamente y que surgen en los nudos más peligrosos.

Los métodos actuales de investigación experimental de las estructuras tensionadas se reducen, de una u otra menera, a la medición directa de las deformaciones que surgen en el objeto que se ensaya. Las tensiones se determinan de manera indirecta a través de las deformaciones, basándose en la ley de Hooke. En el caso de deformaciones plásticas, la determinación de las tensiones, al ensayar

las estructuras, generalmente no se lleva a cabo y se determina exclusivamente la carga de rotura o el valor de la fuerza cuando aparecen síntomas de la aparición de deformaciones plásticas.

Para medir las deformaciones se emplean varios métodos diferentes. Más adelante nos detendremos en la medición de las deformaciones mediante dispositivos (tensómetros) basados en principios de medición mecánicos y eléctricos. Se analizarán también los métodos óptico, de los rayos X, de las franjas de muaré y de recubrimiento con barniz.

§ 113. Determinación de las deformaciones con tensómetros mecánicos

El principio del trabajo del tensómentro mecánico se basa en la medición de la distancia entre dos puntos de la probeta antes y después de la solicitación. La distancia inicial entre estos dos

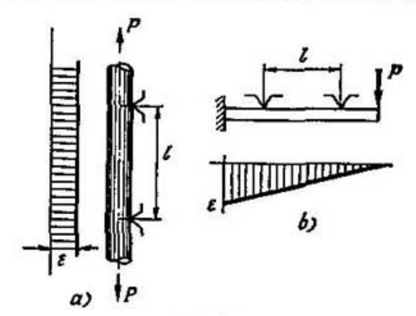


Fig. 566.

puntos se denomina base del tensómetro l. La razón entre el incremento de la longitud de la base Δl y l nos da el valor medio del alargamiento en la dirección del tensómetro. Si el estado deformacional es homogéneo, entonces el resultado de la medición determinará el valor exacto de la deformación que se busca como ocurre, por ejemplo, en el caso de la tracción de una barra (fig. 566, *a*). Si las deformaciones a lo largo de la base varían entonces el valor medio medido de la deformación será tanto más próximo al valor real, cuanto menor sea la base del tensómetro (véase el caso de la flexión de la barra, fig. 566, *b*).

Al ensayar los materiales a tracción, cuando está garantizada la homogeneidad de las deformaciones, la longitud de la base se limita por las dimensiones de la probeta y se escoge grande. Generalmente en este caso el valor de l es 50, 100, 150 y 200 *mm*.

Al ensayar las estructuras, el aumento de la base se limita por el error relacionado con la heterogeneidad de las deformaciones y la disminución de la base, por la pérdida de exactitud debida a los errores de los instrumentos. Generalmente la base de los tensómetros mecánicos que se emplean en los ensayos de las estructuras es del orden de $2 \div 20$ mm.

Para la medición exacta de los alargamientos elásticos al determinar el módulo de elasticidad del material se emplea ampliamente el tensómetro de Martens con palanca óptica (fig. 567).

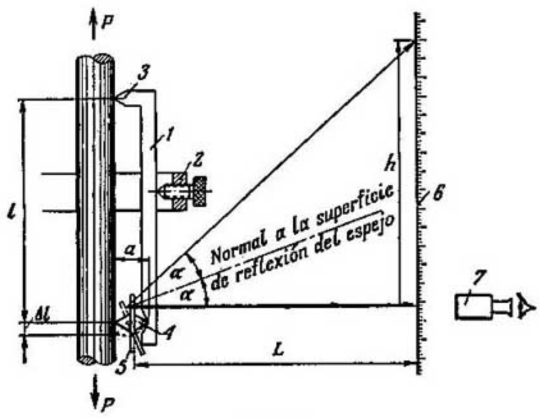


Fig. 567.

El tensómetro consta del listón rígido *1* que se aprieta a la probeta mediante la prensa de tornillo *2*. El cuchillo superior *3* del listón rígido es inmóvil. En calidad de segundo cuchillo se emplea el prisma templado *4* de sección rómbica. La longitud de la diagonal del prisma es a. El espejo *5* se une rígidamente al prisma. A la distancia L del espejo se instala la regla graduada inmóvil *6*. Al alargarse la probeta, el espejo gira y el observador por el tubo *7*, ve la lectura correspondiente en la imagen de la escala reflejada. El aumento del dispositivo se determina por la razón entre la diferencia de las lecturas en la escala en milímetros y la magnitud Δl que también se mide en milímetros.

El ángulo de giro del espejo,

$$\alpha = \frac{\Delta l}{a}.$$

La diferencia entre las lecturas en la regla antes y después de la

solicitación es, teniendo en cuenta que α es pequeño,

$$h = L\cdot 2\alpha.$$

Eliminando el ángulo α, hallamos el coeficiente de aumento del dispositivo,

$$i = \frac{h}{\Delta l} = \frac{2L}{a}.$$

Generalmente en el tensómetro de Martens la escala se instala de manera tal que (la elección del tamaño L) $i \approx 500$.

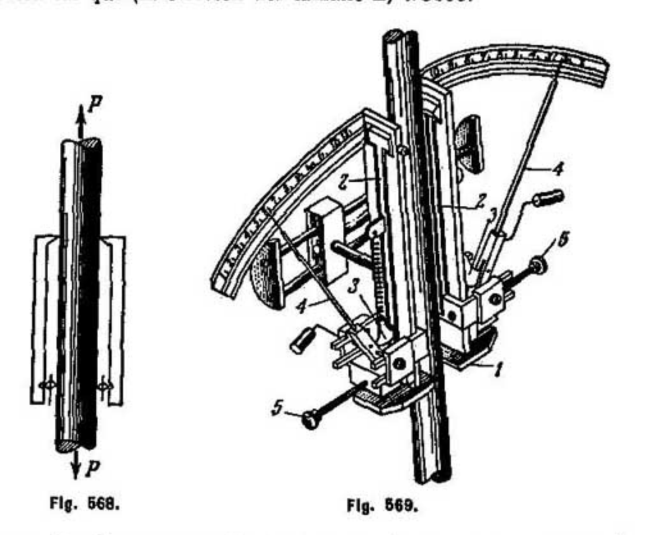


Fig. 568. Fig. 569.

Para evitar los errores relacionados con la tracción excéntrica de la probeta y con la posible flexión se practica la instalación de dos tensómetros como se indica en la figura 568. Escogiendo el valor medio de los dos dispositivos se elimina la influencia de la flexión.

El tensómetro doble de Martens es incómodo puesto que requiere un trabajo minucioso para instalarlo. Menos exactos, pero más cómodos en el trabajo son los tensómetros de buena recomendación, MIL y de Boyárshinov de base grande representados en las figuras 569 y 570.

El tensómetro MIL (fig. 569) tiene una base de 100 mm y está compuesto por palancas articuladas. Este es un tensómetro doble que se instala en la probeta por un sujetador con muelle. El apoyo inferior *1* es inmóvil y el superior constituye un todo con la palanca *2*.

El desplazamiento del extremo inferior de esta palanca se transmite al elemento *3* y de éste a la aguja *4*. Mediante el tornillo *5* se puede hacer coincidir antes del ensayo la aguja con el cero. Si las deformaciones de la probeta son tan grandes que la aguja sale fuera de los

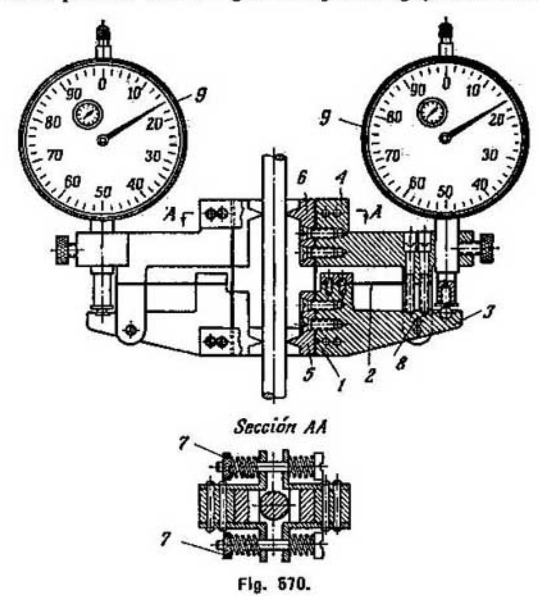


Fig. 570.

límites de la escala graduada, con este mismo tornillo se puede volver durante el ensayo la aguja a su posición inicial. La amplificaión del tensómetro MIL es 500.

El tensómetro de Boyárshinov (fig. 570) en lugar de articulaciones mecánicas tiene una articulación elástica compuesta por dos muelles planos *1*, *2*. Las piezas de aluminio *3*, *4* giran al traccionar la probeta respecto al punto de intersección de los muelles. La articulación elástica tiene la ventaja de que carece de la zona muerta que es característica para las articulaciones comunes mecánicas y es debida a la fricción seca. El tensómetro tiene dos cuchillos de acero templado *5*, *6* con los cuales se fija en la probeta mediante los tornillos *7*. Durante la instalación el dispositivo se cierra mediante la espiga *8* que fija las piezas *3*, *4*. Las deformaciones se miden con los indicadores *9*.

El tensómetro de Boyárshinov permite realizar las mediciones sin cambiar de posición la escala cuando las deformaciones son menores del 4%. Los otros tensómetros no permiten una medición tan amplia de las deformaciones. La base del tensómetro es $l=50$ mm y la amplificación es de cerca de 500.

Al medir las deformaciones de las probetas que se ensayan a tracción y compresión se recomienda el tensómetro de Líjariev de palanca «hidráulica» (fig. 571). Las piezas fundamentales de este tensómetro son las cajas metálicas onduladas (tubos ondulados flexibles o silfones *1*, *2*) que forman una cavidad cerrada que se comunica con el capilar *3*. La cavidad entre las cajas onduladas se llena de líquido. Al alargarse la probeta, el volumen de la cavidad aumenta y baja así la magnitud h el nivel del líquido en el capilar.

De la condición de invariabilidad del volumen del líquido se obtiene,

$$(\pi R^2-\pi r^2)\ \Delta l = hF,$$

siendo R, el radio medio del silfón grande y r, el del silfón pequeño, F, el área de la sección del capilar. Así pues, la amplificación del tensómetro resulta $\pi\frac{R^2-r^2}{F}$ y depende de las dimensiones de los silfones y del capilar. Generalmente la amplificación es del orden de 2 000.

La instalación del dispositivo en la probeta se realiza con el tornillo *4*. Para variar el nivel del líquido en el capilar y para instalar el dispositivo en cero se emplea el tornillo *5*. La base mínima del dispositivo es cerca de 20 mm.

El aspecto general del tensómetro de Líjariev se da en la figura 572.

Entre los tensómetros mecánicos que se emplean no sólo para los ensayos mecánicos de los materiales sino también para los ensayos de las estructuras y que tienen base relativamente pequeña, el más difundido en la práctica de los laboratorios, es el tensómetro de palancas articuladas de Huggenberguer (fig. 573) cuya base es 20 mm y la amplificación, cerca de 1 000.

Los tensómetros mecánicos de menor base no tienen gran aplicación y son únicos. Los intentos de algunos investigadores de introducir en la práctica de los laboratorios estos tensómetros no han tenido éxito puesto que, al ensayar los materiales, son preferibles los tensómetros de base mayor y para ensayar las estructuras los tensómetros han sido sustituidos en la actualidad por los captadores tensométricos de resistencia.

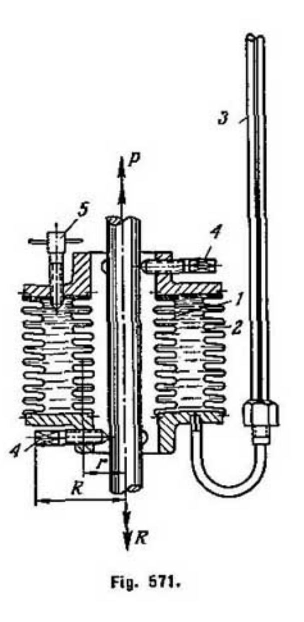


Fig. 571.

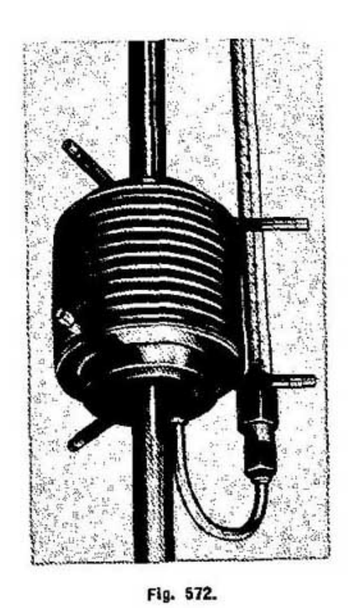


Fig. 572.

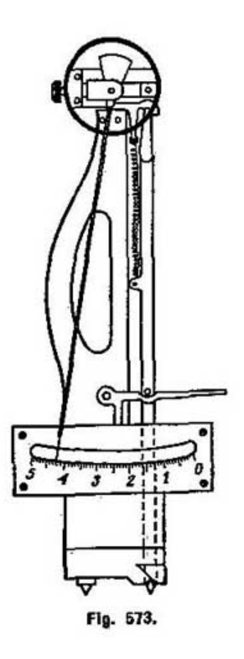


Fig. 573.

§ 114. Captadores tensométricos de resistencia

En la técnica de los ensayos de las estructuras en las últimas décadas se han difundido ampliamente los captadores tensométricos de hilo resistente.

El captador tensométrico de hilo resistente consta de un alambre fino en forma de zigzag que se pega a una franja de papel (fig. 574) de espesor 0,015—0,030 mm. A los extremos del alambre, por soldadura, se unen los cables.

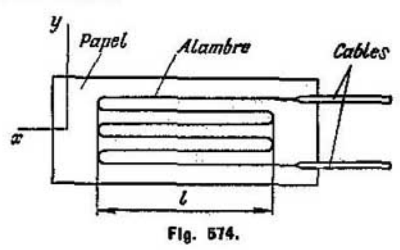


Fig. 574.

El captador se pega sobre la superficie de la pieza que se investiga de manera que la dimensión de la base l coincida con la dirección en que se desea medir la deformación. Cuando el tensómetro está bien pegado, el alambre se alarga junto con la superficie del objeto que se estudia y la resistencia óhmica del alambre varía, lo que se registra como el índice de la deformación.

La experiencia demuestra que la variación unitaria de la resistencia óhmica del alambre $\frac{\Delta R}{R}$ es proporcional a su alargamiento, $\frac{\Delta R}{R}=\gamma_0\varepsilon$, siendo γ_0, el coeficiente de sensibilidad tensométrica del captador, magnitud adimensional que depende de las propiedades físicas del material. Para los materiales que se emplean en los captadores tensométricos de resistencia, γ_0 varía entre 2 y 3,5. Para el constantán, por ejemplo, $\gamma_0=2{,}0—2{,}1$, para el nicromo 2,1—2,3 y para el hilo de invar, 3,2—3,5, etc.

El captador tensométrico de hilo resistente debido a las curvas de éste en los extremos de las filas, reacciona no sólo a las deformaciones longitudinales, sino también a las transversales y

$$\frac{\Delta R}{R}=\gamma\varepsilon_x+\delta\varepsilon_y,$$

siendo ε_x y ε_y, los alargamientos en la dirección de los ejes x e y (fig. 574) y γ y δ, los coeficientes de sensibilidad tensométrica longitudinal y transversal del captador que se determinan durante el calibrado.

La magnitud de γ, debido a las curvas en los extremos de las filas, resulta ser un poco menor que el coeficiente de sensibilidad tensométrica del alambre γ_0. A medida que aumenta la base l la diferencia entre γ y γ_0 disminuye y, en el caso del captador que comúnmente se emplea de base $l=20$ mm, resulta insignificante. El coeficiente δ es una magnitud también pequeña, del mismo orden. En los captadores de base pequeña ($l<5$ mm), la magnitud de δ es comparable con γ y, al calcular las tensiones, debe tenerse en cuenta el coeficiente de sensibilidad tensométrica transversal.

Al estudiar el estado tensional en los elementos de una estructura compleja, con frecuencia surge la necesidad de determinar no sólo la magnitud, sino también la dirección de las tensiones principales. En este caso se practica la instalación en la zona que se investiga,

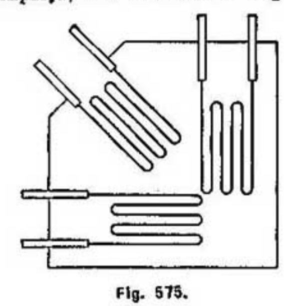


Fig. 575.

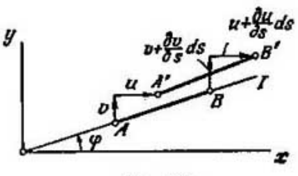


Fig. 576.

de tres captadores simultáneamente y en direcciones que forman ángulos de 45° (fig. 575); se coloca como se dice, una roseta de captadores. Sobre la base de los tres alargamientos medidos se puede, sin dificultad, obtener los alargamientos principales y el ángulo que determina la posición de los ejes principales. Esto se realiza de la manera siguiente: supongamos dadas las deformaciones según los ejes principales x e y (fig. 576). Como la proyección de la línea quebrada $AA'B'B$ sobre el eje I es igual al segmento AB, es fácil demostrar que la diferencia de los segmentos $A'B'$ y AB, es decir, el incremento absoluto de AB es,

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial s} ds \operatorname{sen}\varphi,$$

siendo u y v, los desplazamientos según los ejes x e y.

El alargamiento unitario según el eje I será,

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s} \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial s} \operatorname{sen}\varphi,$$

ó

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2\varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{sen}^2\varphi,$$

de donde se obtiene

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Para los tres ejes que coinciden con los ejes de los captadores de la roseta (fig. 577) se obtiene respectivamente,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{I} &= \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 \varphi, \\ \varepsilon_{II} &= \varepsilon_x \cos^2 (\varphi + 45^\circ) + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 (\varphi + 45^\circ), \\ \varepsilon_{III} &= \varepsilon_x \cos^2 (\varphi + 90^\circ) + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 (\varphi + 90^\circ), \end{aligned}$$

y después de transformaciones elementales,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\varepsilon_I - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{III}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_I - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})^2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{III}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_I - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})^2}.$$

Así, en el caso general se determinan la magnitud y la dirección de las deformaciones principales.

Las deformaciones principales por el mismo procedimiento se pueden obtener también con tres tensómetros mecánicos. En algunos casos se practica la determinación de los ejes principales con

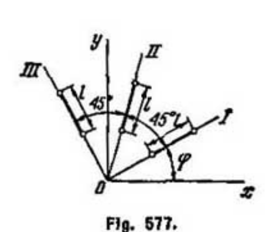


Fig. 577.

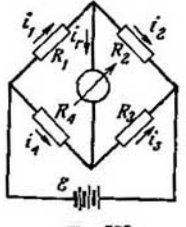


Fig. 578.

recubrimiento de barniz (véase más abajo) y la instalación posterior de tensómetros en las direcciones principales.

En la técnica moderna del ensayo los captadores tensométricos de resistencia se emplean no sólo para la medición de las deformaciones. En muchos dispositivos para la medición de las fuerzas se introducen los captadores en calidad de elementos sensibles que reaccionan a la variación de las cargas exteriores. Para medir los esfuerzos, los captadores tensométricos de resistencia se pegan a un elemento elástico deformable (barra, árbol, viga) y por la variación de la resistencia del captador se juzga sobre la magnitud del esfuerzo que actúa. Este método es cómodo porque permite de manera simple

realizar las mediciones a distancia sin la introducción de dispositivos adicionales complicados.

Durante los ensayos estáticos, el captador que se pega en la superficie de la pieza que se investiga se conecta con el dispositivo de medición según el circuito en puente (fig. 578) y las lecturas se toman por el galvanómetro. Una de las cuatro resistencias del puente, por ejemplo, R_1 es la resistencia del captador. El resto de las resistencias se escoge de manera que cuando no existen alargamientos de la pieza (antes del ensayo) el puente se encuentre equilibrado y la corriente en el galvanómetro i_g sea igual a cero. Para ello es necesario que se cumpla la relación siguiente,

$$\frac{R_1}{R_4}=\frac{R_2}{R_3}. \tag{16.1}$$

Generalmente, en calidad de resistencia R_4 se escoge el segundo captador que es igual al primero y las resistencias R_2 y R_3 se escogen iguales también. Así pues,

$$R_1=R_4=R_c, \quad R_2=R_3=R,$$

es decir, que se cumple la condición (16.1).

Planteando la ecuación de Kirchhoff para los circuitos de la figura 578 es fácil demostrar que, en el caso del puente no equilibrado, la corriente que pasa por el galvanómetro será,

$$i_g=\mathscr{E}\frac{R_1R_3-R_2R_4}{R_2R_3R_4+R_1R_3R_4+R_1R_2R_4+R_1R_2R_3} \tag{16.2}$$

Aquí se supone que la resistencia interior de la fuente de la corriente y del galvanómetro es muy inferior a R_1, R_2, R_3 y R_4. Cuando trabaja el captador, la resistencia R_1 varía en la magnitud ΔR y

$$R_1=R_c+\Delta R_c, \; R_2=R_3=R, \; R_4=R_c.$$

La expresión (16.2) será entonces

$$i_g=\frac{\mathscr{E}}{2(R+R_c)}\cdot\frac{\Delta R_c}{R_c}.$$

Así pues, la corriente que pasa por el galvanómetro es proporcional a la variación de la resistencia del captador y, por lo tanto, también a la deformación que se mide.

El error fundamental de los captadores tensométricos de resistencia es el error que provoca la temperatura. Al variar la temperatura, la resistencia del captador varía también considerablemente. Por ejemplo, en el caso del captador de constantán pegado en la superficie de una pieza de acero, al variar la temperatura 1°, la variación de la resistencia óhmica corresponde a una variación de la tensión de 7 kgf/cm² en la probeta de acero. Para compensar el error relacionado con la temperatura, el captador R_4 se une al circuito en puente sin pegarlo al captador R_1 y se cubre con un material aisla-

dor térmico, por ejemplo, con un trozo de fieltro. En este caso la temperatura de los dos captadores resulta ser igual y será igual, por lo tanto, también la variación de las resistencias R_1 y R_4 originada por la temperatura. El equilibrado del puente no se altera puesto que sigue en vigor la relación (16.1).

Cuando se investiga el estado tensional de una estructura compleja se dispone de un número muy grande de captadores de los cuales se deben tomar las mediciones. El galvanómetro y las resistencias R_2 y R_3 no se cambian mientras que los pares de resistencias R_1 y R_4, para cada punto en cuestión, se conectan sucesivamente para tomar las mediciones. Para evitar los errores relacionados con la variación del voltaje $\mathscr{E}$, directamente antes de tomar la medición se equilibra el puente con la resistencia variable r (fig. 579).

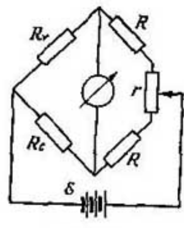


Fig. 579.

Este método de medición es válido, claro está, cuando las cargas varían estáticamente. Para los procesos de variación rápida se recurre a dispositivos de registro especiales. Para la medición de las deformaciones se usan los oscilógrafos y en el esquema se introduce un amplificador.

§ 115. Método óptico de determinación de las tensiones mediante modelos transparentes

El método óptico de estudio de las tensiones consiste en que un modelo transparente de un material ópticamente activo (en la mayoría de los casos de cristales orgánicos especiales) en estado de tensión se ilumina con luz polarizada. La imagen del modelo en la pantalla resulta entonces cubierta de un sistema de franjas cuya forma y posición se determina por el estado tensional del modelo. Analizando el cuadro obtenido se puede obtener la magnitud de las tensiones que surgen.

Lo más fácil de analizar con el método óptico es el estado tensional plano en modelos de espesor constante. Existen también métodos de investigación del estado tensional de volumen. Este problema sin embargo, resulta bastante más complicado, tanto en lo que se refiere a la técnica del ensayo como a la interpretación de los resultados obtenidos.

Veamos el caso de iluminación de un modelo plano con luz monocromática.

El esquema del dispositivo se ve en la figura 580. En él, S es la fuente de la luz; *1*, el condensador; *2*, el filtro; *6*, el objetivo y *7*, la pantalla. El modelo *4* se instala entre los elementos polarizadores *3* y *5*. El primero se denomina polarizador y el segundo analiza-

dor. Los ejes ópticos del polarizador y del analizador forman entre sí un ángulo de 90°. El haz de luz que atraviesa el polarizador *3* se polariza en el plano horizontal (el vector de la polarización se ubica horizontalmente y las oscilaciones ópticas tienen lugar en el plano vertical). El haz polarizado, dada la posición mutua de los ejes ópticos, no puede pasar por el analizador y, como resultado, la pantalla no se ilumina. El polarizador y el analizador están, como se dice, instalados para obtener la obscuridad. Al cargar el modelo, éste adquiere la posibilidad de girar el plano de polarización de la

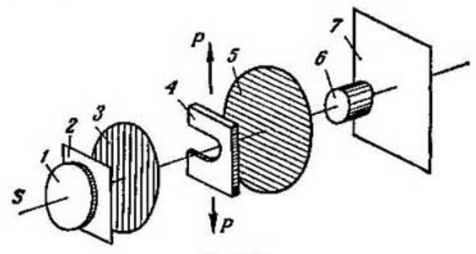


Fig. 580.

luz que lo atraviesa en función de la magnitud de las tensiones. Entonces, la luz con el plano de polarización girado pasa por el analizador y forma en la pantalla la imagen del modelo que se investiga cubierto de un sistema de franjas claras y obscuras.

Veamos esta cuestión con más detalle. La luz polarizada tiene su analogía en las oscilaciones mecánicas planas transversales en las que el desplazamiento u varía según la ley armónica,

$$u = a \operatorname{sen} \omega t,$$

siendo ω, la frecuencia de las oscilaciones transversales igual a la frecuencia de la onda de la luz; a, la amplitud de las oscilaciones correspondientes a la luminancia del haz.

Supongamos que el haz polarizado en el plano horizontal (fig. 581) pasa por el modelo transparente tensionado. Los desplazamientos en el plano vertical OA se descomponen según los ejes principales x e y. Entonces,

$$u_x = a \cos \alpha \operatorname{sen} \omega t, \quad u_y = a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega t.$$

El material que es ópticamente activo, cuando se encuentra en estado de tensión se hace anisotrópico, resultando que las velocidades de la luz c_x y c_y en los planos Ox y Oy son diferentes. Será diferente también el tiempo necesario para que la luz cruce la lámina de es-

pesor h,

$$t_x = \frac{h}{c_x}, \quad t_y = \frac{h}{c_y}.$$

Las ecuaciones de las ondas en los planos Ox y Oy después de salir de la lámina serán respectivamente,

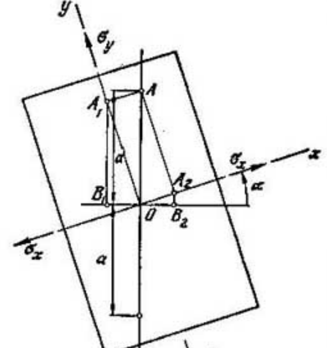


Fig. 581.

$$\left.\begin{aligned} u_x &= a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega (t - t_x), \\ u_y &= a \cos \alpha \operatorname{sen} \omega (t - t_y). \end{aligned}\right\} \tag{16.3}$$

Así pues, las oscilaciones resultan desplazadas en fase. Este desfasaje es,

$$\omega (t_y - t_x).$$

Por el analizador instalado para obtener la obscuridad pasarán solamente las oscilaciones que ocurren en el plano horizontal, es decir,

$$u' = OB_2 - OB_1 = \\ = OA_2 \cos \alpha - OA_1 \operatorname{sen} \alpha,$$

o de acuerdo a las expresiones (16.3).

$$u' = a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left[\operatorname{sen} \omega (t - t_x) - \operatorname{sen} \omega (t - t_y)\right].$$

Después de transformaciones elementales se obtiene definitivamente,

$$u' = a \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{sen} \omega \frac{t_y - t_x}{2} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{t_x + t_y}{2}\right).$$

Como vemos la amplitud de la onda que cruzó la probeta y el analizador será,

$$a' = a \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \omega \frac{t_y - t_x}{2}. \tag{16.4}$$

Por lo tanto la intensidad de la luz que incide en la pantalla depende del desfasaje $\omega (t_y - t_x)$ y del águlo α.

Cuando el plano de polarización coincide con la dirección de uno de los ejes principales, sen $2\alpha = 0$. En este caso la pantalla en los puntos correspondientes, permanecerá obscura. Lo mismo ocurrirá en los puntos de la imagen del modelo, donde la diferencia de las fases

$$\omega \frac{t_y - t_x}{2}$$

sea múltiple de π

$$\omega \frac{t_y - t_x}{2} = \pi n \tag{16.5}$$

siendo n un número entero arbitrario.

Así pues, como resultado en la pantalla, se obtienen franjas obscuras de doble procedencia. Ante todo, aparece una o varias franjas obscuras en las que la dirección de los ejes principales coincide con los planos de polarización. Estas líneas se denominan isoclinas (líneas de igual inclinación de las tensiones principales). El segundo sistema de franjas obscuras corresponde a los valores de

$$\omega \frac{t_y - t_x}{2}$$

iguales a 0, π, 2π...

El ensayo demuestra que la diferencia de las fases (la diferencia del tiempo con que la luz recorre los planos Oy y Ox) es proporcional a la diferencia de las tensiones σ_y y σ_x, es decir,

$$t_y - t_x = \frac{h}{c_y} - \frac{h}{c_x} = kh(\sigma_y - \sigma_x),$$

siendo k el factor de proporcionalidad que depende de la actividad óptica del material.

Por lo tanto, para cada franja del segundo tipo la diferencia de las tensiones $\sigma_y - \sigma_x$ es, de acuerdo a la expresión (16.5), constante e igual a,

$$0;\ \frac{2\pi}{\omega kh};\ \ 2\frac{2\pi}{\omega kh};\ \ 3\frac{2\pi}{\omega kh};\ \ldots;\ n\frac{2\pi}{\omega kh}.$$

El número n indica el orden de la franja.

La magnitud k (constante óptica) se determina fácilmente, ensayando previamente una probeta a tracción simple. Si se tracciona en la luz polarizada una barra prismática del mismo material que el modelo, entonces la imagen de la probeta en la pantalla se oscurece sucesivamente cuando la tensión en la probeta pasa por los valores

$$\frac{2\pi}{\omega kh};\ \ 2\frac{2\pi}{\omega kh},\ \text{etc.}$$

Midiendo la variación de la carga entre dos oscurecimientos consecutivos, obtendremos,

$$\sigma = \frac{2\pi}{\omega kh},$$

determinando así para el valor dado de ω (para el color dado) la magnitud de k.

Las franjas obscuras en el modelo correspondientes a valores constantes de $\sigma_y - \sigma_x$ se diferencian fácilmente de las líneas isoclinas. Si giramos simultáneamente el polarizador y el analizador en sus planos, es decir, si variamos el ángulo α, entonces las líneas iso-

clinas cambiarán de configuración, mientras que las franjas $\sigma_y-\sigma_x=$ $=$const permanecerán constantes. Al investigar el estado tensional en un modelo plano se recurre generalmente a este método. Girando el plano de polarización (en la mayoría de los casos con un intervalo de 5°) se construye la familia de las líneas isoclinas con las indicaciones correspondientes de los ángulos. Sobre la base de las isoclinas es fácil obtener después las trayectorias de las tensiones principales en el modelo.



Fig. 582.

Variando la carga sobre el modelo, manteniendo invariables las posiciones del polarizador y del analizador, se puede observar la aparición y el desplazamiento de las franjas en la imagen del modelo. Por ejemplo, durante la flexión de una barra prismática se obtiene el sistema de franjas representado en la figura 582. En la parte central del modelo donde tiene lugar la flexión pura se observa una distribución uniforme de las franjas. Esto quiere decir que las tensiones en la altura de la sección se distribuyen linealmente. Al aumentar la carga, en los bordes superior e inferior aparecen nuevas franjas que se desplazan hacia la línea neutra. Las franjas se condensan de esta forma, pero la distribución se mantiene uniforme. Realizando la carga de la barra a partir de cero resulta fácil determinar el orden de cada franja e indicar exactamente la diferencia correspondiente de $\sigma_x-\sigma_y$.

El método óptico no permite determinar la magnitud de σ_x y σ_y por separado. Para ello se recurre a métodos auxiliares. Uno de estos métodos consiste en la medición con un tensómetro especial la variación del espesor del modelo en los diversos puntos. Como Δh es proporcional a la suma de las tensiones,

$$\frac{\Delta h}{h}=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y),$$

conociendo la suma y la diferencia de las tensiones, es fácil calcular las propias tensiones. Sin embargo se prefiere el método que consiste en el empleo de las ecuaciones generales de la teoría de la elasticidad, con la integración posterior de las fuerzas interiores de acuerdo a las direcciones obtenidas de las tensiones principales. La descripción más detallada de este método sale fuera de los marcos del curso de resistencia de materiales.

Las posibilidades del método óptico no se agotan con el ejemplo analizado anteriormente de la iluminación del modelo plano con luz monocromática. Con frecuencia dicha iluminación se realiza con luz blanca. En este caso, en la pantalla, en lugar de franjas obscuras y claras se observan franjas de colores que abarcan de manera continua todos los colores del espectro. Existen métodos de iluminación de los modelos con eliminación de las líneas isoclinas. Se conocen métodos de investigación del estado tensional en modelos estéreos, cuando se «congela» la anisotropía óptica y se corta posteriormente el modelo en probetas planas.

§ 116. Método de las franjas de muaré

Este método ha comenzado a emplearse para el estudio del estado tensional hace relativamente poco tiempo y todavía se conoce poco a pesar de presentar ciertas ventajas.

El método de muaré se basa en el efecto que consiste en la aparición de franjas claras y obscuras cuando se sobreponen dos redes de parámetros iguales o que se diferencian poco. El cuadro que se obtiene se denomina muaré. En la figura 583 está representada la fotografía que ilustra este efecto.

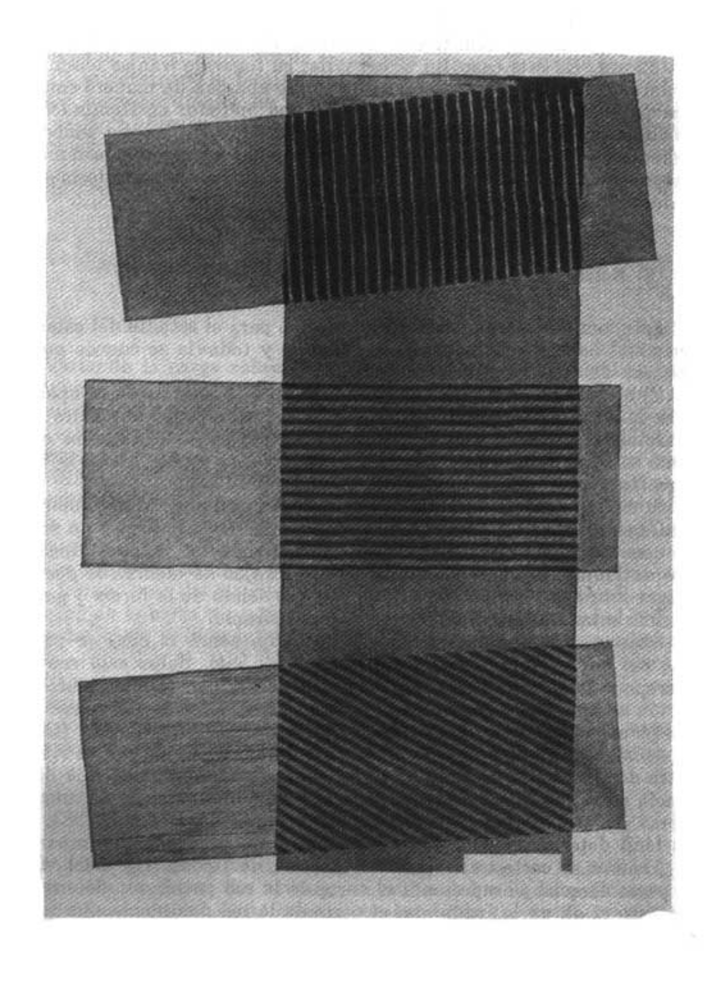
Si se fija una de las redes al objeto que se estudia, al deformarse éste, se desfigura la red, la distancia entre las líneas varía y no será ya constante y, al mismo tiempo, se flexionan las mismas líneas. Respectivamente varía el cuadro de las franjas de muaré. Se puede juzgar sobre la deformación del objeto, partiendo de la forma y posición de estas franjas. Veamos el caso más simple.

Supongamos que se tracciona una franja sobre la cual se pega una red cuyas líneas son transversales (fig. 584). Sobre esta red se sobrepone libremente otra igual a la primera y con la misma orientación de las líneas. Mientras la probeta no se deforma las líneas de las redes sobrepuestas darán un fondo uniforme: gris si cada línea se sitúa sobre la otra línea y obscuro si la línea de una red se sitúa entre dos líneas de la otra. Al traccionar la probeta aumenta la distancia entre las líneas de la primera red y aparecen franjas de muaré rectas de orientación transversal, como se ve de la figura 583, *b*. Es fácil determinar cuál es la distancia entre las franjas de muaré.

Veamos el corte transversal del sistema de líneas (fig. 585). En la parte derecha se representa el corte de la red patrón sin deformar (el paso es a), en la izquierda, el corte de la red deformada. Su paso es a_1,

$$a_1 = a(1 + \varepsilon),$$

siendo ε, el alargamiento de la probeta que se ensaya.



En el centro de la franja de muaré obscura (punto A) la línea de una de las redes se sitúa sobre el claro de la otra. Del esquema se deduce que en el segmento S igual al paso de las franjas de muaré, en la red sin deformar entran n líneas, mientras que en la otra red $n-1$. Por lo tanto,

$$S = na. \tag{16.6}$$

Por otra parte $S = (n-1)\,a_1$, donde se obtiene,

$$n = \frac{a_1}{a_1 - a} \quad \text{ó} \quad n = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Volviendo a la expresión (16.6) se obtiene,

$$\varepsilon = \frac{a}{S-a}.$$

Como el parámetro a de la red se conoce, queda por medir la distancia S entre las franjas de muaré y calcular ε.

En el ejemplo que se analiza se ve claramente la esencia del método y su diferencia fundamental del óptico de luz polarizada.

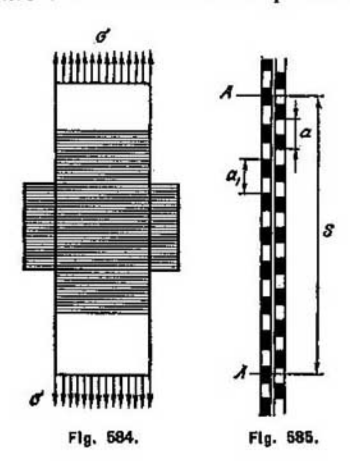


Fig. 584. Fig. 585.

El muaré aparece como consecuencia del desplazamiento mutuo de las redes. Este es una especie de indicador de los desplazamientos. Para determinar la deformación media en un tramo se debe comparar la posición de dos franjas contiguas. El muaré es en este sentido semejante al tensómetro, pero no determina el desplazamiento discreto de un punto, sino un cuadro continuo de los desplazamientos en la zona.

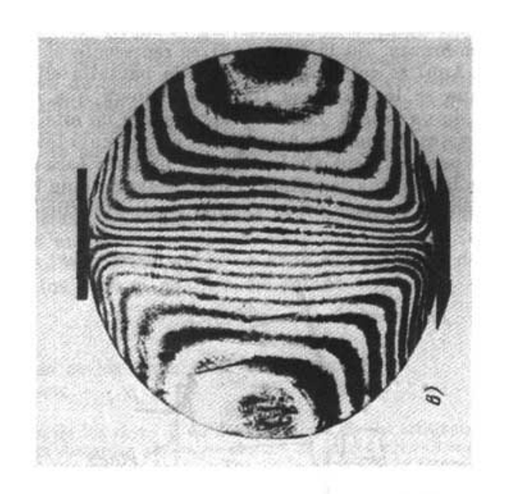
En el método óptico de luz polarizada las cosas son diferentes. Aquí la franja surge no como consecuencia del desplazamiento, sino como consecuencia de la deformación local. El enrarecimiento o condensación de las franjas no certifica la magnitud de las deformaciones, sino el gradiente de la variación de éstas, como se demostró en el ejemplo en la figura 582.

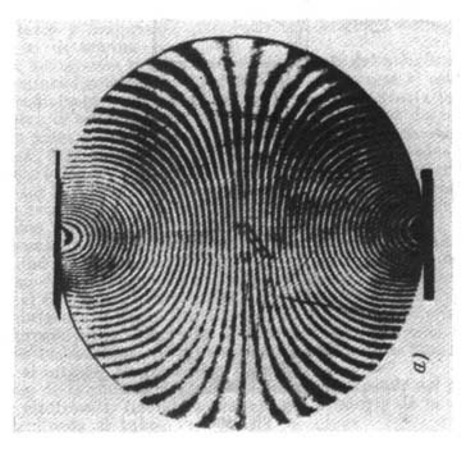
En el caso de tracción homogénea de una placa de un material ópticamente activo no se observarán franjas algunas. Ocurrirá solamente un obscurecimiento o clarecimiento periódico de la imagen cuando la deformación que surge pasa por un valor determinado. En el método de muaré el clarecimiento que sigue al obscurecimiento ocurre cuando no se da la deformación sino el desplazamiento de una red respecto a la otra como sólido indeformable, en la magnitud $\frac{a}{2}$.

Pasando al lenguaje del análisis se puede decir que la deformación se determina por las primeras derivadas de los desplazamientos respecto a las coordenadas x e y. El método de muaré, por lo tanto, exige obligatoriamente la derivación de las funciones de los desplazamientos que se observan. Esto se realiza en forma implícita cuando se mide el paso de las franjas, es decir, la diferencia de los desplazamientos. Esta operación está relacionada, claro está, con la pérdida de exactitud lo que impone limitaciones al empleo del método de las franjas de muaré. Si las deformaciones son pequeñas las franjas se sitúan a grandes distancias entre sí. Dentro de los límites de la zona que se analiza, habrá pocas franjas y la deformación media que se mide en grandes segmentos no da una idea suficientemente completa del cuadro del estado tensional. Al mismo tiempo las propias franjas resultan mal definidas y determinar de una manera clara su posición y dirección resulta dificultoso.

Lo más conveniente es emplear el método de las franjas de muaré allí donde se espera la aparición de deformaciones relativamente grandes. A este caso se refieren los problemas relacionados con el análisis de los cuerpos que se deforman plásticamente o con el comportamiento de las estructuras con fluencia plástica. Es importante destacar que el análisis de estos problemas está fuera de la aplicación del método óptico.

En la figura 586, está representado el cuadro de las franjas de muaré que aparecen al comprimir un disco en la dirección del diámetro vertical de un material cuyo módulo de elasticidad es pequeño. En el caso a) las líneas de la red son horizontales y en el caso b), verticales. Cada una de las franjas constituye el lugar geométrico de los puntos de desplazamientos iguales perpendiculares a las líneas de la red. Se ve claramente que la frecuencia de las franjas es en el caso a) mayor que en el caso b). Esto quiere decir que la deformación en el sentido vertical es mayor que en el horizontal.


б)


а)

Una de las variedades del método de las franjas de muaré es el método de determinación de los desplazamientos angulares de la superficie deformada, en particular, de la superficie elástica de las placas y membranas. En la figura 587 se representa el esquema del dispositivo. Aquí se coloca la red sobre la pantalla cilíndrica y la superficie que se investiga se trata de manera que adquiera las propiedades de un espejo. La red que se refleja de esta superficie se expone dos veces del mismo dispositivo en película fotográfica. La primera vez para la placa sin flexionar y después para la placa flexionada. En la película se refleja el desplazamiento de la red debido a la variación de la orientación angular de la superficie que refleja

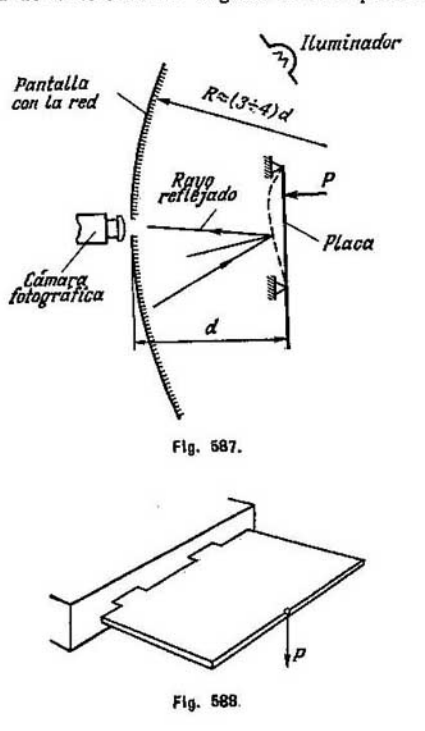


Fig. 587.

Fig. 588.

y aparece así el efecto de muaré. A diferencia de las franjas de la figura 586 aquí cada franja constituye el lugar geométrico de los puntos

de igual inclinación de la superficie en el plano perpendicular a las líneas de la red trazada en la pantalla. Conociendo los desplazamientos angulares se establece la ley de variación de la curvatura de la placa y después se calculan las tensiones.

En calidad de ejemplo, en la figura 588 se representa una placa rectangular empotrada en dos tramos de un mismo borde y solicitada por una fuerza concentrada. En la figura 589 se da el cuadro de la distribución de las franjas de muaré para dos casos de situación de la red.

Hasta la actualidad se han creado varias modificaciones del método de las franjas de muaré y se han desarrollado varios procedimientos que aumentan su exactitud y efectividad. En las manos del investigador este método es un buen complemento del arsenal de procedimientos para el análisis del estado tensional.

§ 117. Método de los rayos X de determinación de las tensiones

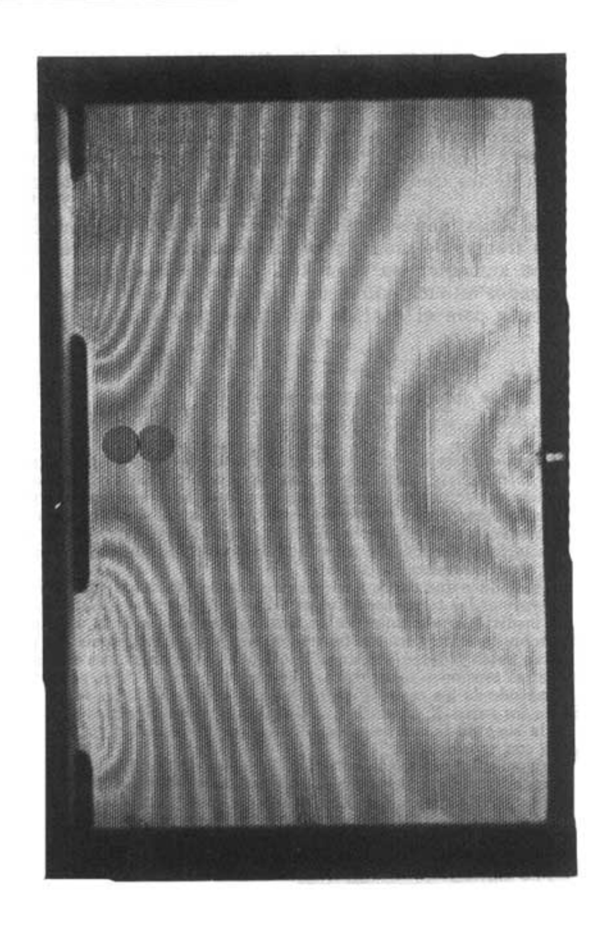
El método de los rayos X de determinación de las tensiones se basa en la medición de la distancia entre los átomos de la red cristalina del metal. Esta distancia puede variar por dos causas: por la acción de la temperatura y por la acción de las fuerzas. En el estado sin cargar se conoce la distancia entre los átomos. Comparando esta distancia con la distancia medida se obtiene el alargamiento unitario y después de introducir la corrección correspondiente a la temperatura, se determina la tensión.

De esto se deduce una particularidad importante del método de los rayos X. Permite determinar las tensiones en el metal sin referencia al estado sin tensiones. En las mediciones comunes de las tensiones es necesaria la ubicación del tensómetro sobre la estructura sin tensiones para comparar después las lecturas del dispositivo antes y después de la solicitación. Las pretensiones en las estructuras (apretura, tensiones tecnológicas) no pueden ser captadas por los tensómetros. El método de los rayos X da los valores absolutos de las tensiones. Por el método de los rayos X se pueden, por ejemplo, determinar las tensiones residuales en la zona de la costura soldada después de que se enfríe lo que no se puede hacer con tensómetros.

Como sabemos, los rayos X surgen cuando un haz de electrones que se mueven a gran velocidad incide en la superficie de un metal. El haz de electrones se crea en el tubo de Roentgen, calentando el filamento y acelerando después los electrones en el campo de alta tensión. Los electrones que inciden en el ánodo del tubo dan origen a la radiación Roentgen que se difunde principalmente en la dirección perpendicular al haz (fig. 590). Durante el trabajo, el ánodo se calienta mucho y su enfriamiento se lleva a cabo con agua. Para aumentar la evacuación de calor, el tubo del ánodo se hace de cobre.

El espectro de la emisión del tubo de Roentgen depende del metal en el cual incide el haz electrónico (metal de trabajo del ánodo) y de la magnitud de la alta tensión aplicada al tubo.

En el método de los rayos X de medición de las tensiones en el metal se emplea una emisión de rayos X monocromática (característica) la, así denominada, serie K. Para obtener tal emisión es necesario aplicar al tubo una tensión alta, mayor que cierta magnitud característica del metal de trabajo dado del ánodo. Por ejemplo, para investigar las estructuras de acero en calidad de metal de





trabajo del ánodo se emplea el cobalto. Si la tensión anódica en el tubo no supera 7710 voltios, entonces el espectro de la emisión de rayos X del cobalto será continuo y abarcará las longitudes de onda desde las más cortas del orden de 1,6 Å hasta las largas correspondientes a la emisión térmica. Cuando la tensión del ánodo es superior a 7710 voltios, este cuadro cambia bruscamente. La intensidad del espectro continuo disminuye y en su fondo aparece una emisión bien definida de longitudes de onda determinadas y bien definidas. En el caso del cobalto hay tres emisiones de este tipo. La de mayor intensidad tiene una longitud de onda λ igual a 1,7853 Å. La contigua a ésta, pero más débil tiene la longitud de onda igual a 1,7892 Å. Estas dos emisiones forman lo que se llama el doblete $K\alpha$. La tercera emisión es muy débil y no tiene importancia práctica. Aumentando más la tensión no varía ya el carácter del espectro y crece solamente la intensidad de la emisión. Las longitudes de onda indicadas se conservan.

Las ondas de la emisión de rayos X, al actuar sobre los electrones de los átomos del metal que se estudia, les obligan a vibrar con la frecuencia de la onda. Es decir, los electrones mismos se convierten en focos de vibraciones y difunden emisión de rayos X de longitud de onda igual a la del haz que incide. Como los átomos en la red cristalina del metal que se investiga, se sitúan en un orden determinado, las emisiones, que parten de los electrones, interfieren entre sí. Como resultado, el haz de rayos X que cae sobre el cristal se difunde del cristal en direcciones determinadas según sea la relación entre la longitud de la onda, las dimensiones de la red y el ángulo de caída del haz de rayos X. Esta relación se denomina condición de Bragg.

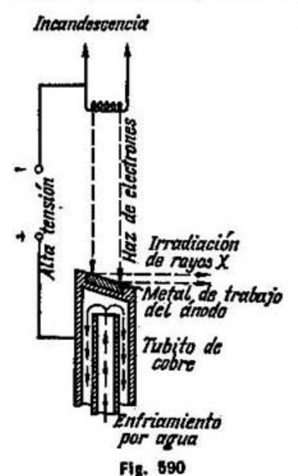


Fig. 590

La condición de Bragg se interpreta generalmente como la condición de reflexión del haz de rayos X de un plano cristalino determinado, aunque, de hecho, ocurre no la reflexión, sino la interferencia de las oscilaciones que se propagan de los electrones excitados en los átomos de la red cristalina.

Si analizamos dos planos paralelos AA y BB (fig. 591) en cierta red cristalina será entonces fácil de obtener la condición de Bragg. El rayo X que cae sobre los planos y se refleja en ellos se amplifica en el caso de que la diferencia de fase de las ondas *1* y *2* constituya un número entero de ondas λ. Entonces,

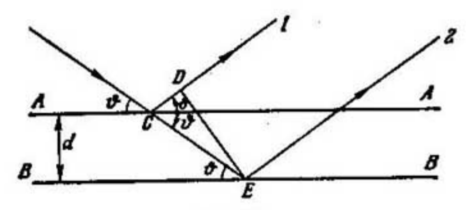


Fig. 591.

$$CE - CD = n\lambda,$$

ó

$$\frac{d}{\operatorname{sen}\vartheta} - \frac{d}{\operatorname{sen}\vartheta}\cos 2\vartheta = n\lambda,$$

siendo d, la distancia entre los planos. Definitivamente se obtiene,

$$2d \operatorname{sen}\vartheta = n\lambda. \qquad (16.7)$$

Esta es la condición de Bragg. Ella demuestra que la reflexión de los rayos X de cierto plano puede ocurrir solamente cuando el rayo incidente forma con este plano un ángulo determinado ϑ que satisface la relación indicada. El número n se denomina orden de reflexión.

Veamos ahora el esquema de la reflexión del rayo X de la superficie de la probeta que se estudia. El haz que incide normalmente en la superficie abarca un

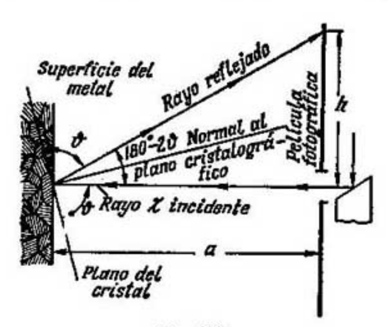


Fig. 592.

área de 1,5—2 mm de diámetro. En este área, como demuestran los ensayos, entre el gran número de cristales iluminados se encuentra generalmente suficiente cantidad de cristales orientados de tal manera que sus planos y los parámetros del rayo incidente satisfacen la condición de Bragg. En este caso tiene lugar la reflexión del rayo en los cristales (fig. 592). Los rayos reflejados forman una superficie cónica que tiene en su vértice un ángulo de $360° - 4\vartheta$. Si en el camino de estos rayos se ubica una película fotográfica, en ella aparecerá un círculo de radio h (fig. 592). Es obvio que

$$\operatorname{tg}(180° - 2\vartheta) = -\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{h}{a}, \qquad (16.8)$$

siendo a, la distancia de la cinta a la superficie del metal. Las magnitudes de h y a se miden y se determina así el ángulo ϑ. Volviendo a la expresión (16.7) y conociendo la longitud de la onda λ y el orden de reflexión n se puede obtener d, es decir, la distancia entre los planos del cristal. Esta magnitud se debe comparar con el tamaño d_0 del cristal sin tensionar. Así se determina el alargamiento en la dirección perpendicular al plano reflector del cristal.

La realización práctica de estas operaciones presenta una serie de dificultades, cuyo origen radica en que todas las mediciones deben ser realizadas con una exactitud que garantice la determinación de la diferencia entre d y d_0, magnitud que es muy pequeña.

Surge, ante todo, la dificultad relacionada con la determinación de la distancia a entre la película y la probeta. Esta magnitud es del orden de 50 mm y no se puede medir simplemente con una regla puesto que debe determinarse con la exactitud de un micrón. No se puede recurrir tampoco a cualquier otro instrumento de medición más exacto, por ejemplo al micrómetro. La película en el estuche generalmente se corruga y al entrar en contacto con el instrumento de medición se flexiona. Por lo tanto la distancia de a medida no coincide con la real en el momento de fotografiar. Se debe tener en cuenta también que para trabajar durante el día la película se envuelve en papel negro, impenetrable para los rayos de luz comunes y que no ofrece resistencia a los rayos X. El papel tiene cierto espesor que se debe tener en cuenta en las mediciones para introducir la corrección.

Las dificultades que surgen se resuelven de manera siguiente. En el punto de la superficie que se investiga el metal se limpia y se ataca químicamente con ácido. La superficie limpia se cubre después (generalmente por el método electrolítico) con cristales de algún otro metal. Al estudiar las estructuras de acero para este propósito se emplea, en la mayoría de los casos, el oro. En la fotogra-

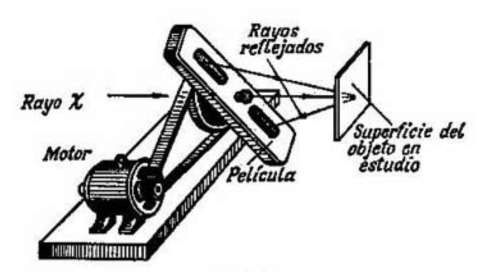


Fig. 593.

fía, sobre la película, se obtienen las líneas de los rayos X que se reflejan de los cristales del hierro y del oro. Como los cristales de oro se aplican electrolíticamente y no están tensionados, se puede considerar que se conoce la distancia entre los átomos de la red cristalina del oro. Por lo tanto, de la ecuación de Bragg (16.7) se determina el ángulo θ para el oro. Si en la película revelada se mide la distancia $2h$ entre las líneas del oro, entonces de la expresión (16.8), con gran exactitud se podrá obtener la magnitud de a. Es decir que esta magnitud se obtiene de manera indirecta midiendo las líneas en la película. Sin embargo esta última operación también presenta algunas dificultades.

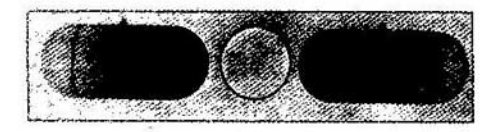


Fig. 594.

Es necesario, ante todo, indicar que el número de cristales que reflejan en el área iluminada de la probeta que se estudia es del orden de una o dos decenas. Por lo tanto en la película resulta no una línea continua obscura, sino unas dos decenas de puntos iluminados de diverso tamaño, situados en una circunferencia de radio h. Para obtener el resultado medio, al revelar la película, ésta se gira alrededor del eje del haz de rayos X original. Entonces en la cinta aparecerán líneas continuas. La película se escoge en forma de una franja estrecha puesto que para la medición del diámetro de la línea no se necesita la circunferencia completa. En la figura 593 se representa el estuche con la transmisión giratoria, la así denominada, cámara de Sax. En la figura 594 se ve la película revelada, el roentgenograma, donde se pueden apreciar las líneas del hierro y del oro. Las líneas son dobles, puesto que la emisión característica del cobalto forma, como se indicó anteriormente, un doblete. La línea más clara corresponde a la longitud de onda $\lambda=1{,}7853$ Å, la menos clara a la longitud de onda $\lambda=1{,}7892$ Å. La medición del roentgenograma se realiza, claro está, por la línea más clara.

Las líneas del roentgenograma son algo difusas, lo que constituye la fuente principal de los errores en la medición de las líneas obtenidas. La máxima exac-

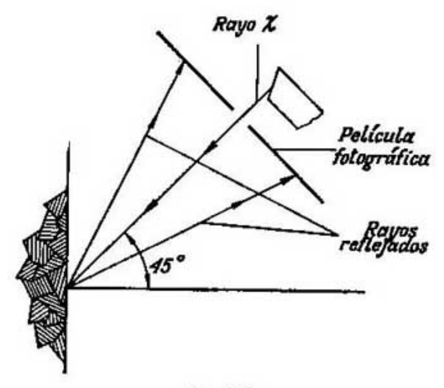


Fig. 595.

titud se consigue cuando se recurre, para realizar las mediciones, a un microfotómetro, dispositivo que reacciona a la densidad local de la obscuridad de la película. Así se puede con precisión suficiente determinar la posición del máximo de la obscuridad de las líneas, lo que a simple vista resulta mucho más difícil de realizar.

Al realizar las mediciones se introduce la corrección correspondiente a la contracción de la película durante su tratamiento. Para ello, en el estuche se hacen ranuras de control y como resultado en el roentgenograma aparecen, en el costado, la imagen de dos dientes agudos (fig. 594). Después de comparar la distancia entre los dientes en la película y en el estuche se puede introducir la corrección necesaria.

En el caso del estado tensional complejo para determinar las tensiones principales y los ejes principales es insuficiente un roentgenograma. En efecto, sobre la base de las mediciones anteriores se determina el alargamiento unitario en

la dirección próxima al eje normal y, por lo tanto,

$$\frac{\Delta d}{d} \approx -\frac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2).$$

Para determinar dos tensiones y el ángulo que caracteriza las direcciones principales en el caso general es necesario realizar dos mediciones más. Estas mediciones se realizan, iluminando la superficie que se investiga no en la dirección normal, sino con cierta inclinación (por ejemplo 45°) en diferentes planos como se puede ver en la figura 595. Así pues, el problema de la determinación de los ejes principales y de las tensiones principales tiene en principio solución.

A pesar de que, en comparación con otros métodos, el método de los rayos X presenta ventajas indudables, al determinar las tensiones residuales, no ha recibido éste en la práctica de las investigaciones de laboratorio un amplio uso. Esto se explica, ante todo, por las dimensiones de los aparatos usados y por lo complicado del tratamiento de los resultados de las mediciones. El método de los rayos X es relativamente poco exacto puesto que la medición de las líneas en la película está relacionada con errores significantes. El método de los rayos X tiene por último una particularidad específica que dificulta su aplicación. Como la reflexión de los rayos X tiene cierta selectividad respecto a los planos de la red cristalina, surge la interrogante sobre la anisotropía elástica de los cristales. El objeto que se investiga es, hablando en términos medios, isótropo, pero sus cristales aislados son anisótropos y, al calcular las tensiones, este hecho deberá tenerse en consideración puesto que los rayos reflejados que inciden en la película proceden no de planos cualesquiera, sino solamente de aquellos que tienen una orientación cristalográfica determinada. Por lo tanto, al calcular las tensiones, hablando en términos generales, es necesario recurrir no a los valores medios de las constantes elásticas E y μ, sino a aquellos que son característicos de los correspondientes planos de los cristales. A la eliminación de estas dificultades se han dedicado muchos trabajos, pero no se puede considerar todavía que este problema está resuelto en toda su amplitud. El método de los rayos X de determinación de las tensiones necesita ser mejorado considerablemente.

§ 118. Método de recubrimientos con barniz

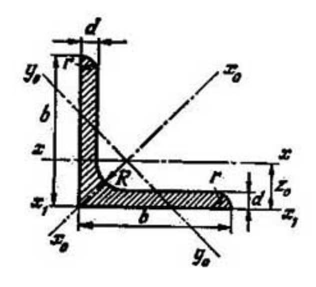
El método de recubrimiento con barniz consiste en que sobre la superficie limpia de la estructura que se investiga, se aplica una capa fina de barniz. Al secarse éste forma una película fina fuertemente unida con el metal. La composición del barniz se escoge de tal manera que el alargamiento de la película durante la rotura sea del orden de los alargamientos elásticos del metal. Al solicitar el objeto que se ensaya en la zona de las tensiones elevadas, en el recubrimiento de barniz aparece una red de grietas pequeñas.

El ensayo demuestra que las grietas se orientan perpendicularmente al eje del alargamiento máximo. En el caso de un material isótropo esto corresponde a la dirección de la tensión de tracción principal. En el barniz transparente se ven bien las grietas y así fácilmente se establece la dirección de los ejes principales en la zona que se estudia. Si se fija el momento de la aparición de las grietas, se establece así también el alargamiento correspondiente a la carga determinada. El alargamiento durante la rotura del barniz se establece para el contenido de éste mediante ensayos comparativos con probetas planas y con la ubicación de tensómetros mecánicos.

Al determinar las tensiones principales en las zonas de tensiones de compresión se recurre generalmente a un método artificial. La estructura se carga previamente y sobre la superficie tensionada se aplica el recubrimiento con barniz. Durante la descarga en las zonas de compresión aparecen las grietas.

La receta más simple y accesible del barniz consiste en la solución de 50 gramos de colofonia y 5 de celuloide en 100 gramos de esencia de pera. Existen otras muchas recetas que pretenden crear toda una gama de barnices de diversos alargamientos durante la rotura.

El método de recubrimientos con barniz tiene gran importancia no como un método independiente de determinación de las tensiones, sino como método auxiliar que permite con procedimientos simples establecer la dirección de los ejes principales en las zonas que nos interesen y determinar de manera aproximada el orden de las tensiones que actúan. Después de estos ensayos previos existe la posibilidad de situar los captadores tensométricos de resistencia de la manera más racional para obtener el cuadro exacto del estado tensional.



Surtido de acero laminado
Acero laminado angular
de alas iguales
GOST 8509—57

Número del perfil	Tamaños en mm				Area del perfil en cm²	Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes								z_0 en cm
							$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	
	b	d	R	r			I_x en cm⁴	i_x en cm	I_{x0} max en cm⁴	i_{x0} max en cm	I_{y0} min en cm⁴	i_{y0} min en cm	I_{x1} en cm⁴	
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04

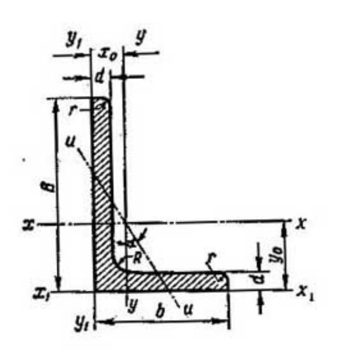
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6	2	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4			4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18

Continuación

Número del perfil	Tamaños en mm				Area del perfil en cm²	Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes								z_0 en cm
							$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$		
	b	d	R	r			I_x en cm⁴	i_x en cm	I_{x0} max en cm⁴	i_{x0} max en cm	I_{y0} min en cm⁴	i_{y0} min en cm	I_{x1} en cm⁴		
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2		2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102		2,19
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119		2,23
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137		2,27
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145		2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169		2,47
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194		2,51
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219		2,55
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214		2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231		2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265		2,75
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333		2,83
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402		2,91
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	9,3	1,94	472		2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542		3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308		2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353		3,00
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516		3,36
		9			22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582		3,40
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649		3,45
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782		3,53
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916		3,61
		16			37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1 051		3,68

14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1 097	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	1 356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	1 494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	1 633	4,39
		14			43,3	34,0	1 046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	1 911	4,47
		16			49,1	38,5	1 175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	2 191	4,55
		18			54,8	43,0	1 299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	2 472	4,63
		20			60,4	47,4	1 419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	2 756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1 216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	2 128	4,85
		12			42,2	33,1	1 317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	2 324	4,89
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1 823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	3 182	5,37
		13			50,9	39,9	1 961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	3 452	5,42
		14			54,6	42,8	2 097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	3 722	5,46
		16			62,0	48,7	2 363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	4 264	5,54
		20			76,5	60,1	2 871	6,12	4 560	7,72	1 182	3,93	5 355	5,70
		25			94,3	74,0	3 466	6,06	5 494	7,63	1 438	3,91	6 733	5,89
		30			115,5	87,6	4 020	6,00	6 351	7,55	1 688	3,89	8 130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2 814	6,83	4 470	8,60	1 159	4,38	4 941	5,93
		16			68,6	53,8	3 175	6,81	5 045	8,58	1 306	4,36	5 661	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4 717	7,76	7 492	9,78	1 942	4,98	8 286	6,75
		18			87,7	68,9	5 247	7,73	8 337	9,75	2 158	4,96	9 342	6,83
		20			97,0	76,1	5 765	7,71	9 160	9,72	2 370	4,94	10 401	6,91
		22			106,1	83,3	6 270	7,69	9 961	9,69	2 579	4,93	11 464	7,00
		25			119,7	94,0	7 006	7,65	11 125	9,64	2 887	4,91	13 064	7,11
		28			133,1	104,5	7 717	7,61	12 244	9,59	3 190	4,89	14 674	7,23
		30			142,0	111,4	8 177	7,59	12 965	9,56	3 389	4,89	15 753	7,31

Acero laminado angular de alas desiguales, GOST 8510—57



Número del perfil	Tamaños en mm					Area del perfil en cm²	Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes										
								$x-x$		$y-y$		x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$		
	B	b	d	R	r			I_x en cm⁴	i_x en cm	I_y en cm⁴	i_y en cm	I_{x_1} en cm⁴	Distancia del centro de gravedad y_0, en cm	I_{y_1} min, en cm⁴	Distancia del centro de gravedad x_0 en cm	I_u min, en cm⁴	i_u min, en cm	Inclinación del eje, tg α
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392

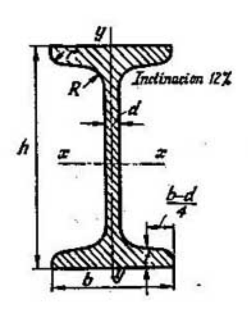
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4			3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	2,0	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4			3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5			4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5			4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5			5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406

Continuación

Número del perfil	Tamaños en mm					Area del perfil en cm²	Peso por metro lineal, en kgf	Datos respecto a los ejes										
								x—x		y—y		x_1—x_1		y_1—y_1		u—u		
	B	b	d	R	r			I_x en cm⁴	i_x en cm	I_y en cm⁴	i_y en cm	I_{x1} en cm⁴	Distancia del centro de gravedad y_0, en cm	I_{y1} min, en cm⁴	Distancia del centro de gravedad x_0 en cm	I_u min, en cm⁴	i_u min, en cm	Inclinación del eje, tg α
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6			7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6			8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7			12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8			13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400

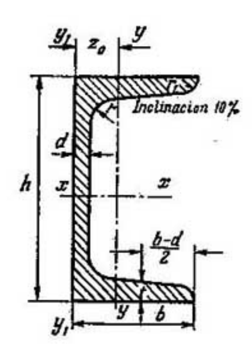
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8			16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10			22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1 221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10			25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1 359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12			30	23,6	784	5,11	239	2,82	1 634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1 910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1 933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2 324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2 920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12			37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3 189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3 726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4 264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6 212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0 410
			16			63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8 308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18			71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9 358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20			78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10 410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

Acero laminado.
Vigas doble te.
GOST 8239—56



Número del perfil	Peso por metro lineal, en kgf	Tamaños en mm						Area de la sección en cm²	Datos respecto a los ejes						
									x—x				y—y		
		h	b	d	t	R	r		I_x, en cm⁴	W_x, en cm³	i_x, en cm	S_x, en cm³	I_y, en cm⁴	W_y, en cm³	i_y, en cm
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07

20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15	6	71,4	18 930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16	7	83,0	27 450	1 220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17	7	97,8	39 290	1 570	20,0	905	1 040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18	7	114	55 150	2 000	22,0	1 150	1 350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	20	8	132	75 450	2 510	23,9	1 450	1 720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	22	9	153	101 400	3 120	25,8	1 800	2 170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	24	10	176	134 600	3 840	27,7	2 230	2 730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	24	10	202	152 700	4 360	27,5	2 550	3 240	309	4,01
70b	184	700	210	17,5	28,2	24	10	234	175 370	5 010	27,4	2 940	3 910	373	4,09



Acero laminado.
Perfiles canal.
GOST 8240—56

Número del perfil	Peso por metro lineal, en kgf	Tamaño en mm						Area de la sección, en cm²	Datos respecto a los ejes							
									$x-x$				$y-y$			z_0
		h	b	d	t	R	r		I_x, en cm⁴	W_x, en cm³	i_x, en cm	S_x, en cm³	I_y, en cm⁴	W_y, en cm³	i_y, en cm	en cm
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24

8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,8	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

INDICE DE MATERIAS

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.